Лекция 1. О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

- ***Погрешность задачи***

  неустранимая (безусловная)

- ***Погрешность метода***

  связана со способом решения задачи (относится к устранимой или условной)

- ***Погрешность округлений***

  в вычислительном эксперименте всегда используются числа с определённой точностью

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Значащими называются все цифры в записи числа, кроме нулей перед отличающейся от нуля цифрой.

Примеры:

число 284 - три,

число 0,34 – две,

число 0,005706 – четыре значащие цифры

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Правила округления:

1. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов ***меньше пяти***, то оставшиеся цифры не изменяются.

Например, 0,51328≈ 0,5; 0,51328≈ 0,51; 0,51328≈ 0,513.

2. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов ***больше или равно пяти***, причем все последующие цифры больше нуля, то цифра младшего из сохраняемых разрядов увеличивается на единицу.

Например, 0,57862≈0,6; 0,57862≈0,58; 0,57862≈0,579;
0,58652≈0,6 ; 0,58652≈0,587.

3. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов ***равна пяти, и хотя бы две из последующих за ней цифры равны нулю или неизвестны***, то цифра младшего из сохраняемых разрядов не изменяется, если она ***чётная***, и увеличивается на единицу, если она ***нечётная***.

Например, **0,285004≈0,28; 0,355002≈0,36**.

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

- ***Погрешность метода подчиняют погрешности задачи***
- ***Погрешность округлений должна подчиняться погрешности метода***
- ***Вычислять следует с числом значащих цифр, на единицу превышающих их число в исходных данных, с тем, чтобы относительная погрешность результата вычислений была бы на порядок (в 10 раз) меньше погрешности исходных данных.***

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Величина $\Delta a = |A - a|$ называется ***абсолютной погрешностью*** приближённого числа a,

Величина $\delta a = \dfrac{\Delta a}{|a|}$ – ***относительная погрешность*** (иногда относительной погрешностью называют $\dfrac{\Delta a}{|A|}$).

Числа Δ_a и δ_a такие, что $\Delta_a \geq \Delta a$ и $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} \geq \delta a$, называются ***оценками*** или ***границами*** абсолютной и относительной погрешностей, соответственно.

К величинам Δ_a и δ_a применяют также термин ***«предельные погрешности»***.

Так как обычно истинные погрешности неизвестны, то там, где не может возникнуть недоразумений, будем иногда называть Δ_a и δ_a просто ***абсолютной и относительной погрешностями***.

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Выполним грубую оценку погрешности результата вычисления значения дифференцируемой функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ приближённых аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, если известны их абсолютные погрешности $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, ..., \Delta_{x_n}$, соответственно, следующим образом. В этом случае точные значения аргументов $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n$ лежат соответственно на отрезках $[x_1 - \Delta_{x_1}, x_1 + \Delta_{x_1}]$, $[x_2 - \Delta_{x_2}, x_2 + \Delta_{x_2}]$, … , $[x_n - \Delta_{x_n}, x_n + \Delta_{x_n}]$, а точная абсолютная погрешность результата $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ есть

$$\Delta u = \left| f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, ..., \tilde{x}_n) - f(x_1, x_2, ..., x_n) \right|$$

– модуль полного приращения функции. Главной, т.е. линейной частью этого приращения является полный дифференциал du. Таким образом, имеем

$$\Delta u \approx |du| = \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot |\tilde{x}_i - x_i| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i},$$

Формулы приближённой оценки погрешностей

за границу абсолютной погрешности результата приближённо может быть принята величина

$$\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i} \ . \qquad (1)$$

Отсюда получается формула приближённой оценки относительной погрешности значения u:

$$\delta_u = \frac{\Delta_u}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \cdot \frac{\Delta_{x_i}}{|u|} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{u \partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \ln u}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta_{x_i} \ . \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) следуют правила оценивания погрешностей результатов арифметических действий.

