ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 5

Цель лекции

Ознакомиться с общими теоремами динамики материальной точки и примерами их практического применения.

План лекции

Введение

- **Теорема об изменении импульса точки**
- **Теорема об изменении момента импульса точки**
- **Движение в центральном поле**
- **Теорема об изменении кинетической энергии точки**
- **Работа силы. Потенциальные силы**

Заключение

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

теоремы об изменении …
- **импульса**
- **момента импульса**
- **кинетической энергии**

Зачем нам нужны теоремы для точки?

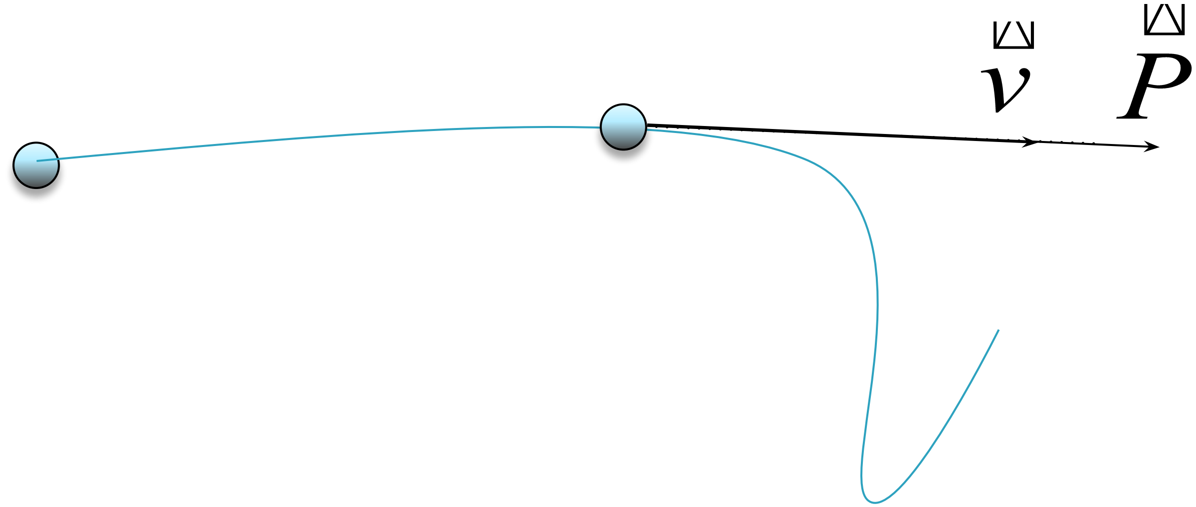
оптимальная методика решения задач

на основе теорем динамики для точки мы построим динамику механической системы

ИМПУЛЬС ТОЧКИ

Импульс (количество движения) точки **- вектор, равный произведению массы точки на вектор ее скорости**

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{v}}$$



ИМПУЛЬС СИЛЫ

Элементарным импульсом силы называется вектор, равный произведению силы на элементарный промежуток времени

$$d\vec{S} = \vec{F}dt$$

Импульсом силы за конечный промежуток времени называется вектор

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F}dt$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИМПУЛЬСА

Производная по времени от импульса материальной точки равна равнодействующей приложенных к точке сил

Изменение импульса материальной точки за некоторый временной интервал равно импульсу равнодействующей приложенных к точке сил на этом интервале

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Запишем дифф. уравнение движения точки

- Учитывая постоянство массы точки и определение ее ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

получим

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \vec{R},$$

или

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}}$$

- Умножив обе части уравнения на элементарный промежуток времени и проинтегрировав, получим

$$\int_{t_н}^{t_к} d\vec{P} = \int_{t_н}^{t_к} \vec{R}dt$$

или

$$\boxed{\vec{P}_к - \vec{P}_н = \int_{t_н}^{t_к} \vec{R}dt}$$

Теорема доказана

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА

- Пусть $$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0.$$

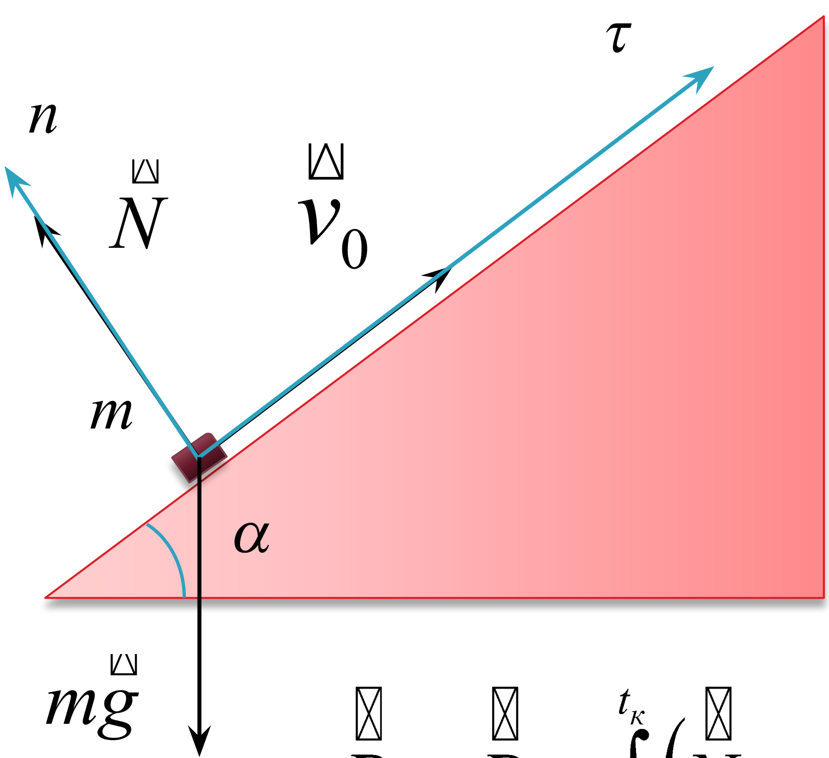
- В этом случае

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = 0\,, \quad \vec{P} = const}$$

