Тема. Методы выбора и принятия решений

1. **Классификация задач выбора.**
2. **Критериальный язык описания выбора.**

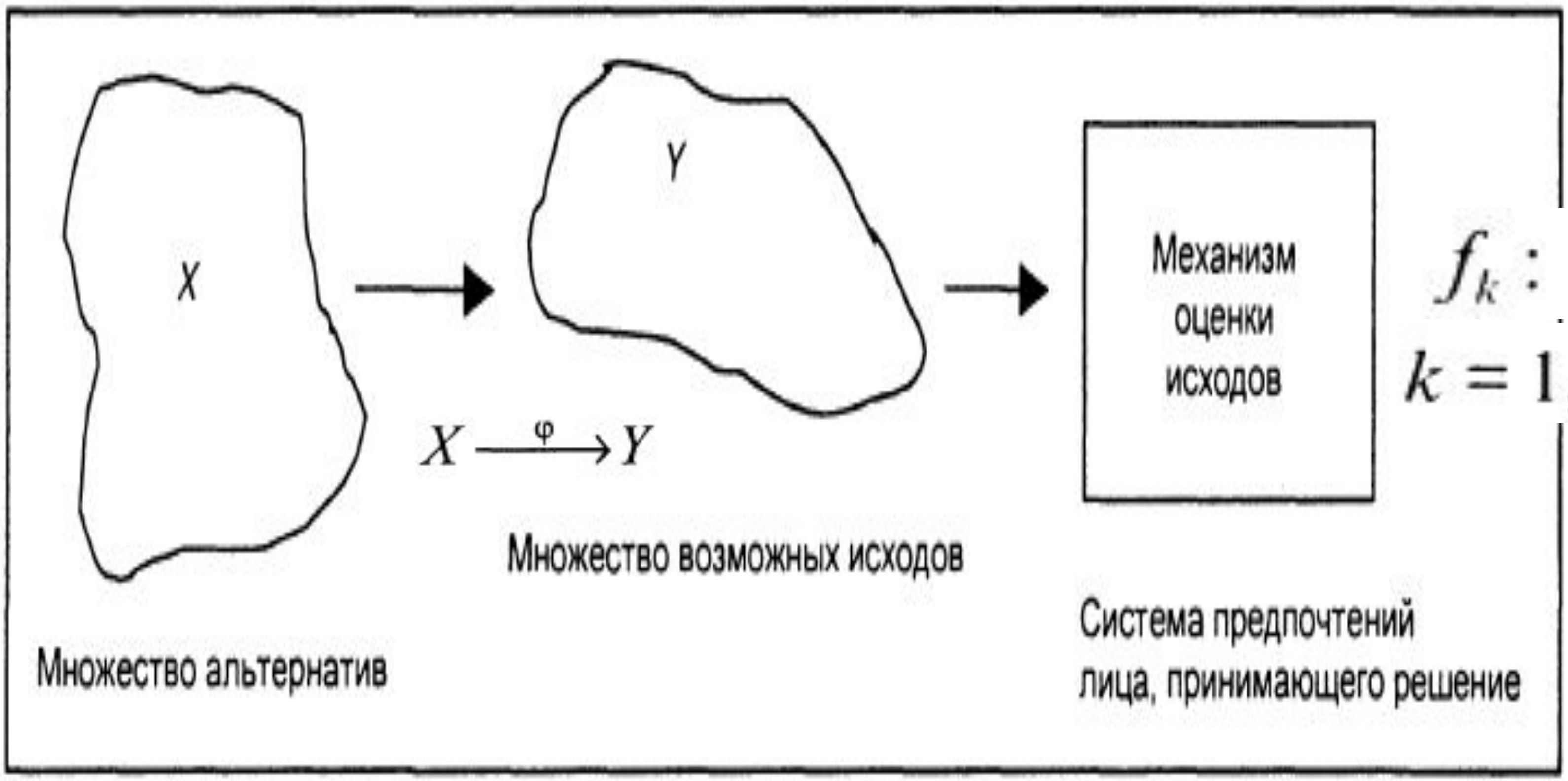
   Сведение многокритериальной задачи к однокритериальной. Условная максимиза-ция. Нахождение паретовского множества.
3. **Описание выбора на языке бинарных отношений.**

   Способы задания бинарных отношений. Отношения эквивалентности, порядка и доминирования. Функция полезности

Тема. Методы выбора и принятия решений

4. **Выбор в условиях статистической неопределенности.**
   Общая схема принятия статистических решений. Понятие о байесовом подходе.
5. **Выбор в условиях неопределенности. Платежная матрица. Максиминный критерий. Критерии Сэвиджа, Гурвица.**
6. **Выбор на нечетком множестве альтернатив.**

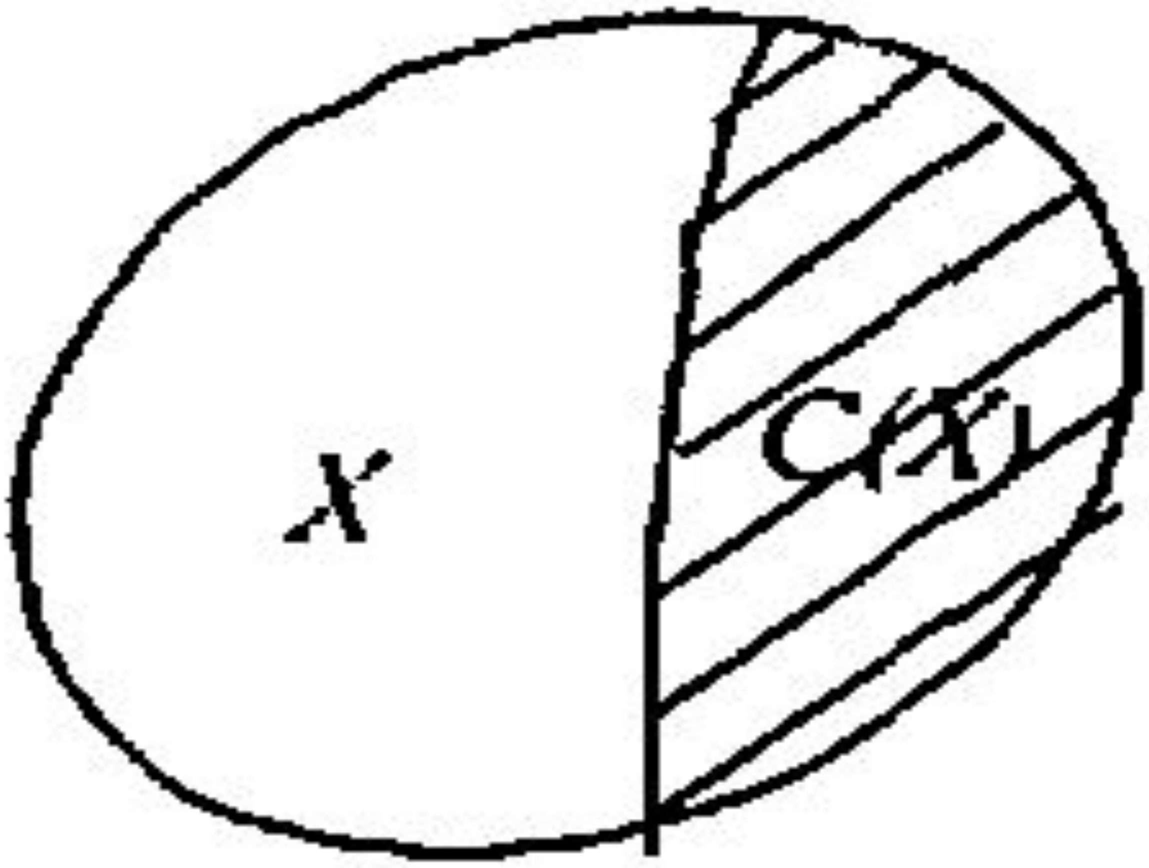
Основные задачи выбора



$f_k : Y \rightarrow R,$

$k = 1, 2, \ldots, m$

Выбор как сужение множества альтернатив



Основные задачи выбора

Один критерий	Много критериев	
z	Z	Определенность
$\tilde{z}$	$\tilde{Z}$	Неопределенность

