Бүтін сандар жиынында теңдеуді шешу әдістері

Студент:Жұмаділла Жансая
Жетекші:Меңліқожаева Сәулеш

Мазмұны

Кіріспе

Сандар теориясы өте ертеде шыққан ежелгі ғылым. Оның іргесі ұлы грек математигі Евклидтің (б.э.д. III – II ғғ) еңбектерінде қаланған. Сандар теориясының негізгі объектісі ретінде сандардың 1, 2, 3, ... натурал қатары, 0 саны және де барлық теріс сандар -1, -2, -3, ... т.с.с. сандар жазылады. Бұл сандардың барлығы бүтін сандар жиынын құрайды.

Белгісізі біреуден көп болатын бүтін коэффициентті алгебралық теңдеулерді бүтін сандар жиынында шешу сандар теориясының қиын мәселелерінің бірі. Мұндай есептермен байырғы заманның математиктері, мысалы, грек математигі Пифагор (б.з.б. VI ғ) александриялық математик Диофант (б.з.б. II – III ғ) және біздің дәуірімізге жақын үздік математиктер – П. Ферма (XVII ғ), Л. Эйлер (XVIII ғ), Лагранж (XVIII ғ) және тағы басқалар шұғылданған.

Диофант біздің заманымыздың 250 жылдарда Александрияда өмір сүрген. Диофанттың 13 кітаптан тұратын **"Арифметика"** деп аталатын көлемді еңбегінің бізге алтауы ғана жеткен. Диофант арифметикасының баяндау стилінің ежелгі грек математиктерінің канондарынан сапалы түрде екі өзгешелігі бар. **Ол теңдеулердің шешуін геометриядан тыс таза арифметикалық – алгебралық әдістер арқылы жүргізді.**

Екіншіден, Диофант ғылым тарихында тұңғыш рет математикалық символдар (таңбалар) тілін пайдаланды. Диофанттың математикаға қосқан **негізгі жаңалығы** – оның **анықталмаған теңдеулерді шешу әдістерін табуы**. Ол 50 – ден астам әр түрлі кластарға жататын шамамен 130 – дан анықталмаған теңдеулердің рационал шешуін көрсетеді. Анықталмаған теңдеулерді қазір **диофант теңдеулері** деп те атайды. Ол әр бір теңдеудің тек бір ғана рационал шешуін анықтаумен шектеледі. Онда анықталмаған теңдеулерді жалпы шешу тәсілдері жоқ. Шыққан нәтиженің дұрыстығы дәлелденбейді, тек есеп шартын қанағаттандыруы ғана тікелей

Бүтін сандар жиынында теңдеулерді шешудің әдістері.

1.Көбейткіштерге жіктеу әдісі

$xy - 2x + 3y = 16$ теңдеуінің барлық бүтін түбірлерін табу керек.

Шешуі: Берілген теңдеуді түрлендірейік:

$$x(y-2) + 3y - 6 = 10,$$

$$(x+3)(y-2) = 10.$$

Соңғы теңдіктен $x+3$ және $y-2$

10 санының бөлгіштері екендігі шығады.

Ал 10 санының 8 бөлгіші бар:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10.$$

Осыдан 8 теңдеулер жүйесі шығады:

$$\begin{cases} x+3=1; \\ y-2=10; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-1; \\ y-2=-10; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=5; \\ y-2=2; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-5; \\ y-2=-2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3=2; \\ y-2=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-2; \\ y-2=-5; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=10; \\ y-2=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x+3=-10; \\ y-2=-1; \end{cases}$$

Теңдеулер жүйесін шешсек, берілген теңдеудің 8 бүтін шешімі бар екенін көреміз: **(-2,12); (-4,-8); (-1,7); (-5,-3); (2,4); (7,3); (-8,0); (-13,1).**

2.Кері жору әдісі

$$x^6 + 3x^3 + 1 = y^4$$

теңдеуін бүтін сандар жиынында шешу керек.

Шешуі: Теңдеуді $x, y \in Z$ сандар жұбы қанағаттандырсын,

$x > 0$ деп ұйғарайық. Сонда

$$\left(x^3 + 1\right)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 < x^6 + 3x^3 + 1 = y^4 < x^6 + 4x^3 + 4 = \left(x^3 + 2\right)^2$$

демек, y^2 саны бүтін бола алмайды, себебі:

$$x^3 + 1 < y^2 < x^3 + 1$$

Осындай қайшылыққа $x \le -2$ болғанда да кездесеміз.

Шындығында, бұл жағдайда $x^3+3<0$, демек,

$$(x^3+2)^2 = x^6+4x^3+4 < x^6+3x^2+1 = y^4 < x^6+2x^3+1 = (x^3+1)^2$$

осыдан шығатын қатынас ешқандай бүтін

y үшін орындалмайды.