Если равнодействующая приложенных к материальной точке сил равна нулю, то импульс точки сохраняется во все время движения

Если проекция на какую-нибудь ось равнодействующей приложенных к точке сил равна нулю, то проекция импульса точки на эту ось сохраняется

ПРИМЕР



Определить время движения точки до остановки

?

$$\vec{P}_к - \vec{P}_н = \sum_i \int_{t_н}^{t_к} \vec{F}_i dt$$

$$\vec{P}_к - \vec{P}_н = \int_{t_н}^{t_к} \left(\vec{N} + m\vec{g}\right) dt$$

$$-P_{н_\tau} = -\int_{t_н}^{t_к} mg\sin\alpha\, dt \qquad mv_0 = mg\sin\alpha\, t_к$$

$$\boxed{t_к = v_0 / g\sin\alpha}$$

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТОЧКИ

Момент импульса (момент количества движения) точки **- вектор, определяемый равенством**

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v}$$

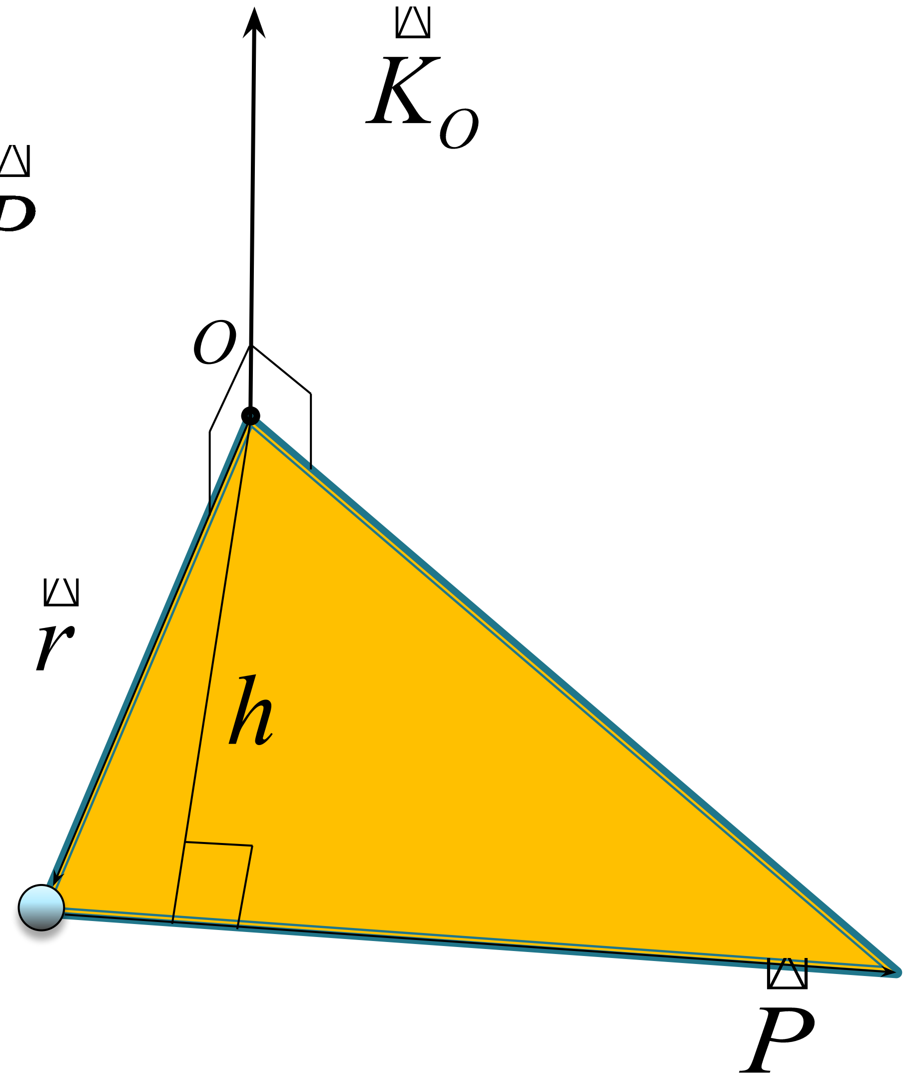
$\vec{r}$ - радиус-вектор точки, проведенный из центра O

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА ТОЧКИ

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$K_O = mvh$$



ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

Производная по времени от момента импульса материальной точки относительно некоторого неподвижного центра равна моменту равнодействующей приложенных к точке сил относительно этого же центра