$$z = f(y),\ f : Y \to R;\quad Z = f(y),\ f = (f_1, \ldots, f_m),$$

$$f_k : Y \to R,\ k = 1, 2, \ldots, m.$$

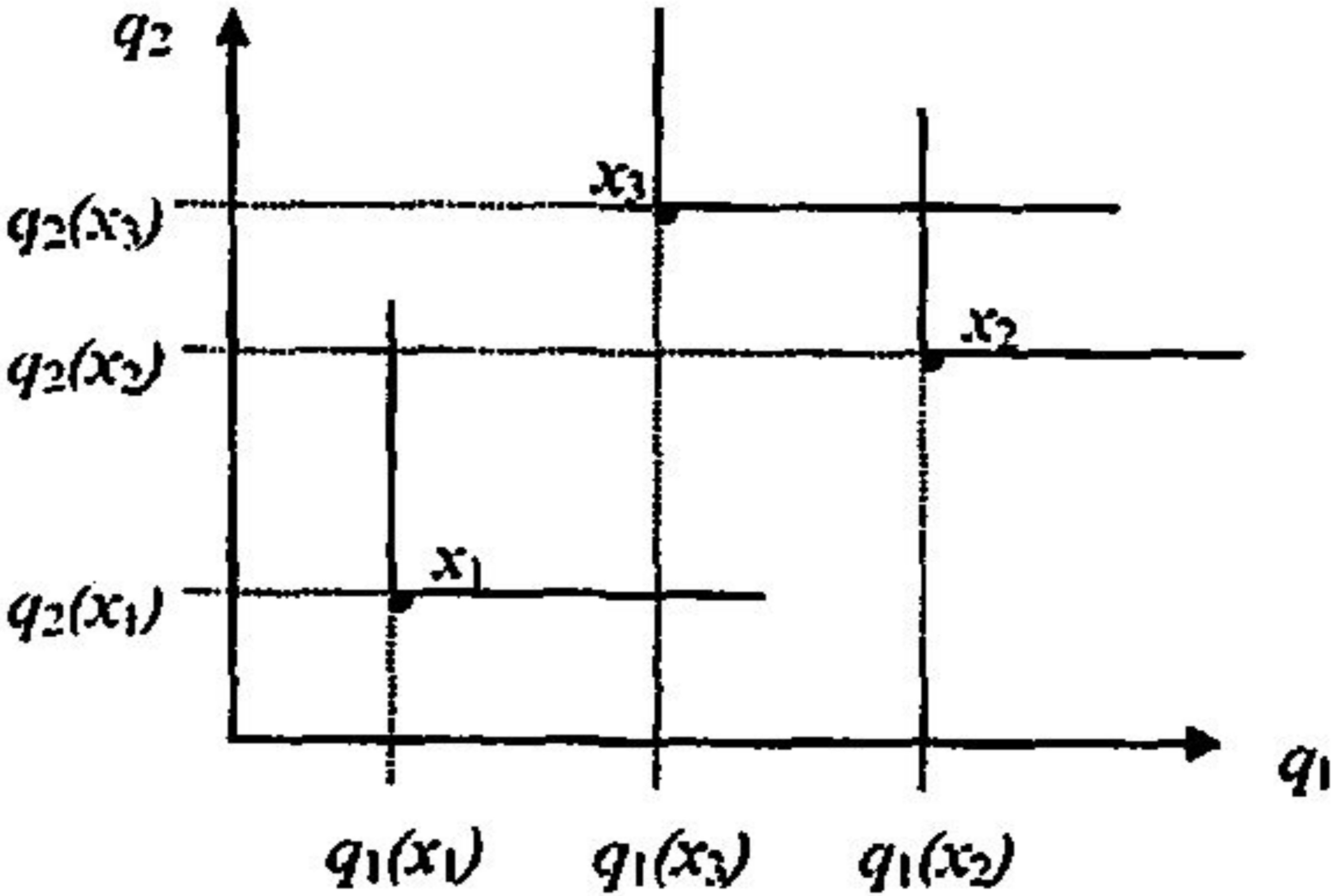
Классификация задач выбора

множество альтернатив	**конечное, счетное или континуальное**
оценка альтернатив	**по одному или по нескольким критериям, как количественного, так и качественного характера**
режим выбора	**однократный (разовый) или повторяющийся**
последствия выбора	***выбор в условиях определенности в условиях риска в условиях неопределенности***
ответственность за выбор	**индивидуальный и групповой выбор**
степень согласованности целей	***кооперативный выбор, выбор в конфликтной ситуации, компромиссный выбор, коалиционный выбор***

Постановка критериальной задачи выбора

- $$x_1 > x_2 \quad <=> \quad q(x_1) > q(x_2)$$
- $x_1 > x_2 \quad <=> \quad q(x_1) > q(x_2)$
  - $x \in X$ – некоторая альтернатива из множества X
  - $q(x)$ – *целевая функция (критерий качества, функция предпочтения, функция полезности)*
- $x \in X$ – некоторая альтернатива из множества X
- $q(x)$ – *целевая функция (критерий качества, функция предпочтения, функция полезности)*

Задача выбора в пространстве 2-х критериев



Метод свертки частных критериев

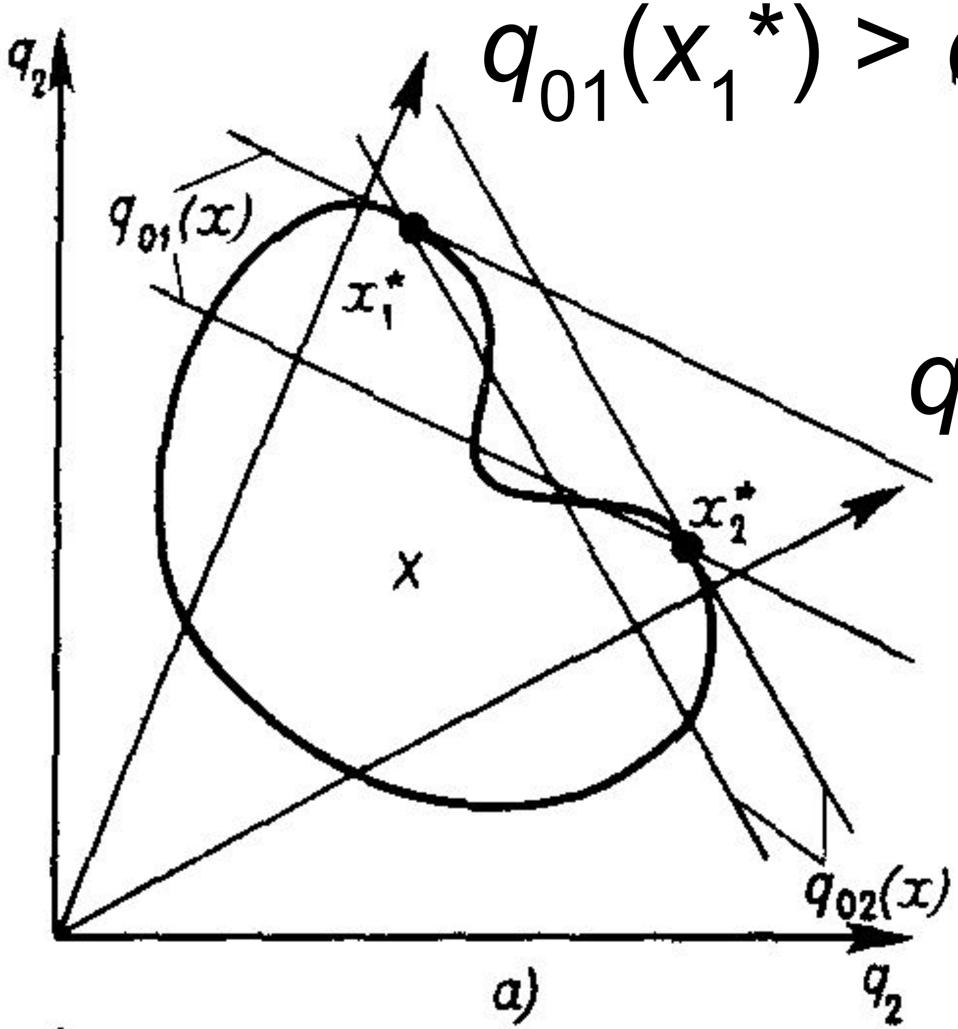
- $$q_0(x) = q_0(q_1(x), q_2(x), \ldots, q_p(x))$$

