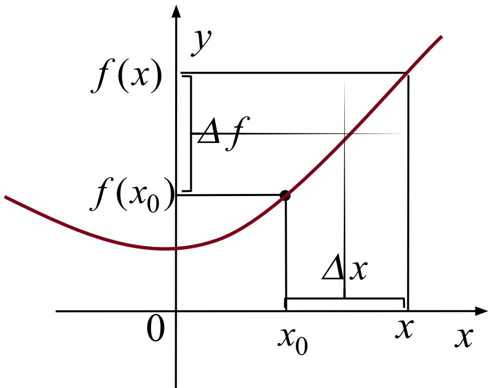
ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1. Понятие дифференциала функции

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$, определенную в окрестности точки x_0.

В окрестности точки x_0 выберем точку x, и найдем значение функции в этой точке.



$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента

$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции

Определение

Предел отношения приращения функции в точке x_0 к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к 0 (если этот предел существует и конечен) называется **производной функции** $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Обозначения производной: $f'(x),\ f'_x,\ y'(x),\ y'_x, \dfrac{dy}{dx}, \dfrac{df}{dx}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 отличную от нуля производную:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \neq 0$$

По основной теореме о пределах, в окрестности точки x_0 имеет место равенство:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x), \qquad \alpha(x) \text{ – функция, бесконечно малая при } \Delta x \to 0$$

Следовательно, $\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x \quad (\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0)\Delta x}{\Delta x} = f'(x_0) \neq 0, \quad \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(x) = 0)$

$f'(x_0)\Delta x$ – **главная часть приращения функции**

<u>Определение</u>

Дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть приращения этой функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$

$$df = f'(x_0)\Delta x$$

Дифференциал независимой переменной x равен приращению Δx:

$$y = f(x) = x \Rightarrow y' = x' = 1 \Rightarrow df = dx = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$$

Итак, $$df = f'(x)dx$$

Следовательно, $$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пример 1

Дана функция $f(x) = x^4 + \sin 3x$

Найти df в точке $x_0=0$

Решение:

$$df = f'(x)\,dx = (x^4 + \sin 3x)'dx = (4x^3 + 3\cos 3x)dx$$

$$df(x_0) = (4 \cdot 0^3 + 3\cos 0)dx = 3dx$$

Пример 2

Дана функция $f(x) = e^{arctg\,x} + 7x - 3$

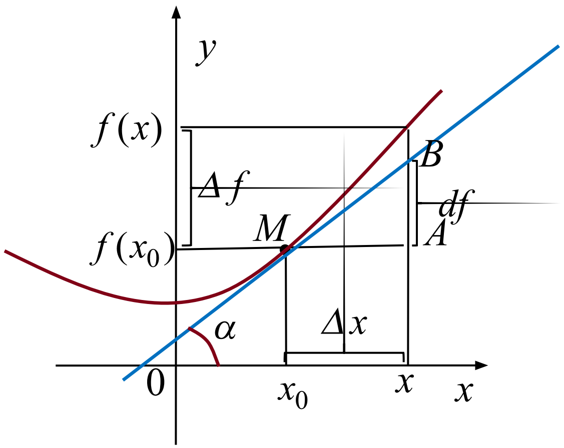
Найти df

Решение:

$$df = f'(x)\,dx = (e^{arctg\,x} + 7x - 3)'dx = \left(e^{arctg\,x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + 7\right)dx$$

2. Геометрический смысл дифференциала функции

К графику функции $y = f(x)$ проведем касательную в точке x_0



$$f'(x_0) = tg\,\alpha = tg\,AMB = \frac{AB}{MA} = \frac{AB}{\Delta x} \Rightarrow AB = f'(x_0)\Delta x \Rightarrow AB = df$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда аргумент получает приращение Δx

3. Свойства дифференциала

1. $d\,C = 0$
2. $d\,(u \pm v) = du \pm dv$
3. $d\,(u \cdot v) = v\,du + udv$
4. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - udv}{v^2} (v \neq 0)$

5. Пусть $y = f(u(x))$ – сложная функция, тогда

$$dy = f'_x\,dx = f'_u \cdot u'_x\,dx = f'_u\,du$$

Итак, $\underline{f'_x\,dx = f'_u\,du}$

|

инвариантность формы 1-го дифференциала

4. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Приращение функции

$$\Delta f = f'(x_0)\Delta x + \alpha(x)\Delta x = df + \alpha(x)\Delta x \Rightarrow \Delta f \approx df$$

Абсолютная погрешность при замене Δf на df равна $\Delta f - df = \alpha(x)\Delta x$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$

Пример

Вычислить $2{,}01^5$

Решение:

Рассмотрим функцию $f(x) = x^5$

Пусть $x_0 = 2,\ \Delta x = 0{,}01,$ тогда $x_0 + \Delta x = 2{,}01$

Задача сводится к нахождению $f(x_0 + \Delta x) = (2 + 0{,}01)^5$

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f$$

$$f(x_0) = f(2) = 2^5 = 32$$

$$\Delta f \approx d f = (x^5)'\Delta x = 5x^4\Delta x \qquad d f(x_0) = 5 \cdot 2^4 \cdot 0{,}01 = 0{,}8$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx 32 + 0{,}8 = 32{,}8$$

Итак, $2{,}01^5 \approx 32{,}8$

5. Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$, x – независимая переменная,
$df = f'(x) \cdot dx$ – дифференциал (первый дифференциал).

<u>Определение</u>
Вторым дифференциалом $d^2 f$ функции $y = f(x)$ называют дифференциал от первого дифференциала df, рассматриваемого как функция от x (dx считаем константой).

Таким образом,

$$d^2 f = d(df) = d(f'(x) \cdot dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x) \cdot dx = f''(x) \cdot (dx)^2.$$

Итак, $\underline{d^2 f = f''(x) \cdot dx^2}$.

Аналогично определяются третий и выше дифференциалы:

$$d^3 f = f^{(3)}(x) \cdot dx^3, \quad d^4 f = f^{(4)}(x) \cdot dx^4$$

Итак, $\underline{d^n f = f^{(n)}(x) \cdot dx^n}$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пример

Дана функция $f(x) = x^4 + \sin 3x$

Найти $d^2 f$

Решение:

$$d^2 f = f''(x)\,dx^2 = (x^4 + \sin 3x)''dx^2 = (4x^3 + 3\cos 3x)'dx^2 = (12x^2 - 9\sin 3x)dx^2$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!