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

- Запишем теорему об изменении импульса точки

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{R},$$

- Умножим обе части уравнения векторно на радиус-вектор точки

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{M}_O(\vec{R})$$

- Рассмотрим выражение

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) =$$

$$= \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) + \cancel{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}}$$

- Таким образом,

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{R})}$$

- Теорема доказана

ПРОЕКЦИИ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

$$\begin{cases} K_x = m(y\mathrm{v}_z - z\mathrm{v}_y) \\ K_y = m(z\mathrm{v}_x - x\mathrm{v}_z) \\ K_z = m(x\mathrm{v}_y - y\mathrm{v}_x) \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{R})}$$

$$\frac{dK_x}{dt} = M_x(\vec{R}) \qquad \frac{dK_y}{dt} = M_y(\vec{R}) \qquad \frac{dK_z}{dt} = M_z(\vec{R})$$

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА ИМПУЛЬСА

- Пусть $\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_O(\vec{F}_i) = 0.$

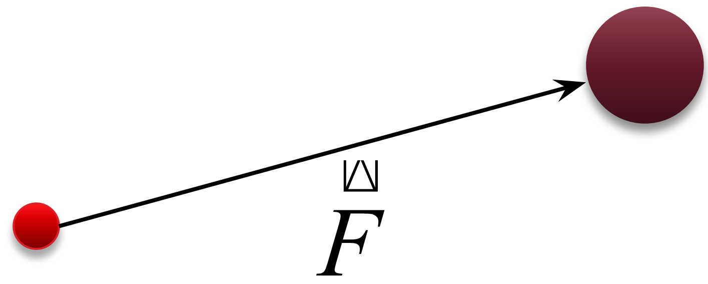
- В этом случае

$$\boxed{\frac{d\vec{K}_O}{dt} = 0\,, \quad \vec{K}_O = const}$$

Если момент равнодействующей приложенных к материальной точке сил относительно какого-либо центра равен нулю, то момент импульса точки сохраняется

$$\sum_{i=1}^{N} M_x(\vec{F}_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dK_x}{dt} = 0\,, \quad K_x = const}$$

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИЛЫ

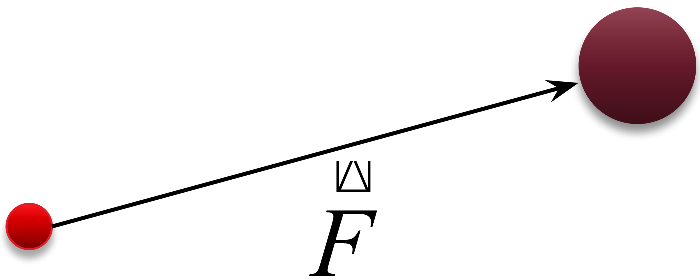


Действующую на материальную точку точку силу называют центральной, если она всегда направлена к некоторому неподвижному центру.

Пример

?

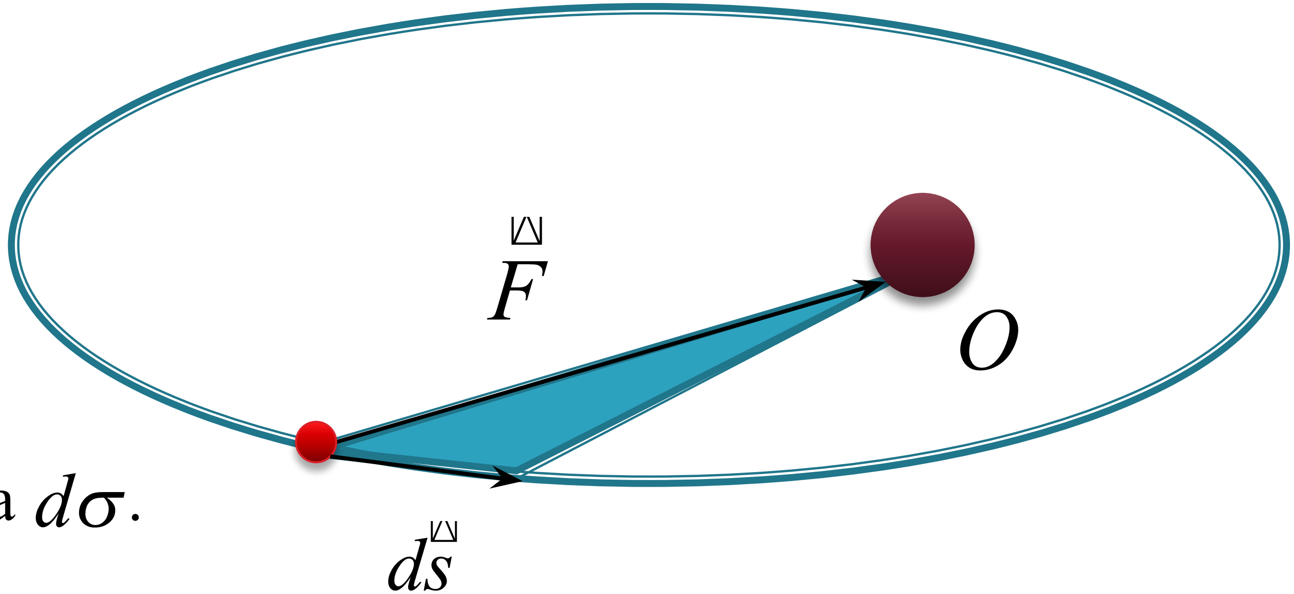
ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ



Как изменяется модуль скорости планеты при движении по эллиптической траектории

?