$$q_0 = \sum_{i=1}^{p} \frac{\alpha_i q_i}{s_i} \ ; \ 1 - q_0 = \prod_{i=1}^{p} \left(1 - \frac{\beta_i q_i}{s_i}\right)$$

- $$x^* = \arg\max_{x \in X} q_0(q_1(x), \ldots, q_p(x)).$$

- $$x^* = \arg\max_{x \in X} \left\{ \min_i \left[\frac{a_i q_i(x)}{s_i} \right] \right\}$$

Метод свертки частных критериев



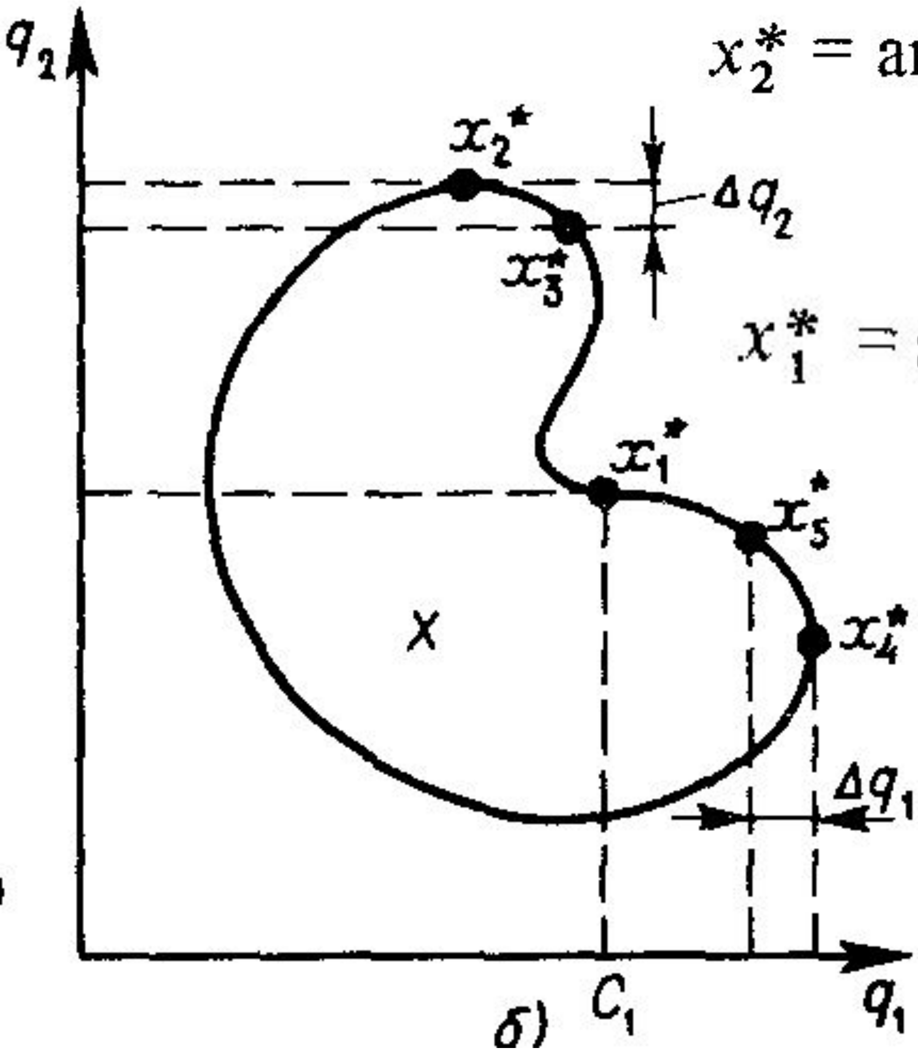
$$q_{01}(x_1^*) > q_{01}(x_2^*),$$

$$q_{02}(x_1^*) < q_{02}(x_2^*)$$

Метод условного экстремума основного критерия

- $$x^* = \arg\left\{\max_{x \in X} q_1(x) \mid q_i(x) = C_i,\ i = 2, 3, \ldots, p\right\}$$
  - $$x_1^* = \arg\left\{\max_{x} q_2(x) \mid q_1(x) = C_1\right\}$$
- $$x^* = \arg\left\{\max_{x \in X} q_1(x) \mid q_i \leqslant C_i,\ i = 2, \ldots, p\right\}$$
  - $$x_2^* = \arg\left\{\max_{x} q_2 \mid q_1 \leqslant C_1\right\}$$

Метод уступок



$$x_2^* = \arg\left\{\max_x q_2 \mid q_1 \leqslant C_1\right\},$$

$$x_1^* = \arg\left\{\max_x \; q_2(x) \mid q_1(x) = C_1\right\}$$

Метод задания опорных значений (уровней притязания)