Ары қарай, $x=-1$ болғанда теңдеу мүмкін емес

$-1=y^4$ теңдігіне айналады.

Соңында, $x=0$ үшін $1=y^4$ теңдігін аламыз.

Теңдеудің шешімі: $x=0$, $y=\pm 1$.

3.Дербес жағдайдан жалпы жағдайға өту әдісі

Кез-келген $n \in \mathrm{N}$ мәні үшін

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = y^2$$

теңдеуінің натурал сандар жиынында шешімі бар екенін дәлелдеу керек.

Шешуі: Индукция әдісімен дәлелдейік:

Кез-келген $n \in \mathrm{N}$ үшін

$$x_1,...,x_n \in n$$

сандары бар болсын және $y_n > 1$ тақ саны

$$x_1^2 + ... + x_n^2 = y_n^2$$

теңдігін қанағаттандырсын.

$n=1$ үшін ұйғарым дұрыс, $x_1 = y_1 = 3$ деп алу жеткілікті. Ұйғарым кейбір $n \geq 1$ мәні үшін дәлелденсін.

Сәйкесінше $x_1, \ldots, x_n, y_n$ сандар жиынын қарастырайық және

$$x_{n+1} = \frac{y_n^2 - 1}{2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n^2 + 1}{2}$$

деп ұйғарайық. Мұндағы y_n тақ және $y_n > 1$ болғандықтан,

$x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathrm{N}$ және $y_{n+1} > 1$. Сонда

$$x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, y_{n+1}$$

сандар жиыны үшін

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = y_n^2 + x_{n+1}^2 = y_n^2 + \frac{y_n^4 - 2y_n^2 + 1}{4} = \left(y_{n+1}\right)^2,$$

$$y_{n+1} = \frac{\left(y_n^2 + 1\right)}{2} \equiv 1 \text{ (mod 2)},$$

теңдіктері орынды болғандықтан, тұжырым $n+1$ үшін де дұрыс.

4.Сынап көру әдісі

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ теңдеуін натурал сандар жиынында шешу керек.

Шешуі: Ең алдымен $x \le y \le z$ деп ұйғарайық.

Келесі жағдайларды қарастырайық:

а) $x=1$ болғанда, теңдеудің шешімі жоқ екенін көреміз:

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\neq 0$$

б) $x=2$ болғанда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}, \quad (y-2)(z-2)=4$$

Ал $0 \le y-2 \le z-2$

болғандықтан, теңдеудің 2 шешімі бар: (2,3,6); (2,4,4).

в) $x=3$ болғанда, түрлендіруден соң

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}$$

теңдігін алмыз. Егер $y=3$, онда $z=3$. Осыдан (3,3,3) шешімдерін табамыз. Егер $y\geq 4$, онда $z\geq 4$. Осыдан

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$

теңсіздігі шығады. Бірақ бұл теңсіздік мүмкін емес.

г) $x\geq 4$ үшін $y\geq 4$ және $z\geq 4$, келесі теңсіздік орынды:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<1$$

Бұлай болу мүмкін емес. Сонымен $x\leq y\leq z$ үшін теңдеудің 3 шешімі бар: (2,3,6); (2,4,4); (3,3,3). Ал олай ұйғармайтын болып, қалған 8 шешімін табамыз: **(4,2,4); (4,4,2); (2,6,3); (3,2,6); (2,4,4); (3,6,2); (6,2,3); (6,3,2).**

5.Бүтін сандарда шешілетін байырғы қазақ есептері

Қазақтың есептерінің берілуі түрліше болып келеді.Олар біресе жұмбақ,біресе өлең,біресе қара сөз,біресе ертек,біресе ілмек,біресе дұзақ,біресе ұйқас табу болып келеді.

Тауық нешеу саналған?

Қызық есеп айтайын,
Сынап сені байқайын.
Жауап айтшы бөгелмей,
Шешім болсын дегендей,
Бір сарайға қамалар,
Тауық түлкі табылар.
Есеп шарты мынадай:
Аяқ пен бас саналар,
Отыз аяқ жүр көп боп,
Басы тоғыз бір топ боп.
Көрмегенмен оларды
Айыруға болады.
Болсадағы бұл тосын.
Жауап берші,жүр досым.
Түлкі нешеу қамалған?
Тауық нешеу саналған?

Шешуі: Тауықты- x деп,ал түлкіні- y деп белгілейік.