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ



Определим закон изменения площади сектора $d\sigma$.

$$\frac{d\vec{K}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = 0.$$

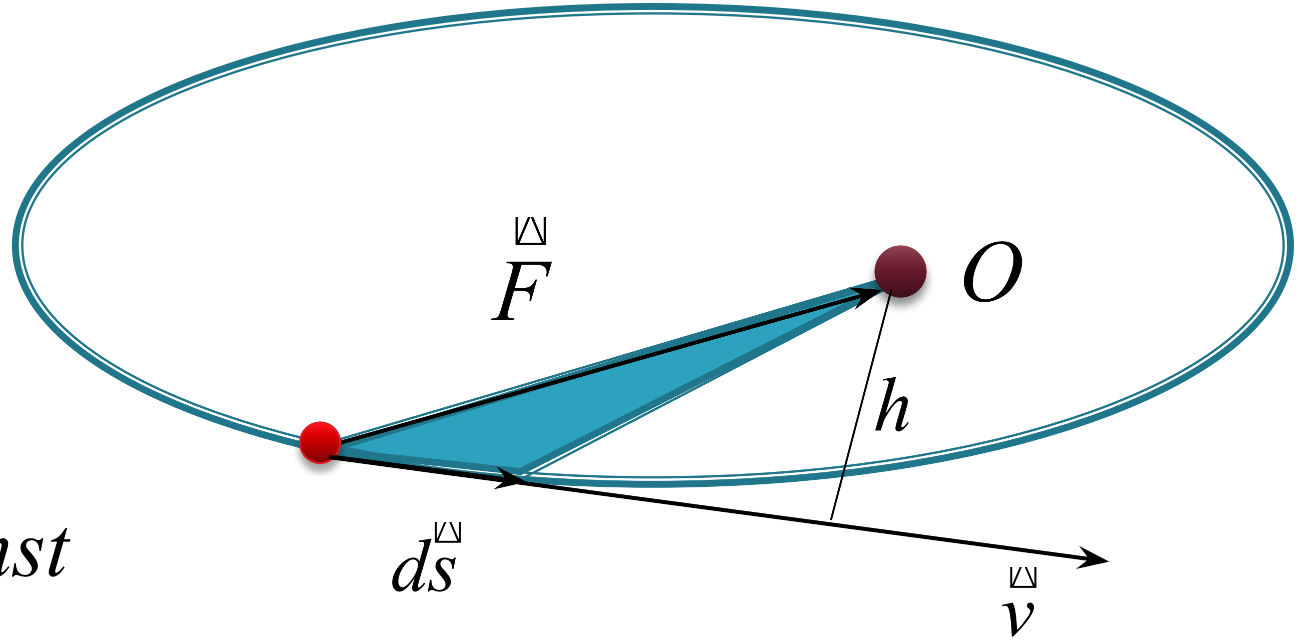
$$\vec{K}_O = const$$

модуль

направление

?

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ



$$K_O = const$$

$$mvh = const$$

$$m\frac{ds}{dt}h = const$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = const}$$

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = const}$$

Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём за равные промежутки времени радиус-вектор, соединяющий Солнце и планету, описывает равные площади

ДВИЖЕНИЕ ПЛАНЕТ

$$\boxed{\frac{d\sigma}{dt} = const}$$

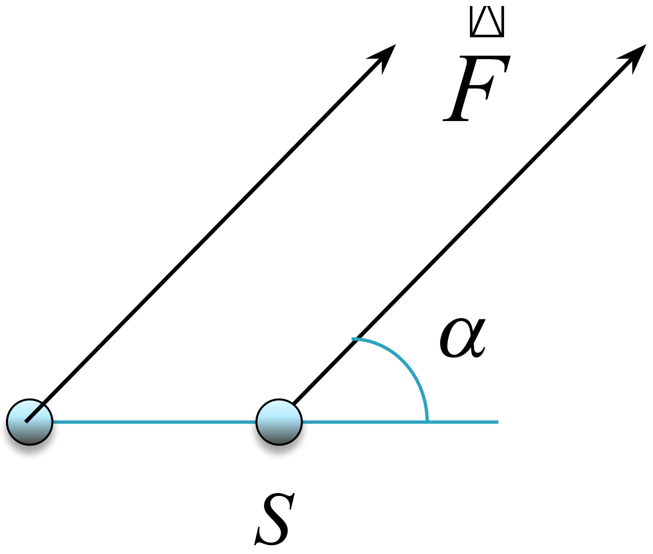
Иоганн Кеплер (1571 - 1630)

КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТОЧКИ-

скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости

$$\boxed{T = m\mathrm{v}^2 / 2}$$

РАБОТА СИЛЫ

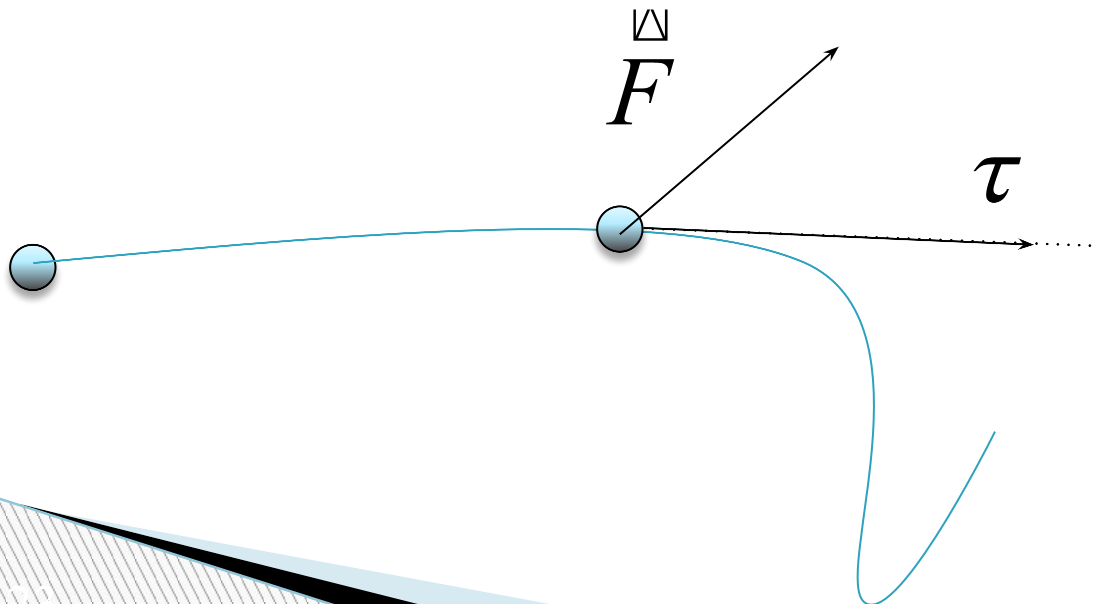


$$F = const$$

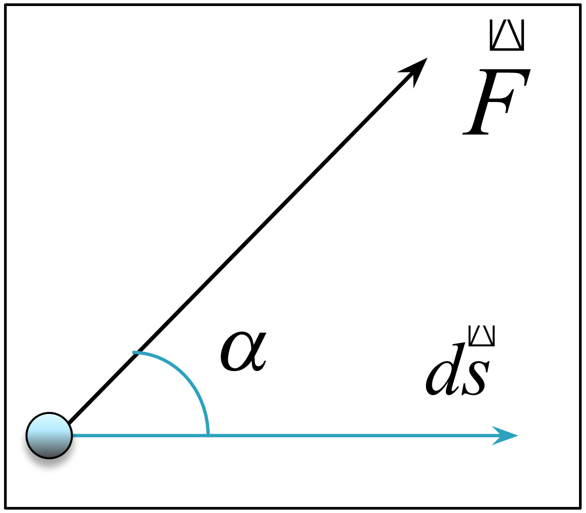
$$\alpha = const$$

траектория точки –
прямая

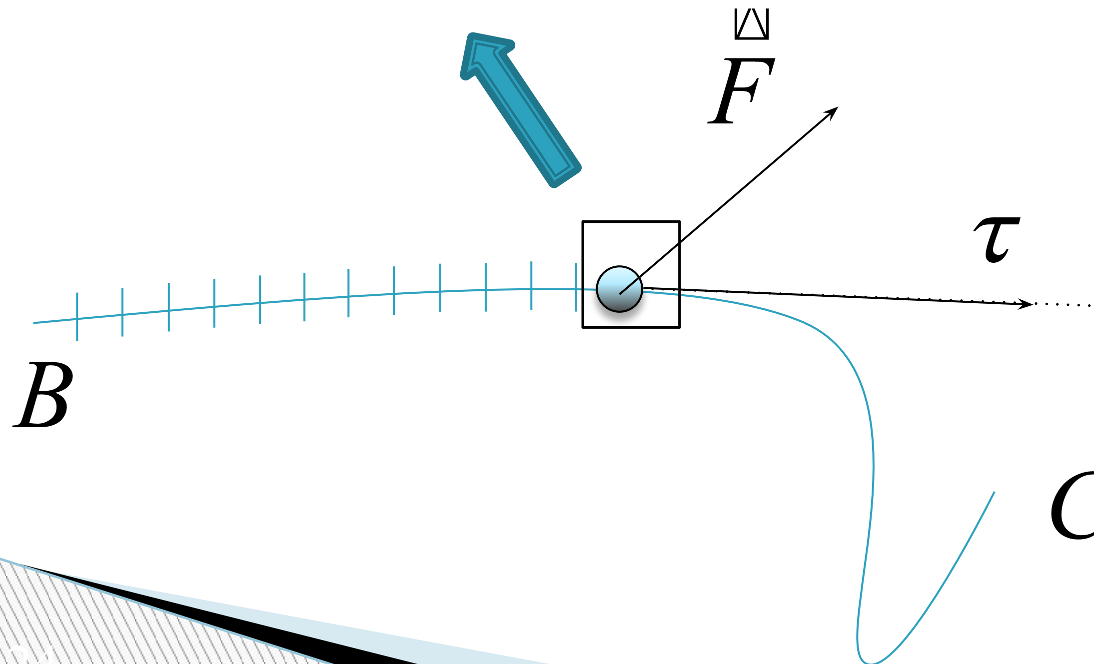
$$A = \vec{F} \cdot \vec{s}$$



РАБОТА СИЛЫ



$$\delta A = \vec{F}(s) \cdot d\vec{s} = F(s)\, ds\, \cos\alpha$$



$$A_{BC} = \int_{BC} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

РАБОТА СИЛЫ

Элементарная работа силы **–**

– величина, равная скалярному произведению вектора силы на вектор элементарного перемещения

$$\delta A = \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

Работа силы на конечном перемещении **–**

– интеграл от элементарной работы, взятый вдоль этого перемещения

$$A_{BC} = \int_{BC} \vec{F}(s) \cdot d\vec{s}$$

ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЭНЕРГИИ

Изменение кинетической энергии точки на некотором перемещении равно сумме работ всех действующих на нее сил на этом же перемещении