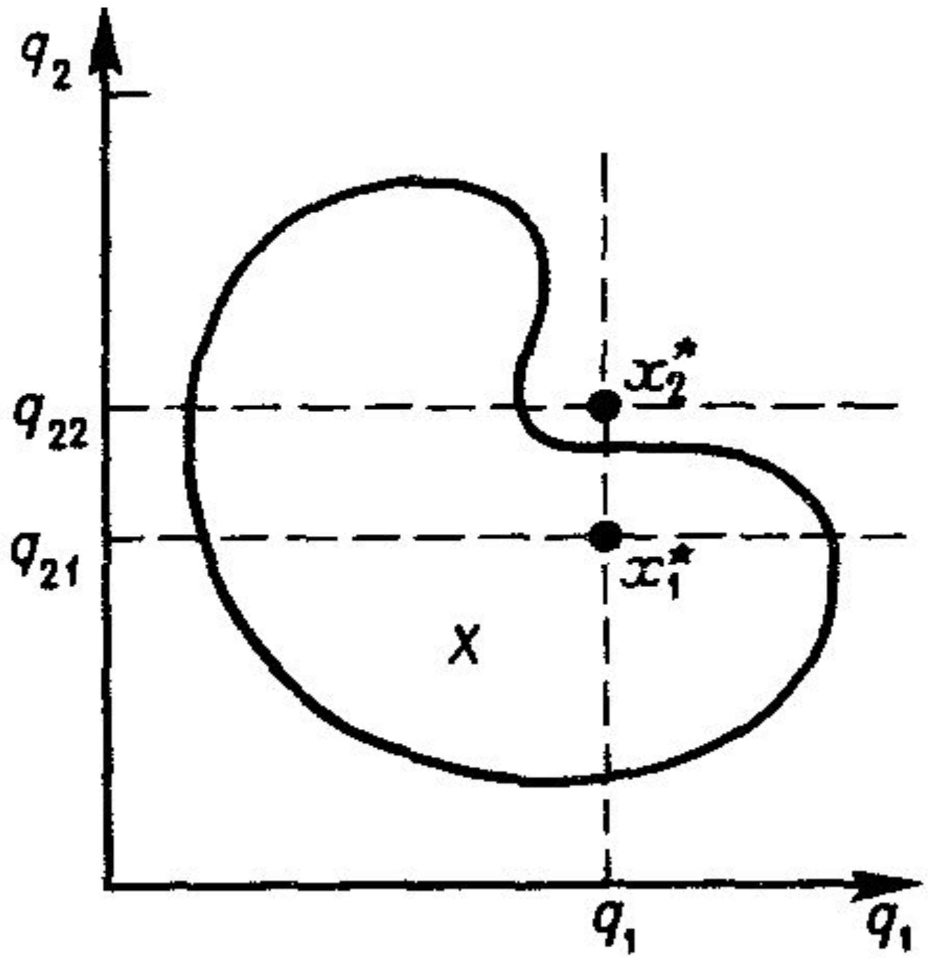
Числовые меры близости

(расстояние):

- $$d_k(q, \bar{q}) = \Big(\sum_{i=1}^{p} w_i |q_i(x) - \bar{q}_i|^k \Big)^{1/k}$$

- $$S(q, \bar{q}) = \min_i \alpha_i (q_i - \bar{q}_i) + \alpha_{p+1} \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (q_i - \bar{q}_i),$$

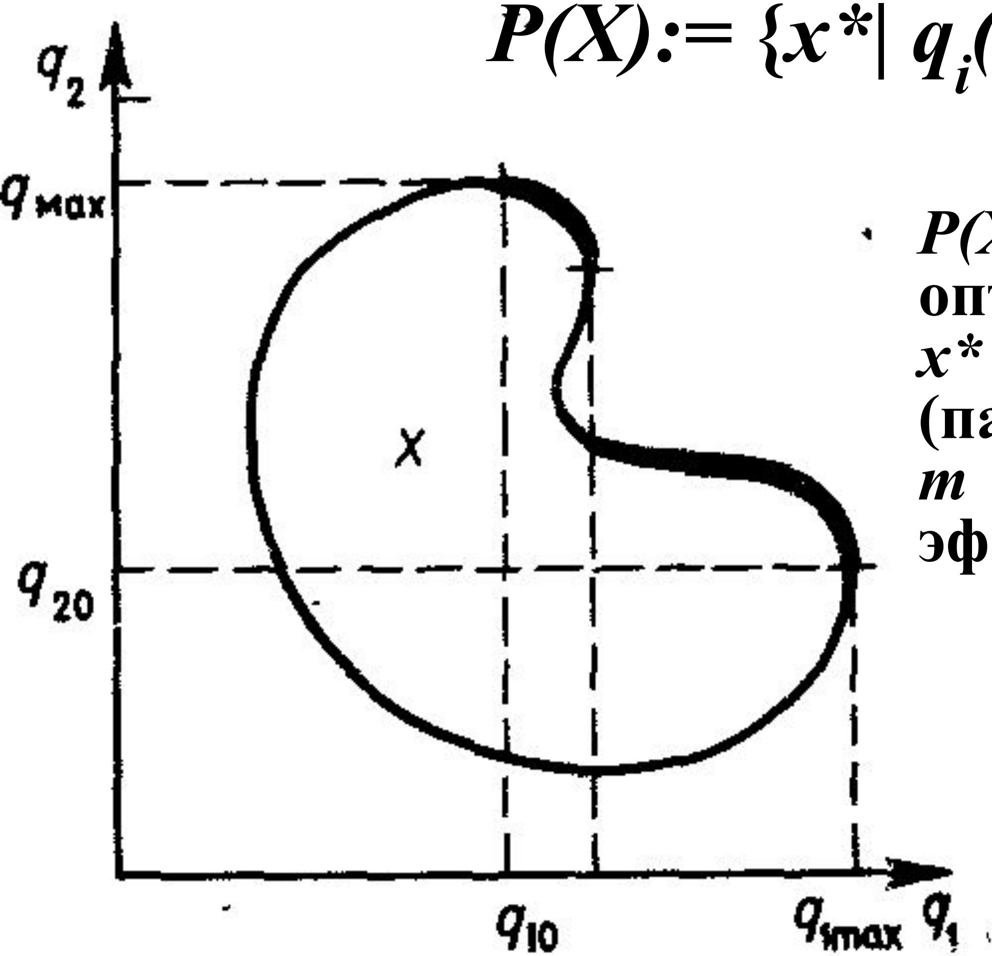
Метод уровней притязания



а)

Метод Парето-оптимизации

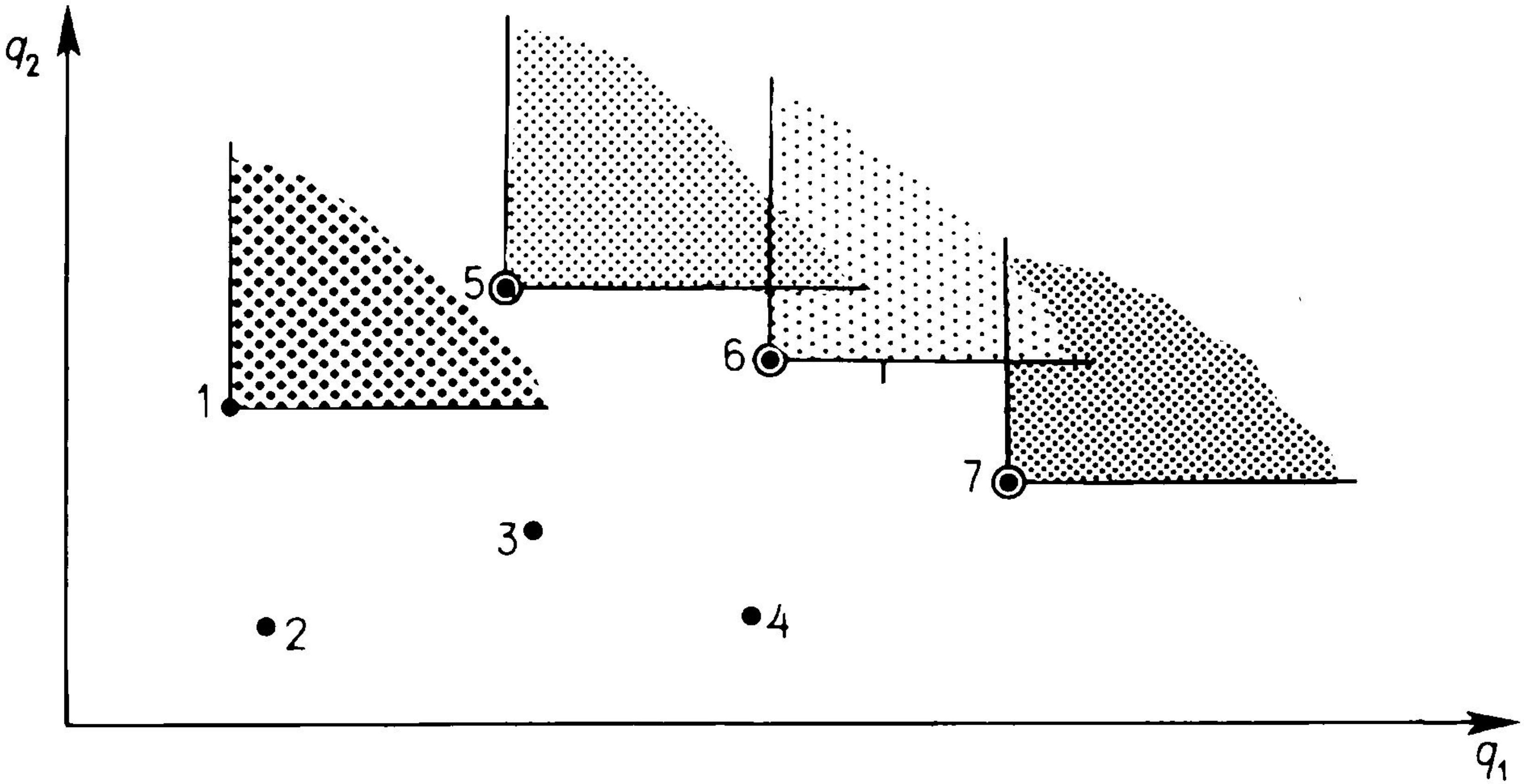
$$P(X) := \{x^* \mid q_i(x^*) \geq q_i(x) \wedge q_k(x^*) > q_k(x),\ i=1,\dots,m;\ 1 \leq k \leq m\}$$