Правила оценивания погрешностей

Если $u = \pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$, тогда $\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 1\right|$ и $\Delta_u = \sum_{i=1}^{n} \Delta_{x_i}$, т.е. при сложении и вычитании приближённых чисел их предельные абсолютные погрешности складываются.

В случае, когда $u = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$, где можно считать все сомножители положительными, $\ln u = \ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n$ и $\dfrac{\partial(\ln u)}{\partial x_i} = \dfrac{1}{x_i}$, то, согласно (2),

$$\delta_u = \sum_{i-1}^{n} \frac{1}{x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} . \qquad (3)$$

Если же $u = \dfrac{x_1}{x_2}$, где $x_1, x_2 > 0$, то $\ln u = \ln x_1 - \ln x_2$, $\dfrac{\partial \ln u}{\partial x_i} = \dfrac{1}{x_i}$ и, значит,

$$\delta_u = \frac{\Delta_{x_1}}{x_1} + \frac{\Delta_{x_2}}{x_2} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2} .$$

Это соотношение вместе с (3) означает сложение предельных относительных погрешностей при умножении и делении приближённых чисел.

О ПОГРЕШНОСТИ ПРИБЛИЖЁННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

$$u = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n; \quad \Rightarrow \quad \delta_u = \sum_{i-1}^{n} \frac{1}{x_i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i}; \quad u = \frac{x_1}{x_2}; \quad \Rightarrow \quad \delta_u = \frac{\Delta_{x_1}}{x_1} + \frac{\Delta_{x_2}}{x_2} = \delta_{x_1} + \delta_{x_2}$$

$$\delta_{x_1+x_2+\ldots+x_n} = \frac{\Delta\left(x_1+x_2+\ldots+x_n\right)}{x_1+x_2+\ldots+x_n} \le \frac{\Delta_{x_1+x_2+,,,+x_n}}{x_1+x_2+\ldots+x_n} = \frac{\Delta_{x_1}+\Delta_{x_2}+\ldots+\Delta_{x_n}}{x_1+x_2+\ldots+x_n} =$$

$$= \frac{x_1\delta_{x_1}+x_2\delta_{x_2}+\ldots+\delta_{x_n}}{x_1+x_2+\ldots+x_n} \le \frac{x_1\delta^*+x_2\delta^*+\ldots+x_n\delta^*}{x_1+x_2+\ldots+x_n} = \delta^*, \qquad \delta^* = \max \delta_{x_i}$$

$$\delta_{x_1-x_2} = \frac{\Delta_{x_1-x_2}}{\left|x_1-x_2\right|} = \frac{\Delta_{x_1}+\Delta_{x_2}}{\left|x_1-x_2\right|}; \qquad \left(x_1-x_2\right) \to 0 \Rightarrow \delta_{x_1-x_2} \uparrow$$

обратная задача теории погрешностей $\Delta x_i = f\left(\Delta u\right) \quad \vee \quad \delta x_i = f_1\left(\delta u\right)$

$$y = f\left(x\right) \Rightarrow \Delta y \approx \left|dy\right| = \left|f'\left(x\right)\right|\Delta x \to \Delta x \approx \frac{\Delta y}{\left|f'\left(x\right)\right|}$$

1) *принцип равных влияний*

$$\Delta_u = n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\Delta_{x_i} \Rightarrow \Delta_{x_i} = \frac{\Delta_u}{n\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|}$$

2) *равенство относительных погрешностей всех аргументов*

$$\delta_{x_i} = \frac{\Delta_{x_i}}{\left|x_i\right|} = p \to \Delta_{x_i} = p\left|x_i\right| \Rightarrow \Delta_u = p\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i\right|$$

Статистический и технический подходы к учёту погрешности действий

$n > 10$ все слагаемые округлены до *m*-го десятичного разряда

правило Чеботарёва $\Delta S \approx \sqrt{3n} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-m}$