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

Запишем дифф. уравнение движения точки $$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Спроектируем его на тангенциальную ось $$ma_\tau = \sum_i F_{i\tau}.$$

Представим тангенциальное ускорение в виде $$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = v\frac{dv}{ds},$$

и учтем, что проекция силы $$F_{i\tau} = F_i \cos\alpha.$$

$$mv\frac{dv}{ds} = \sum_i F_i \cos\alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

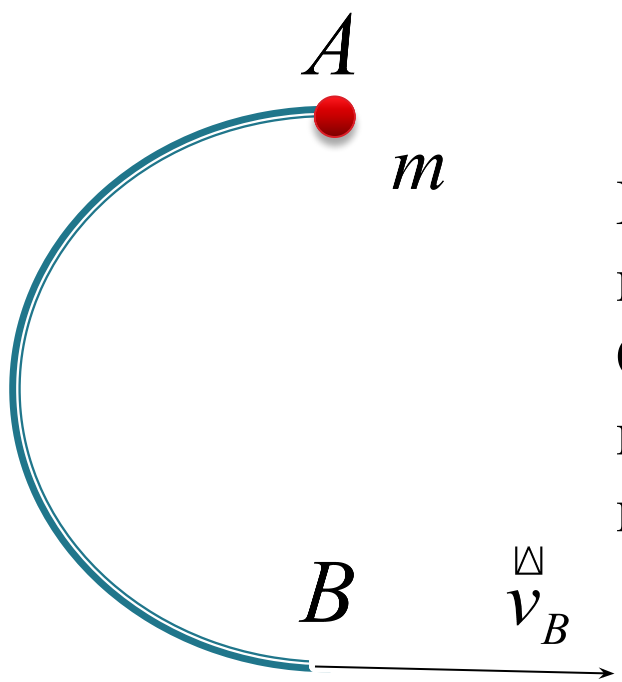
Умножим обе части уравнения на элементарное перемещение и проинтегрировав, получим

$$mvdv = \sum_i F_i \cos\alpha \, ds, \qquad \int_{BC} mvdv = \sum_i \int_{BC} F_i \cos\alpha \, ds,$$

$$\boxed{\frac{mv_C^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = \sum_i \int_{BC} F_i \cos\alpha \, ds,}$$

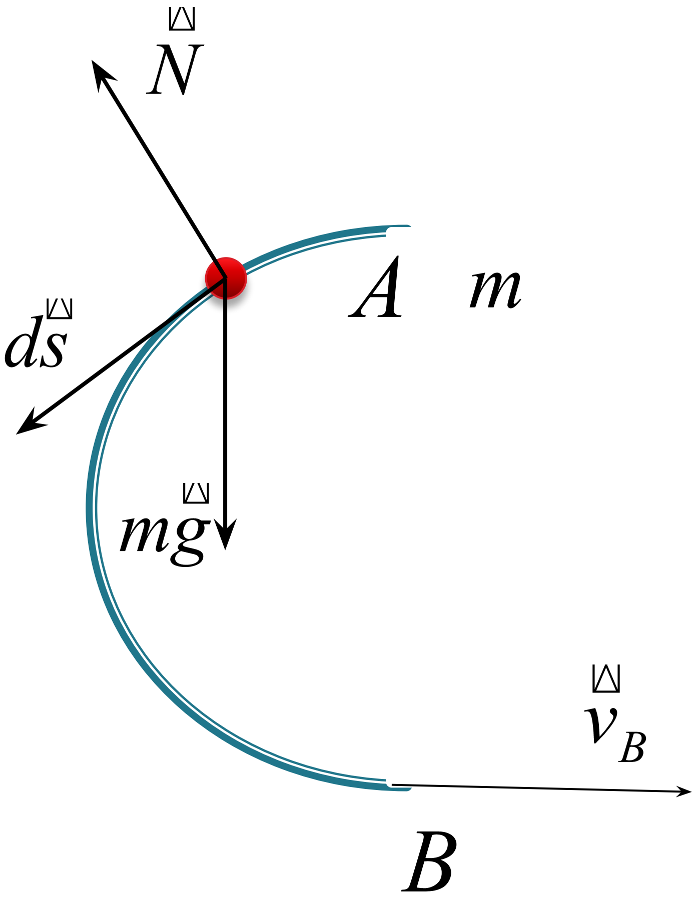
Теорема доказана

ПРИМЕР



Бусинка двигается по проволоке, изогнутой в форме полуокружности. Определить ее скорость в точке B, если в начальный момент она находилась в покое. Трением пренебречь.