г)

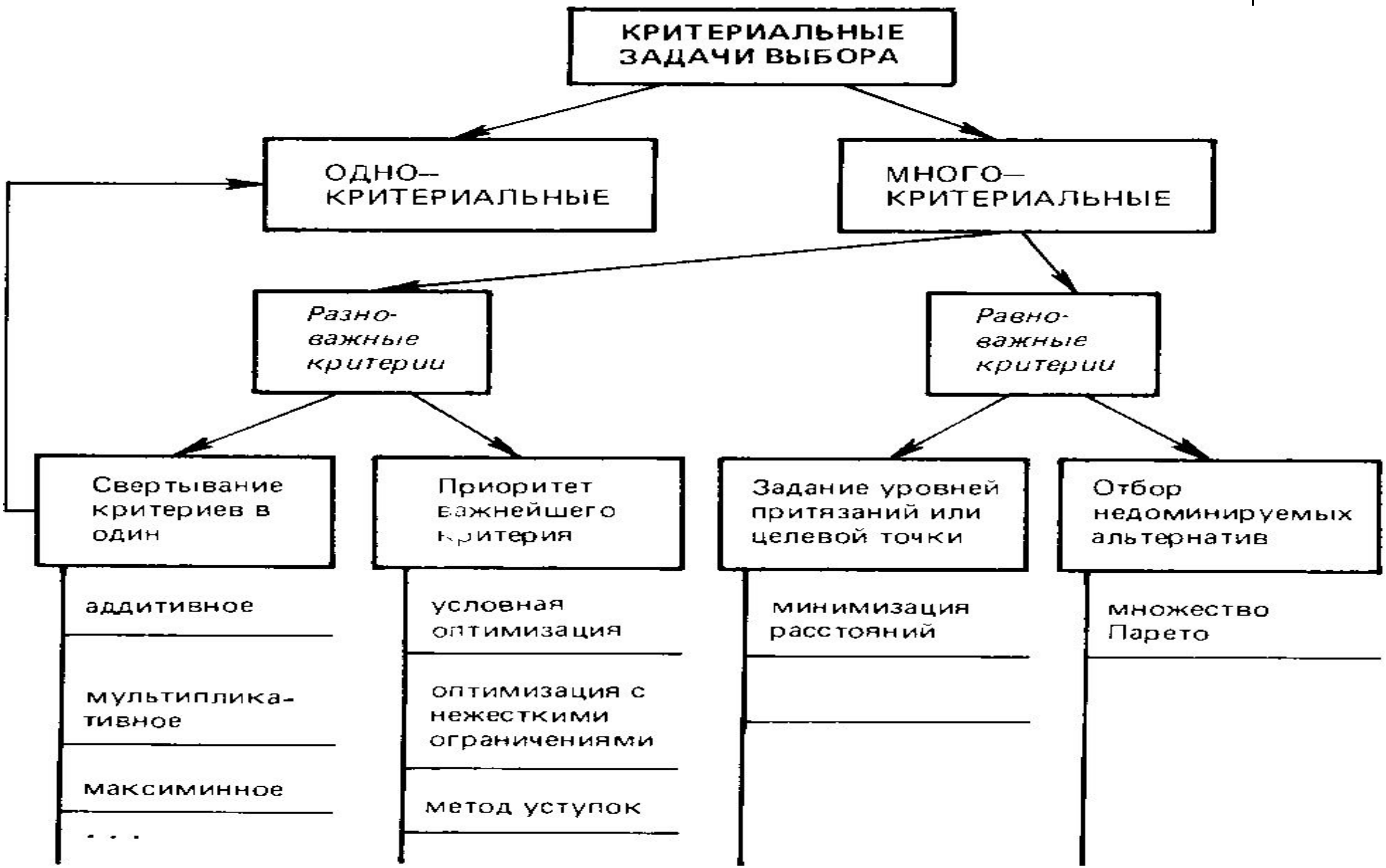
- *P(X)* – множество парето-оптимальных решений
  *x** – эффективная точка (парето-оптимальное решение)
  m – количество критериев эффективности

Построение множества Парето



$$(\forall x, y \in X)\ [xPy] \Rightarrow \left\{ (\forall_j = \overline{1, m})\ [x_j \geqslant y_j] \text{ и } (\ \ j_0 = \overline{1, m})\ \ [x_{j_0} > y_{j_0}] \right\}$$

Классификация многокритериальных моделей выбора



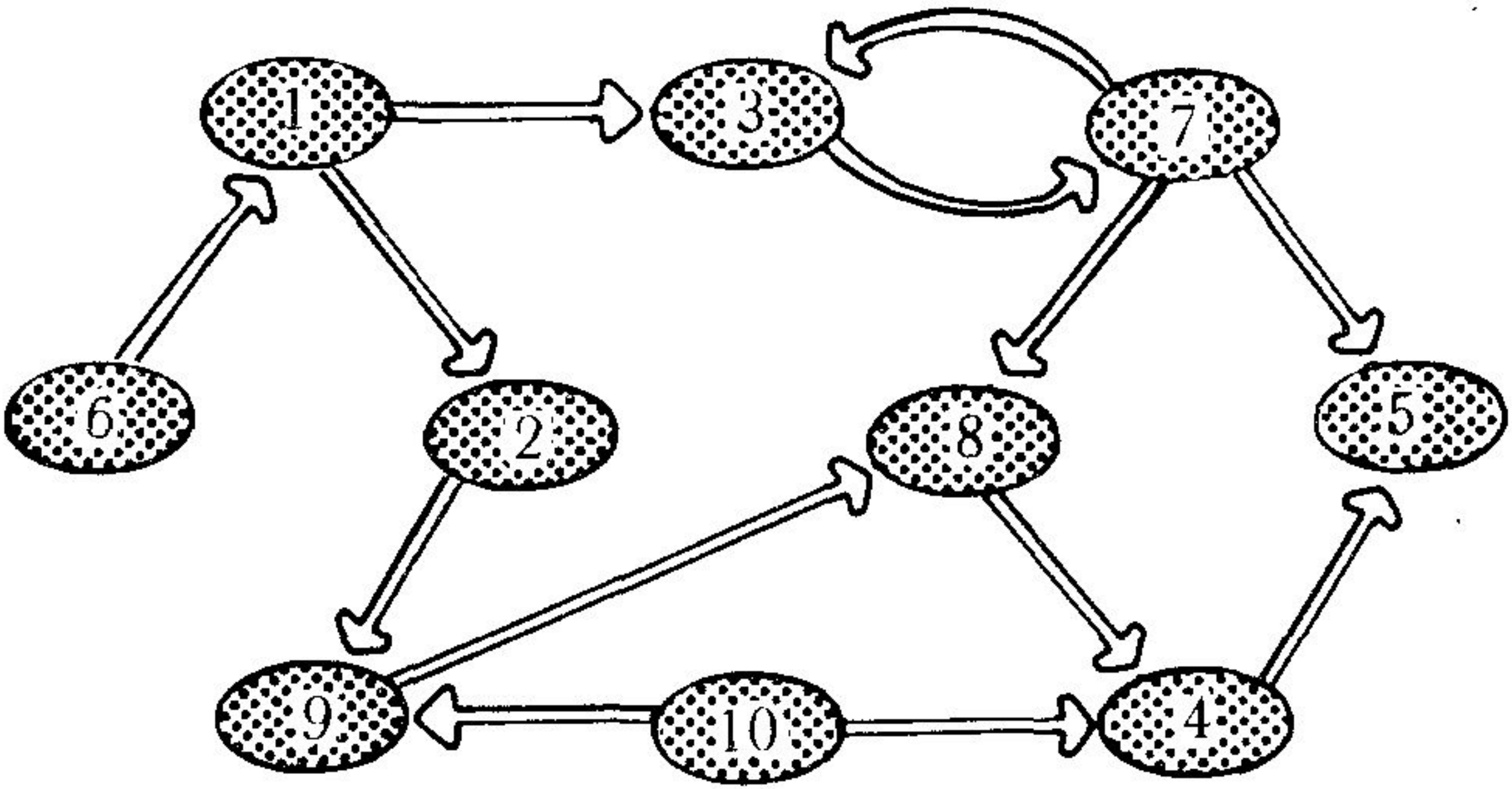
Способы описания выбора на языке бинарных отношений