Пример: $x \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad \Delta_{x_i} = 0{,}5x^{-m} \Rightarrow \Delta_x \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Delta_{x_i} = \frac{1}{n}\cdot n \cdot 0{,}5\cdot 10^{-m} = 0{,}5\cdot 10^{-m} = \Delta_{x_i};$

$$\Delta_{x_i} \approx \frac{1}{n}\sqrt{3n}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-m} = \sqrt{\frac{3}{n}}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-m} = \sqrt{\frac{3}{n}}\cdot \Delta_{x_i}\Big|_{n\to\infty} \to 0$$

Принцип А.Н.Крылова:
приближённое число должно записываться так, чтобы в нём все значащие цифры, кроме последней были верны и лишь последняя была бы сомнительна, и притом в среднем не более чем на одну единицу

ПРЯМЫЕ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad \vee \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \left\| a_{i,j} \right\|, \quad \mathbf{b} = \left(b_1, b_2, \ldots, b_n\right)^T, \quad \mathbf{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T$$

формула Крамера

$$x_i = \frac{\det \mathbf{A}_i}{\det \mathbf{A}}, \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}\right); \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Метод Гаусса

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}, \end{aligned} \quad a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j}; \quad b_i^{(1)} = b_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}}b_1, \quad i, j = 2, 3, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)}. \end{cases} \qquad a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}a_{kj}^{(k-1)}, \; b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}b_k^{(k-1)}$$

Метод Гаусса

обратный ход метода Гаусса

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}};$$

. . . .

$$x_2 = \frac{b_2^{(1)} - a_{23}^{(1)} x_3 - \ldots - a_{2n}^{(1)} x_n}{a_{22}^{(1)}}; \qquad \vee \qquad x_k = \frac{1}{a_{kk}^{(k-1)}} \left(b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj}^{(k-1)} x_j \right)$$

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12} x_2 - \ldots - a_{1n} x_n}{a_{11}} \quad .$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} a \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)}$$

определитель матрицы равен произведению всех так называемых ведущих элементов при её преобразовании методом Гаусса.

Итерационные методы

Метод простых итераций

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Bx}^{(k)} + \mathbf{c}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T$$ ***метод простой итерации***

Необходимое и достаточное условие сходимости $\left|\lambda\right| < 1$

$$det\left(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{E}\right) = 0, \quad \mathbf{E} \equiv \begin{cases} e_{ii} = 1, \left(i = 1,2,\ldots,n\right) \\ e_{ii} = 0, \left(i \neq j, i,j = 1,2,\ldots,n\right) \end{cases}$$

Итерационные методы

Метод Якоби

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \;\Rightarrow\; \mathbf{A} = \mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{R} \;\Rightarrow \mathbf{Lx} + \mathbf{Dx} + \mathbf{Rx} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{Bx} + \mathbf{c}; \quad \mathbf{B} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R}), \quad \mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(\mathbf{k}+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\mathbf{x}^{(\mathbf{k})} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}, \quad \mathrm{k} = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{D} = \left\| a_{ii} \right\|,$$

Методы решения систем нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (20) \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \ldots\ldots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{cases} \quad (21) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}), \quad \Phi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) \\ \ldots\ldots \\ \varphi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

Метод простых итераций

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \Phi\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots \mathbf{x}^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T$$

Методы решения систем нелинейных уравнений

Метод покоординатных итераций (метод Зейделя)

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}\right), \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n-1}^{(k)}, x_n^{(k)}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n\left(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \ldots, x_{n-1}^{(k+1)}, x_n^{(k)}\right). \end{cases}$$

$$(20) \to (21) \quad -\mathbf{AF}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad +\mathbf{x} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{AF}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{A} - ? \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{AF}(\mathbf{x})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{A}_k\mathbf{F}(\mathbf{x}), \quad k = 0,1,2,\ldots \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}_k\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots \quad (23)$$

Простые итерации $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi_k(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{A}_k\mathbf{F}(\mathbf{x})$