ПРИМЕР



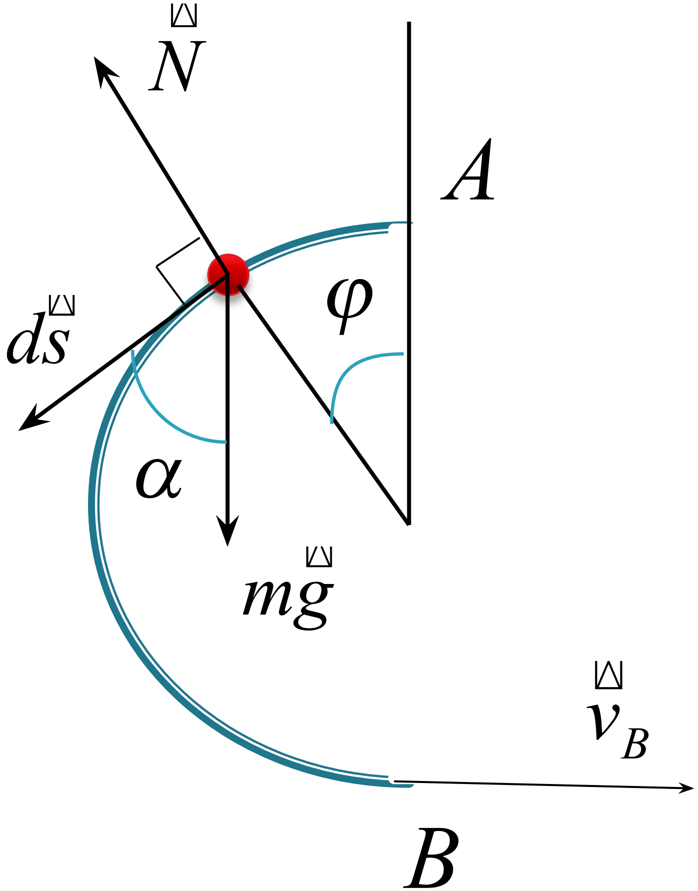
$$\vec{v}_B - ?$$

$$f = 0$$

$$v_A = 0$$

- Будем считать бусинку материальной точкой
- Изобразим силы, действующие на нее в некоторый момент времени …
- … и элементарное перемещение

ПРИМЕР



- Запишем теорему об изменении кинетической энергии

$$\frac{mv_B^2}{2} - \cancel{\frac{mv_A^2}{2}} = A(\vec{N}) + A(m\vec{g})$$

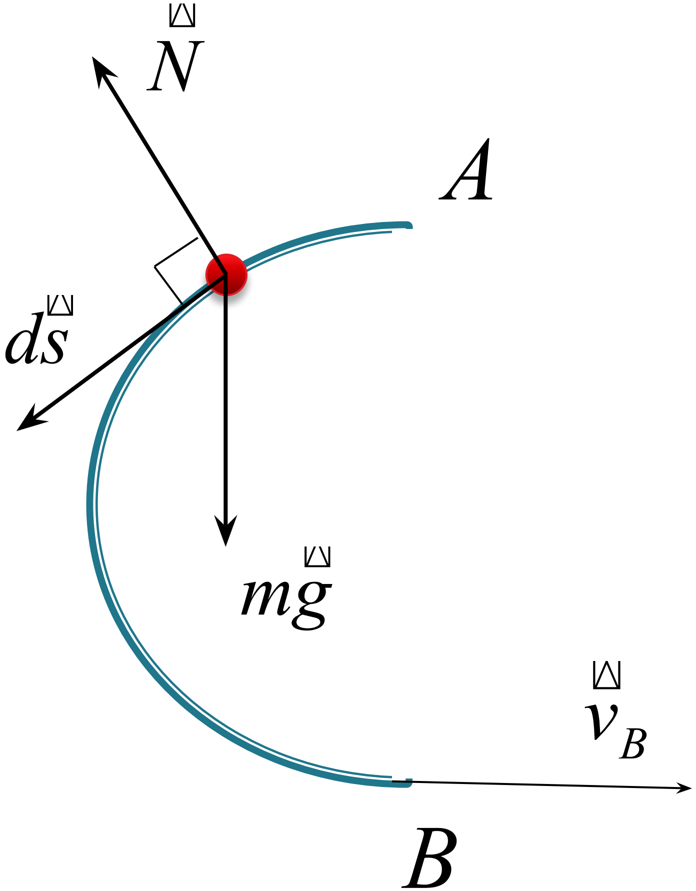
$$A(\vec{N}) = \int\limits_{AB} N\cos(\pi/2)\,ds = 0$$

$$A(m\vec{g}) = \int\limits_{AB} mg\cos(\alpha)\,ds$$

$$ds = R\,d\varphi$$

$$A(m\vec{g}) = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} mg\sin(\varphi)\,R\,d\varphi \quad = 2mgR\cos(0) = 2mgR$$

ПРИМЕР



Согласно теореме

$$\frac{mv_B^2}{2} = 2mgR$$

$$\boxed{v_B = \sqrt{4gR}}$$

Замечание

$$A(m\vec{g}) = 2mgR$$

Можно ли получить этот результат более простым способом?