Способы задания отношений на конечном множестве

- $$x_1 > x_2 \iff q(x_1) > q(x_2)$$

- $x \in X$ – некоторая альтернатива из множества X
- $q(x)$ – *целевая функция (критерий качества, функция предпочтения, функция полезности)*

Задание графа предпочтений



Задание диагонального отношения *E*. Пример

1) в E входят только пары с одинаковыми номерами: $x_i \, E \, x_j$ верно только при $i = j$;

2) $a_{ij}(E) = \{ 1: i = j; 0: i \neq j \}$;

3) граф $G(E)$ такой, что каждая его вершина имеет петлю, а остальные дуги отсутствуют;

4) $R^{+}(x) = R^{-}(x) = x$ для любого $x \in X$.

Свойства бинарных отношений *R* на множестве *X*

- $$x_1 > x_2 \quad <=> \quad q(x_1) > q(x_2)$$

- $x \in X$ – некоторая альтернатива из множества X
- $q(x)$ – *целевая функция (критерий качества, функция предпочтения, функция полезности)*

Бинарные отношения на множестве альтернатив

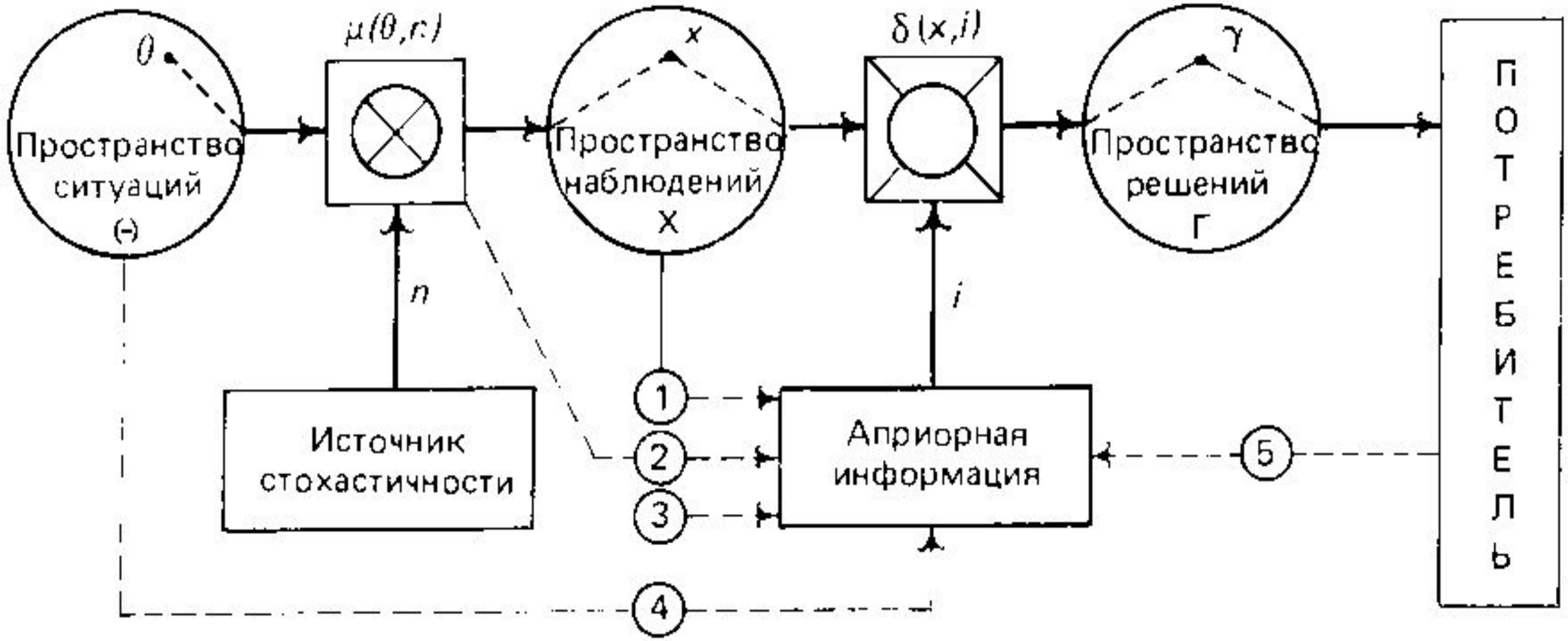
- **Отношение эквивалентности (~):**
  - рефлексивное, симметричное и транзитивное
- **Отношение нестрогого порядка (≤)**
  - рефлексивное, антисимметричное и транзитивное
- **Отношением строгого порядка (<)**
  - антирефлексивное, асимметричное и транзитивное
- **Отношение доминирования**
  - антирефлексивное и асимметричное

Функция полезности $u(x)$

$$u(x \in X): (x < y) \Rightarrow [u(x) < u(y)]$$

- ***u*(*x*)** - *произвольное монотонное преобразование, которое сохраняет упорядочивающее свойство*
- *множество **X** конечно*
- *имеется отношение строгого порядка на множестве **X***

Схема принятия статистических решений



- **$\theta \in \Theta$ - искомая (измеряемая) величина**
- **$x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ - выборка наблюдений**
- $\mu: x = \mu(\theta, n)$ **- случайное воздействие**
- $\gamma = \delta(x, i)$ **- решающая функция**

Байесов подход к выбору решений

$$\delta^*(x) = \arg\min_{\delta(x)} R(\delta(x)) = \arg\min_{\delta(x)} M_{X\Theta} l(\delta(x), \theta) =$$
$$\arg\min_{\delta(x)} \int_X \int_\Theta l(x), \theta dF(x|\theta) dP(\theta).$$

- $P(\theta)$, $\theta \in \Theta$ - функция распределения;
- $F(x|\theta)$, $x \in X$, $\theta \in \Theta$ - условное распределение выборочных значений;
- $l(\gamma,\theta)$ - функция потерь $l(\gamma,\theta)$
- R - байесов риск