Енді теңдеулер жүйесін құрайық: $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases}$

Теңдеулер жүйесін шешеміз:

$$\begin{cases} x + y = 9 \\ 2x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 9 - x \\ 2x + 4(9 - x) = 30 \end{cases} \quad y = 9 - 3 = 6$$

$$2x + 36 - 4x = 30$$

$$-2x = -6$$

$$x = 3$$

Көріп отырғанымыздай,тауық-3,түлкі-6

Табақ тарту

Тәттібек дейтін меймандас адам екен. Бір күні оның үйіне бір топ қонақ келеді. Үй иесі оларды жылы шыраймен қабылдап, төріне шығарады. Дастарқан жайылады. Шайдан кейін қазанға ет салынады.

Тамақ пісіп, табақ тартылар шақта үй иесі меймандарын көзбен шолып шығады да, сәл ойланып қалады. Ошақ басында жүрген жұбайына келіп:

- Екеуара бір табақ тартсақ, онда бір табақ ет жетпей қалады, үшеуара бір табақ тартсақ, онда бір табақ ет артылып қалады, енді не істесек екен?-дейді.

Бұл үйдің меймандары қанша? Үйде бар табақ саны қанша?

Шешуі: Табақ санын x десек, адам санын y деп белгілеп, теңдеулер жүйесін құрастырамыз:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2} = x + 1 \\ \dfrac{y}{3} = x - 1 \end{cases}$$

Бұл жүйеден $y = 12$, $x = 5$ шығады.

Жауабы: Қонақ саны он екі, табақ саны бесеу.

Әр түліктен нешеден?

Жеті жасар баласын есепке үйреткісі келген әкесі бір күні:

- Ендігі жеті жылда түйеміз екі есе, жылқымыз үш, сиырымыз төрт, қойымыз бес есе көбейсе, онда бәрін қосқандағы саны сенің қазіргі жасыңнан екі есе көп болады екен,- дейді.

- Ол кезде біздің үйдегі жылқының, түйенің, сиырдың, қойдың әрқайсысы қаншадан болады?-деп бала әкесіне қарайды.

- Оны білу қиын емес. Өзің-ақ табасың,- деп әке баласын ойландырып тастайды. Көп өтпей-ақ бала өз сұрағының жауабын айтады.

Бұл үйдің түйесінің, жылқысының, сиырының, қойының саны қанша?

Шешуі: Түйені x, жылқыны y сиырды z қойды m деп алайық. Сонда

$$2x + 3y + 4z + 5m = 14$$

$x, y, z, m \in \mathrm{N}$ болғандықтан, $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, $m = 1$ екені көрініп тұр.

Жауабы: Бұл үйде алғашында бір түйе, бір сиыр, бір қой, бір жылқы болған.

ҚОРЫТЫНДЫ

Жалпы айтқанда оқу үрдісінде бүтін сандар жиынында теңдеулерді шығарудың әдіс – тәсілдерін пайдалану, оларды терең зерттеу сабақтың сапасын арттырады. Сондай – ақ ***оқушылардың белсенділігі мен ой - өрісін дамытуға септігін тигізеді*** және олардың ***пәнге, техникалық ғылымға деген қызығушылығын арттырады.*** Ең негізі оқушылар бағдарламадан тыс мағлұматтар алып, білім сапасын арттырады. Соңғы кезде математикалық олимпиадаларға, ғылыми жобаларды қорғауға көп көңіл бөлінуде. Жыл бойы әр – түрлі халықаралық дәрежедегі математикалық сайыстар өткізіледі, атап айтсақ, “Жібек – жолы”, “Кенгуру”, “Ақбота” және т.б. Бұл сайыстарға қатысу үшін оқушылардың дайындық дәрежелері өте жоғары деңгейде болуы шарт.

Сонымен қатар қазіргі мектеп математикасындағы оқыту үрдісінің нәтижесін жоғарылату бағытында оқушылардың алған білімдерін практикада өздігімен орындауға үйрету керек.

Ал мектеп бағдарламасында олимпиадалық есептерді шығару тәсілдері өте аз. Бұл сайыстарда көп кездесетін есептердің бір тобы – бүтін сандар жиынында шешілетін теңдеулер. Жұмыстың негізгі бөлімінде осындай теңдеулерді шешудің жалпы теориясын, әдіс – тәсілдерін ашып көрсеттік.

Пайдаланылған әдебиеттер

- Шыныбеков Ә. Н. Алгебра: Жалпы білім беретін мектептің 8 – сыныбына арналған оқулық. – Алматы: Атамұра, 2004.
- Никифорович В. А. В мире уравнений. – Москва: Наука, 1987.
- Моралишвили Т. Д. Современные поблемы методики преподавания математики. – М.: Просвещение, 1985.
- Гельфонд А. О. Популярные лекций по атематике. – Решение уравнений в целых числах. – М.: Наука, 1983.