МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

a.s.grishchenko@gmail.com
andrew.tgn@gmail.com

Практические занятия

Введение

- ЛПР выбирает ту или иную альтернативу из множества возможных альтернатив. Критерий (или целевая функция) – это числовая функция, значения которой предписывают уровень предпочтительности решений.
- Наличие нескольких критериев делает задачу принятия решений (ЗПР) ***многокритериальной***.
- У ЛПР есть несколько вариантов выбора, несколько альтернатив $a \in \boldsymbol{A}$, где $\boldsymbol{A}$ – множество всевозможных альтернатив, включающее не менее двух элементов. Пусть $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – множество альтернатив, n - число альтернатив.

Введение

- Критерий k – функция от альтернативы a: $k(a)$
- Иногда удобно рассматривать несколько критериев в виде одного векторного критерия или векторной оценки:
- $K(a) = (k_1(a), k_2(a), \ldots k_m(a))$, где m - число частных критериев $k_i(a)$
- Задача МКПР определяется множеством допустимых решений, векторным критерием и отношением предпочтений на множестве допустимых решений. Цель решения задачи – поиск оптимальной в некотором смысле альтернативы или группы альтернатив с учетом отношений предпочтения на основе векторного критерия, который определяется ЛПР.

Оптимальность по Парето

- Альтернатива a_i является ***доминирующей*** по отношению к альтернативе a_k ,если по всем критериям оценки альтернативы a_i не хуже, чем альтернативы a_k, а хотя бы по одному критерию оценка a_i лучше. Говорят, что решение a_i лучше (предпочтительнее решения a_k). При этом оценка a_k называется ***доминируемой***.
- Альтернатива a_i, для которой не существует другой альтернативы a_k, лучшей по всем критериям одновременно, т.е. каждая из них превосходит любую другую по какому-либо из критериев, называется *недоминируемой*, или ***оптимальной по Парето***. Множество всех таких альтернатив называется *множеством Парето*.

Оптимальность по Парето

- **1.** *Указание верхних границ критериев.* Дополнительная информация об оптимальном исходе $a^* \in D$ в этом случае имеет вид

$$k_i(a_{opt}) \le C_i, i = \overline{1,m}.$$

- Число C_i рассматривается здесь как верхняя граница по *i* – му критерию.
- Указание верхних границ по критериям не может быть "извлечено" из математической модели задачи принятия решения; набор ограничений (C_1, C_2, , C_m) представляет собой дополнительную информацию, полученную от ЛПР.

Оптимальность по Парето

- 2. *Метод главного критерия*. Критерии располагаются в порядке убывания важности:

$$k_1 \to \boldsymbol{max}$$

$$\left.\begin{matrix} k_2 \le C_2 \\ k_3 \ge C_3 \\ \vdots \\ k_k \le C_k \end{matrix}\right\}$$

объявляется собственным критерием, а остальные становятся управляемыми переменными:

Оптимальность по Парето

- 3. *Метод уступок*. Располагаем критерии в порядке убывания важности: ….k_1, k_2… Считаем критерий k_1 , а остальные отбрасываем и вычисляем k_{1max} . Назначается уступка на критерий, $k_1 - \Delta k_1$ которую мы готовы отдать в пользу других критериев. Далее проделываем то же самое для всех остальных критериев.

$$k_2 \to max$$

$$k_{1max} - \Delta k_1 < k_1 < k_{1max}$$

далее:

$$k_3 \to max$$

$$k_{1max} - \Delta k_1 < k_1 < k_{1max}$$

$$k_{2max} - \Delta k_2 < k_2 \le k_{2max}$$

и т. д.

Пример 1

Определить альтернативы оптимальные по Парето

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	$g^{(1)}$	$g^{(2)}$	$g^{(3)}$	$g^{(4)}$
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Пример 1 Методы сужения множества Парето

- Выделение одного главного критерия (субоптимизация)

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	k1	k2	k3	k4
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Пример 1

- Задача многокритериальной оптимизации будет преобразована к виду:

$$k_1(\vec{x}) \to \min$$

при ограничениях $k_2(\vec{x}) \le 35$, $k_3(\vec{x}) \le 150$, $k_4(\bar{x}) \le 30$

$\vec{x}$ є {A, B, C, F, G}.