Формула Байеса

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

- $P(A)$ - априорная вероятность гипотезы *A*;
- $P(B|A)$ - вероятность гипотезы *A* при наступле-нии события *B* (апостериорная вероятность);
- $P(B|A)$ - вероятность наступления события *B* при истинности гипотезы *A*;
- $P(B)$ - полная вероятность наступления

Платежная матрица игровых моделей

$X \setminus Y$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	q_{11}	q_{12}	…	q_{1j}	…	q_{1m}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	q_{i1}	q_{i2}	…	q_{ij}	…	q_{im}
…	…	…	…	…	…	…
x_n	q_{n1}	q_{n2}	…	q_{nj}	…	q_{nm}

$$\min_j q_{ij}$$

- $y = (y_1, \ldots y_m)$ – вектор возможных исходов
- $x = (x_1, \ldots x_n)$ – вектор альтернатив
- $q_i = (q_{i1}, \ldots, q_{im})$ – вектор “выигрышей”, “потерь”, “платежей”

Критерии выбора в условиях неопределенности исходов

- **Максиминный (минимаксный) критерий**

$$x^* = \arg\max_i \min_j q_{ij}\,.$$

- **Критерий минимаксного сожаления Сэвиджа**

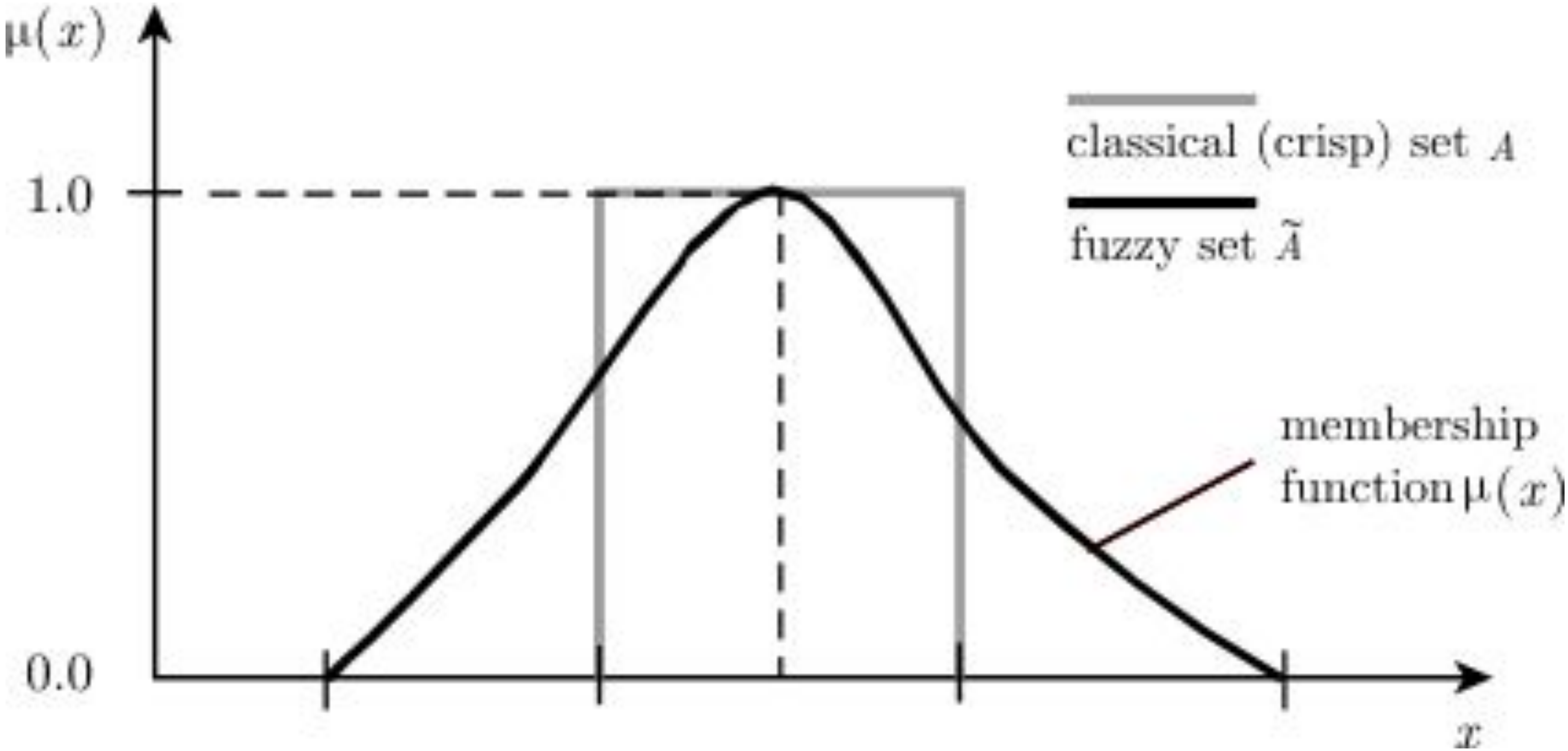
$$s_{ij} = q_{ij} - \min_i q_{ij}\,,\quad x^* = \arg\min_i \max_j s_{ij}$$

- **Критерий пессимизма – оптимизма Гурвица**

$$g(x_i) = \alpha \min_j q_{ij} + (1-\alpha)\max_j q_{ij}\,,\ 0 \le \alpha \le 1.$$

при $\alpha = 1$ $\quad x^* = \arg\max_i g(x_i)$

Нечёткое множество и классическое множество



Выбор на нечетком множестве альтернатив

$$x^* = \arg\max_{x \in X} \mu_D(x)$$

- $\mu_D(x) = \min\left[\mu_G(x), \mu_C(x)\right]$ **- нечеткое множество решений D**
- $G = \{x, \mu G(x)\}$ **- нечеткое множество целей**
- $C = \{x, \mu C(x)\}$ **- нечеткое множество ограничений**

$$d(x_i, x_j) = \left(\frac{1}{m}\sum_{\gamma=1}^{m}\left|\mu_r(x_i) - \mu_r(x_j)\right|^p\right)^{1/p}$$

