СПЕКТР И РЕЗОЛЬВЕНТА

Нормированные пространства и л.н.о.

КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение. Пусть $A: X \to Y$, оператор А называется ***компактным***, если всякое ограниченное множество $M \subset X$ переводит в предкомпактное $A(M) \subset Y$ (т.е. из всякой ограниченной последовательности этого множества можно выбрать сходящуюся подпоследовательность

$$\{y_n\} \subset A(M) \quad \{y_{n_k}\}: y_{n_k} \to y_0 \in A(M), k \to \infty$$).

Примеры компактных операторов:

1. Конечномерный оператор: А(М) – к/м лин. п/пр в Y.
2. Оператор типа Вольтерра.
3. Тождественный оператор компактен в к/м нормированных пространствах.

ПРИМЕРЫ КОМПАКТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1) Конечно мерный оператор:

$$X = Y = C[0,1];\ A : X \to X;$$

$$(Ax)(t) = \int_0^1 \left(1 + ts^3\right) x(s)\, ds\ \ (imA = Sp(1,t));$$

$$(Ax)(t) = \sin \pi t \cdot x(1)\ \left(im(A) = Sp(\sin \pi t)\right);$$

$$X = Y = l_2;$$

$$Ax = (2x_2; 3x_2; 0; ix_5; 0;0;0;0;0\ldots.)\quad \left(im(A) = Sp(e_1; e_2; e_4),\ \ e_1 = (1,0,0,0,\ldots.); e_2 = (0,1,0,0,\ldots)\right)$$

2) Оператор типа Вольтерра:

$$X = C[0,1];\ Y = C^1[0,1];$$

$$(Ax)(t) = \int_0^t k(t,s) \cdot x(s)\, ds,\ k(t,s) \in C[0,1]^2;$$

3) Тождественный оператор

X=Y=R;   Ax=x $\longrightarrow$ y=Ax; y=x;

Рассмотрим операторное уравнение II рода в банаховом пространстве X

$$\lambda x - Ax = y; \quad x, y \in X, \lambda \in C$$

Регулярное значение $\lambda \in C$ называется регулярным числом оператора A, если оператор (λI-A) является изоморфизмом, т.е. оператор $(\lambda I-A)^{-1}$ - л.н.о.

Резольвентное множество, $\rho(A) \in C$ – это множество регулярных значений.

Спектр оператора A – это множество $\sigma(A) = C \setminus \rho(A)$

Резольвента оператора A – это отображение

$R_\lambda(A)=(\lambda I-A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$

Если линейный оператор непрерывен, то его спектр непуст, ограничен и замкнут.

Если л.н.о. компактен, то его спектр не более чем счетен.

Ноль всегда принадлежит спектру компактного оператора.

Радиус наименьшего круга, содержащего спектр, является спектральным радиусом $r_\sigma(A)$

ПРИМЕРЫ

Найти спектр, резольвенту, резольвентное множество л.н.о. А:

1. $X = Y = C[0,1]; \ (Ax)(t) = (3t^2 + 8t - 3)\, x(t)$
2. $X = Y = C[0,1], \ (Ax)(t) = \int_0^1 t^6 s^3 x(s)\, ds$
3. $X = Y = C[0;\, 2\pi]; \ (Ax)(t) = e^{it}\, x(t)$
4. В вещественном пространстве C[0, π] найти с.з. и с.в. оператора (Ax)(t) = x″, если

$D_A = \{x \in C[0, \pi] \mid x'' \in C[0, \pi] \ \&\ x(0) = x(\pi) = 0\}$.

РЕШЕНИЕ

1) $A : X \to X,\ X = C[0,1]$

$\lambda x(t) - (Ax)(t) = y(t),\ t \in [0,1]$

$\lambda\, x(t) - (3t^2 + 8t - 3)\, x(t) = y(t)$

$x(t) \cdot \left(\lambda - (3t^2 + 8t - 3)\right) = y(t)$

$$x(t) = \frac{y(t)}{\lambda - (3t^2 + 8t - 3)},\ \lambda \in C,\ t \in [0,1];$$

определим значения ф. $(3t^2 + 8t - 3)$ *на* $[0,1]$:

$\forall t \in [0, 1]$ *значения ф.* $g(t) = 3t^2 + 8t - 3 \in [-3;\ 8]$, *тогда,*

если $\lambda \in [-3;8]$, *то* $\exists t_0 \in [0,1] : \lambda - (3{t_0}^2 + 8t_0 - 3) = 0 \Rightarrow$