Методы решения систем нелинейных уравнений

Метод Ньютона

$$\mathbf{A}_k = \left[\mathbf{F}'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\right]^{-1}, \quad \mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Явная формула Ньютона

$$\mathbf{A}_k \to (23) \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[\mathbf{F}'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\right]^{-1} \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$$

$$\mathbf{F}'\left(\mathbf{x}^{k}\right)\left(\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad \mathbf{F}'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\mathbf{p}^{(k)} = -\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \quad \mathbf{p}^{(k)} = \left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \ldots, p_n^{(k)}\right)^T$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{p}^{(k)} \quad \mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right) + \mathbf{F}'\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)\left(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}\right) = \mathbf{0}$$

Методы решения систем нелинейных уравнений

модифицированному метода Ньютона

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[\mathbf{F}'\left(\mathbf{x}^{(0)}\right)\right]^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$$

модифицированный метод Ньютона даёт **двухступенчатый процесс**

$$\begin{cases} \mathbf{z}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{A}_k\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \\ \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{A}_k\mathbf{F}\left(\mathbf{z}^{(k)}\right), \end{cases} \quad \mathbf{A_k} \Leftrightarrow \left[\mathbf{J}\left(\mathbf{x}^{(k)},\mathbf{h}^{(k)}\right)\right]^{-1} \quad \mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[\mathbf{J}\left(\mathbf{x}^{(k)},\mathbf{h}^{k}\right)\right]^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right)$$

$$h_j^{(k)} = x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}, \quad j = 1,\ldots,n, \quad k = 1,2,\ldots$$

двухшаговый метод

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left[\mathbf{B}\left(\mathbf{x}^{(k)},\mathbf{x}^{(k-1)}\right)\right]^{-1}\mathbf{F}\left(\mathbf{x}^{(k)}\right), \Rightarrow \mathbf{B}\left(\mathbf{x}^{(k)},\mathbf{h}^{(k-1)}\right) = \left\| \frac{f_i\left(x_1^{(k)},\ldots,x_j^{(k-1)},\ldots,x_n^{(k)}\right) - f_i\left(x_1^{(k)},\ldots,x_j^{(k)},\ldots,x_n^{(k)}\right)}{x_j^{(k-1)} - x_j^{(k)}} \right\|$$

$$\mathbf{x}^{(0)}, \quad \mathbf{x}^{(1)}$$

Интерполяция

Полиномиальная интерполяция. Интерполяционный многочлен Лагранжа

$$[a,b] \Leftrightarrow x_0, x_1, \ldots, x_n \quad a \le x_0 < \ldots < x_n \le b \quad y = f(x) \Leftrightarrow \left.\frac{x}{y}\right|\frac{x_1}{y_1}\left|\frac{x_2}{y_2}\right|\frac{\ldots}{\ldots}\left|\frac{x_n}{y_n}\right|$$

$$x_0, x_1, \ldots, x_n$$

$\varphi(x)$ называется ***интерполирующей*** или ***интерполяционной*** для функции

$y = f(x)$ узлы интерполяции $\varphi(x) = y(x)$

$$P_n(x_i) = y_i \quad \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\}; \quad P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_n x_n^n = y_n. \end{cases}$$

Интерполяция

базисные многочлены Лагранжа

$$\sum_{i=0}^{n} c_i l_i(x), \quad l_i(x), \quad i = 0,1,\dots,n$$

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ åñëè } j \neq i \\ 1, \text{ åñëè } j = i \end{cases} \quad \dots \quad \forall\, j, i \in \{0,1,\dots,n\}$$

$$l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \quad \Leftrightarrow \quad l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \left[(x-x_j)/(x_i-x_j) \right]$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} y_i;$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \left\{ \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \left[(x-x_j)/(x_i-x_j) \right] \right\}$$

Интерполяция

базисные многочлены Лагранжа

$$n=1,\quad l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1},\quad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},\quad \Rightarrow\quad L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

$$n=2,\quad l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)},\quad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},\quad l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

$f(x)\approx L_1(x)$ ***формулами линейной интерполяции***

$f(x)\approx L_2(x)$ ***формулами квадратичной интерполяции***