- $\mu_r(x)$ **– функция принадлежности по r-му признаку**

Бинарные отношения на языке нечетких множеств

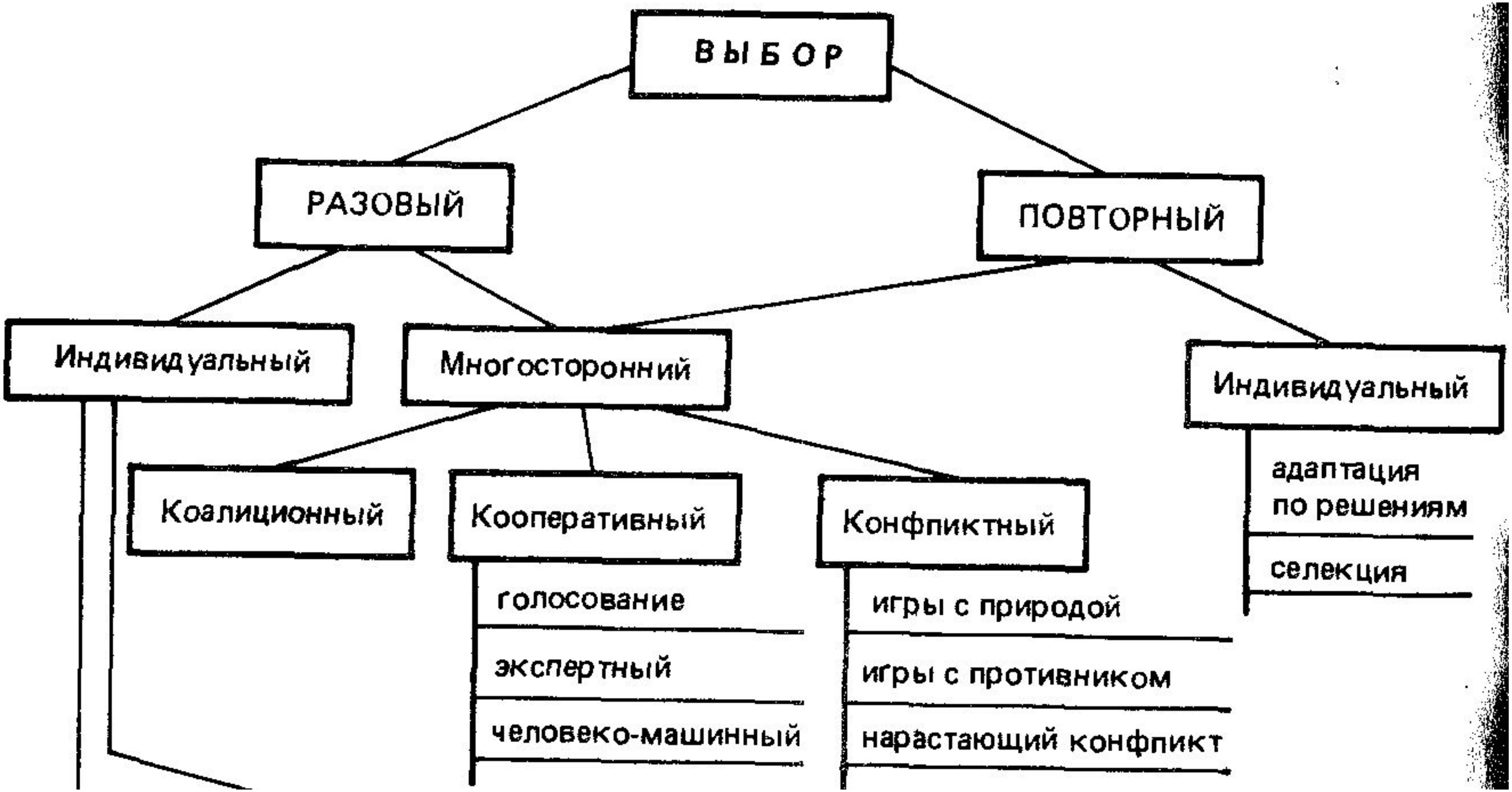
- $$x_1 > x_2 \iff q(x_1) > q(x_2)$$

$$\mu_R(x_i, x_k) = \max_{x_j}\{\min[\mu_R(x_i, x_j), \mu_R(x_j, x_k)]\}$$

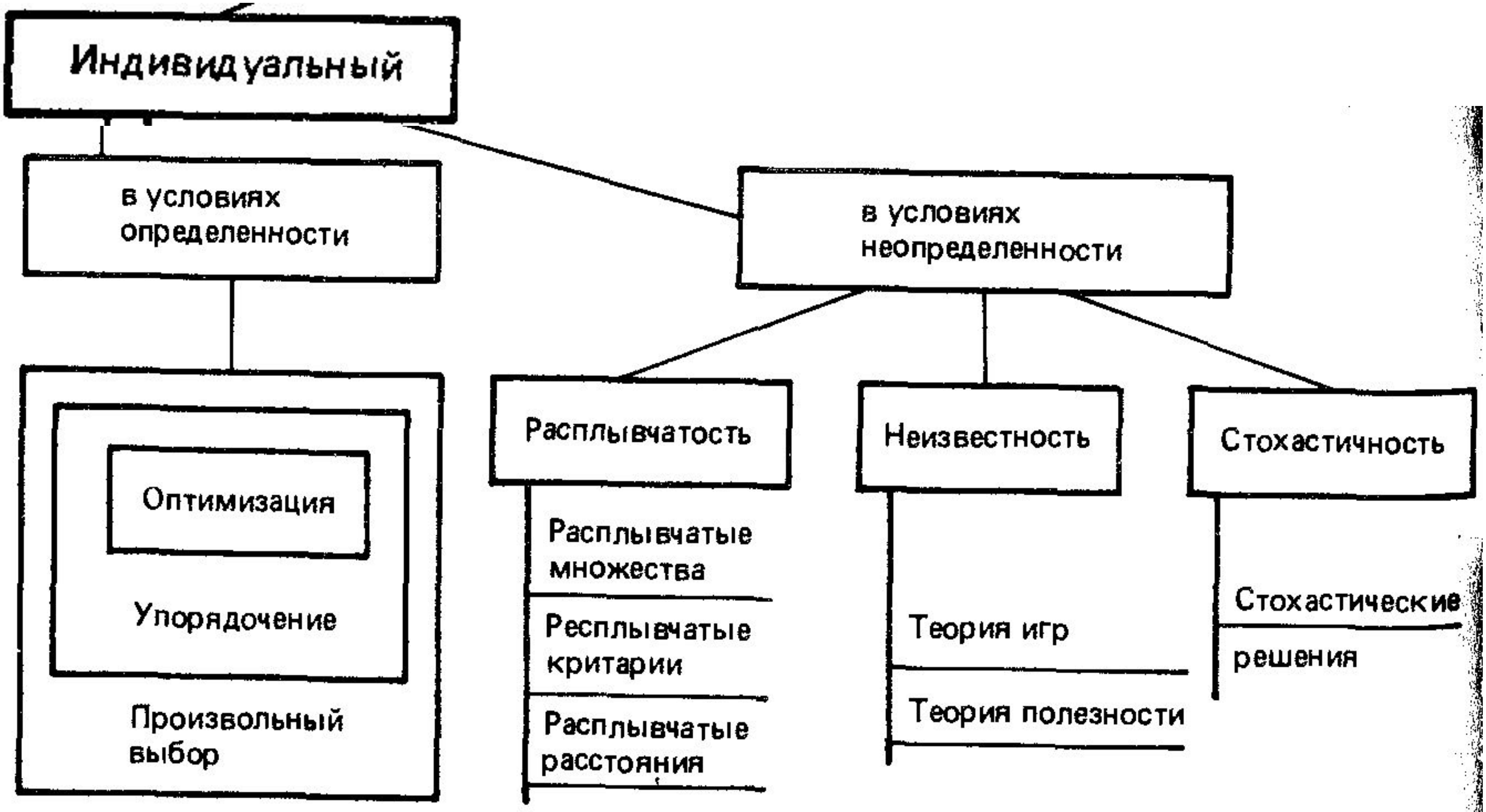
- **$x \in X$ – некоторая альтернатива из множества X**
- ***$q(x)$ – целевая функция (критерий качества, функция предпочтения, функция полезности)***

$$\mu_{R_\alpha}(x_i, x_j) = \begin{cases} \alpha & \text{при } (x_i, x_j) \in R_\alpha, \\ 0 & \text{при } (x_i, x_j) \notin R_\alpha, \end{cases}$$

Задачи выбора в системном анализе



Задачи выбора в системном анализе



Контрольные вопросы

1. В чем состоит метод свертки в задаче многокритериальной оптимизации?
2. Какой смысл имеет множество Парето?
3. Перечислите способы задания отношений на конечном множестве.
4. Какие свойства имеет отношение эквивалентности?

Тема. Методы выбора и принятия решений

1. Постановка задачи многокритериальной оптимизации.
2. Оптимизация методом свертки частных критериев.
3. Оптимизация методом уступок.
4. Метод Парето-оптимизации
5. Способы задания отношений на конечном множестве.

Тема. Методы выбора и принятия решений

6. Свойства отношений эквивалентности, порядка и доминирования.
7. Схема принятия статистических решений.
8. Платежная матрица игровых моделей.
9. Критерии выбора в условиях неопределенности исходов.

0. Выбор на нечетком множестве