Пример 1. Методы сужения множества Парето

- Выделение одного главного критерия (субоптимизация)

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	k1	k2	k3	k4
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
F	43	32	147	27

Пример 1. Метод уступок

Критерии уже упорядочены в порядке убывания их важности для ЛПР

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	k1	k2	k3	k4
A	45	27	159	29
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
E	45	35	146	26
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Пример 1. Метод уступок

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	k1	k2	k3	k4
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
F	43	32	147	27
G	42	36	122	25

Пример 1. Метод уступок

Альтернативные решения	Значения частных критериев			
	k1	k2	k3	k4
B	40	34	148	28
C	42	35	126	24
D	41	34	170	28
F	43	32	147	27

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ

a.s.grishchenko@gmail.com
andrew.tgn@gmail.com

Практические занятия

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

- Метод линейной свертки заключается в том, что обобщённый критерий для альтернативы *a* формируется в следующем виде:

$$K_0(a) = \sum_{i=1}^{m} w_i k_i(a)$$

- Здесь $w_i \geq 0$ являются весовыми коэффициентами, которые задают предпочтение *i* - го критерия по сравнению с другими критериями. Величина w_i определяет важность *i* - го частного критерия. При этом более важному критерию приписывается больший вес, а общая важность всех критериев принимается равной 1, т.е. $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$.

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

- В случае максимизации критериев (чем больше показатель, тем лучше) из каждого элемента столбца матрицы вычитают минимальный элемент этого столбца и результат делится на разность между максимальным и минимальным элементами этого столбца:

$$k_i^{н}(a) = \frac{k_i(a) - \min k_i(a)}{\max k_i(a) - \min k_i(a)}$$

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

- В случае минимизации критериев (чем меньше показатель, тем лучше) из максимального элемента столбца вычитают каждый элемент этого столбца и результат делится на разность между максимальным и минимальным элементами этого столбца

$$k_i^{H}(a) = \frac{\max k_i(a) - k_i(a)}{\max k_i(a) - \min k_i(a)}$$

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

- Определить парето-оптимальные варианты системы, которая состоит из блоков А и В

$\{K_j\}$	Единица измерения	Направление экстремума	Блок А						Блок В				
			A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
K_1 — масса	кг	min	6	7	5	17	14	15	10	6	6	15	17
K_2 — стоимость	рубли	min	800	600	500	300	200	250	500	400	300	200	300

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

- Значения оптимальных вариантов отдельно по блокам

Варианты	$К_1$	$К_2$
$А_3$ $В_3$	11	800
$А_3$ $В_{4.}$	20	700
$А_5$ $В_3$	20	500
$А_5$ $В_{4.}$	29	400

- Рассчитаем значения нормализованных критериев…

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

- Значения нормализованных критериев

Варианты	$K_1^н$	$K_2^н$
$A_3\_B_3$	1	0
$A_5\_B_3$	0,5	0,75
$A_5\_B_4$.	0	1

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

- Допустим, что стоимость (К2) имеет вес 2, а масса (К1) – 1. Тогда вес критерия К1 $w_1=1/3$, вес критерия К2 $w_2=2/3$.
- Оценим альтернативы …

Метод замены векторного критерия скалярным критерием (линейная свертка)

Линейная свертка

- $A_3\ B_3$: 1 * 1/3 + 0 * 2/3 = 1/3
- $A_5\ B_3$: 0,5 * 1/3 + 0,75 * 2/3 = 2/3
- $A_5\ B_4$: 0 * 1/3 + 1 * 2/3 = 2/3

Следовательно оптимальный вариант $\mathbf{A_3\ B_3}$ – модуль A_3 имеет вес 5 кг и стоимость 500 руб, модуль B_3 – соответственно 6 кг и 300 руб; ***общий вес - 11 кг, стоимость – 800 руб.***