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛЫ

Градиентом **называется вектор с компонентами**

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x \\ \partial / \partial y \\ \partial / \partial z \end{bmatrix}$$

Сила называется *потенциальной (консервативной)*, если ее можно представить в виде градиента некоторой скалярной функции, называемой *потенциалом*

$$\vec{F} = \vec{\nabla} \varphi$$

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛЫ

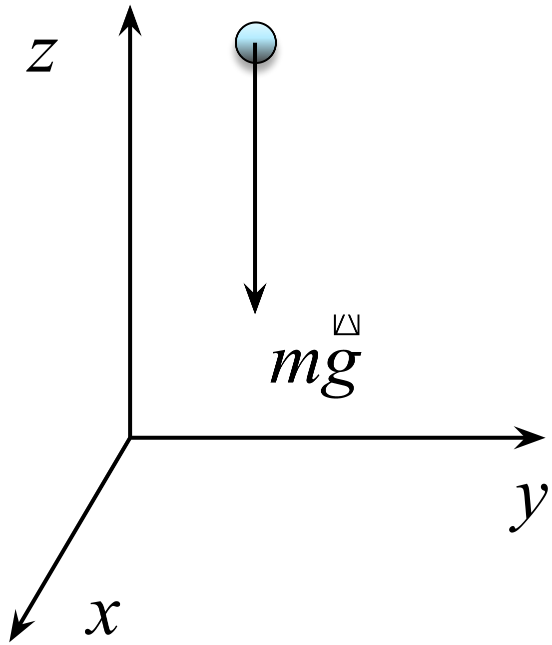
Работа потенциальной силы не зависит от формы траектории точки и закона ее движения и определяется только начальным и конечным положением точки

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$A(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{s} = \int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$$

$$A(\vec{F}) = \int_A^B \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ СИЛЫ. ПРИМЕР



Попробуем построить потенциал для силы тяжести

$$\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{F} = -mg\vec{k}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -mg.$$

$$\boxed{\varphi = -mgz}$$

ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ

Замечание

Потенциал определяется с точностью до некоторой не зависящей от координат постоянной $\vec{\nabla}\varphi = \vec{\nabla}(\varphi + C)$

Потенциальной энергией точки, находящейся под действием консервативной силы, называется величина $\boxed{\Pi = -\varphi}$

Пусть $\vec{F} = \vec{\nabla}\varphi$

$$A(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \varphi_B - \varphi_A = \Pi_A - \Pi_B = -\Delta\Pi$$

$$\boxed{A(\vec{F}) = -\Delta\Pi}$$

ПОЛНАЯ МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Запишем теорему об изменении кинетической энергии для точки, находящейся под действием потенциальной силы

$$T_к - T_н = A(\vec{F}) = -(П_к - П_н)$$

$$\boxed{T_к + П_к = П_н + T_н}$$

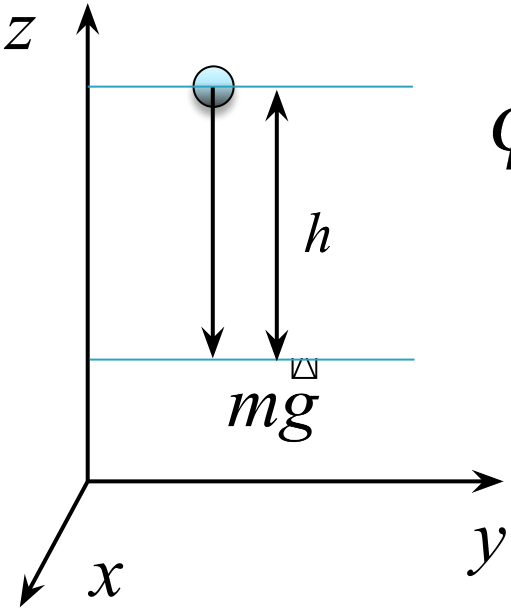
Для точки, находящейся под действием потенциальной силы, можно ввести *полную механическую энергию* как сумму ее потенциальной и кинетической энергий.

При движении точки она сохраняется.

Если на точку действует несколько потенциальных сил

$$\boxed{П = -\sum \varphi_i}$$

РАБОТА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ СИЛ



$$\varphi = -mgz + C$$

$$\Pi = mgz + C$$

$$A(m\vec{g}) = -\Delta\Pi =$$

$$= mgz_н - mgz_к = mg\left(z_н - z_к\right)$$

$$\boxed{A(m\vec{g}) = \pm mgh}$$

$$\boxed{A(\vec{F}_{упр}) = \frac{k}{2}\left(\Delta l_н^2 - \Delta l_к^2\right)}$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Какие из уравнений динамики точки записываются в виде векторных уравнений, а какие – скалярных?
2. Что такое импульс материальной точки?
3. Как определяется импульс силы за конечный промежуток времени?
4. При каких условиях количество движения системы не изменяется?
5. Как определяется и момент количества движения точки?
6. Чему равна проекция момента количества движения точки относительно центра на ось?

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

7. Как происходит движение материальной точки под действием центральной силы? Как формулируется закон Кеплера?
8. Как определяется работа постоянной силы на прямолинейном перемещении точки, к которой она приложена? А если сила переменная и точка перемещается по кривой?
9. Что понимают под элементарной работой силы и как она связана с работой силы на конечном перемещении точки, к которой она приложена? Когда элементарная работа равна нулю?

ТЕМА СЛЕДУЮЩЕЙ ЛЕКЦИИ

Динамика механической системы