$x(t) \notin C[0,1],\ \ \forall y \in C[0,1] \Rightarrow \sigma(A) = [-3;\ 8]$

Резольвента: $$(\lambda I - A)^{-1}(y(t)) = \frac{y(t)}{\lambda - (3t^2 + 8t - 3)}$$

резольвентное множество: $\rho(A) = C \setminus [-3;8]$

спектральный радиус $r_\sigma(A) = 8$

РЕШЕНИЕ

2) $X = Y = C[0,1]$

$$(Ax)(t) = \int_0^1 t^6 s^3 x(s) ds$$

операторно е уравнение 2 рода :

$$\lambda x(t) - \int_0^1 t^6 s^3 x(s) ds = y(t), t \in [0,1]$$

$$\lambda x(t) - t^6 \int_0^1 s^3 x(s)\, ds = y(t); \; C = \int_0^1 s^3\, x(s)\, ds;$$

$$\lambda x(t) - C t^6 = y(t), \; t \in [0,1]$$

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} y + \frac{C}{\lambda} t^6, t \in [0,1], \; C - \text{любое число};$$

$$C = ???$$

$$\lambda x(t) - C t^6 = y(t) | * t^3 \text{ и проинтегри руем по } t \text{ на } [0,1]$$

$$\lambda \int_0^1 t^3 x(t)\, dt - C \int_0^1 t^9\, dt = \int_0^1 t^3 y(t)\, dt = \int_0^1 s^3 y(s)\, ds$$

$$\lambda C - 0{,}1C = \int_0^1 s^3 y(s)\, ds$$

$$C = \frac{1}{\lambda - 0{,}1} \int_0^1 s^3 y(s)\, ds$$

$$x(t) = \frac{1}{\lambda} y(t) + \frac{1}{\lambda(\lambda - 0{,}1)} \int_0^1 t^6 s^3 y(s)\, ds, \; \forall t \in [0,1]$$

$$x = \frac{y}{\lambda} + \frac{Ay}{\lambda(\lambda - 0{,}1)} \Rightarrow R_\lambda(A) = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda(\lambda - 0{,}1)}$$

$$\sigma(A) = \{0;\; 0{,}1\}$$

$$r_\sigma(A) = 0{,}1$$

$$\rho(A) = C \setminus \{0;\; 0{,}1\}$$

5. $X = Y = C[0, 1]$, $(Ax)(t) = x'(t)$. Найти спектр $\sigma(A)$, если

- $D_A = \{x \in C^1[0, 1] \mid x(0) = 0\}$.
- $D_A = C^1[0, 1]$.

6. $X=Y= C[-\pi, \pi]$. Найти с.з. и с.в. оператора $(Ax)(t) = x(-t)$.

7. Найти спектр и резольвенту л.н.о.

$$X = Y = C[-1,0];\ (Ax)(t) = t^2 \cdot x(0) - 2 \cdot x(-1)$$

8. Найти спектр и резольвенту л.н.о.:

$X=Y=l_2$; $Ax = \{x_1 + x_2, i(x_1 + x_2), 0, 0, \ldots\}$

РЯД НЕЙМАНА ДЛЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Теорема. ($A \in \mathbf{N}$(X - б.п.) & $\|A\|<1$) $\Rightarrow$

(ряд Неймана $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1} \in \mathbf{N}(X)$ &

$\|(I-A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{1-\|A\|}$).

Следствия:

1. Ряд Неймана для резольвенты.

($A \in \mathbf{N}$(X - б.п.) & $\|A\| < |\lambda|$) $\Rightarrow$

(ряд Неймана $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{A^k}{\lambda^{k+1}} = (\lambda I-A)^{-1} \in \mathbf{N}(X)$ &

$\|(\lambda I-A)^{-1}\| \le \dfrac{1}{|\lambda| - \|A\|}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1) $A \in N(X - б.п.) \wedge \| A \| < 1 = (X - б.п.) \Rightarrow N(X) - б.п. \Rightarrow всякий\ абс\ сх-ся\ ряд\ сх-ся$

$в\ N(X): \sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \| \le \sum_{k=0}^{\infty} \| A \|^k = \frac{1}{1 - \| A \|} \Rightarrow ряд\ Неймана\ \sum_{k=0}^{\infty} A^k\ сх-ся\ абсолютно\ в\ б.п.\ N(X) \Rightarrow$

$ряд\ Неймана\ сх-ся;$

2) $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = ?$

$$(I - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(A^k - A^{k+1} \right) = (I - A) + (A - A^2) + (A^2 - A^3) + \ldots = \lim_{n \to \infty} S_n =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(I - A^{n+1} \right) = I.$$

$Аналогично: \sum_{k=0}^{\infty} A^k (I - A) = I,\ тогда\ (I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$

3) $\| (I - A)^{-1} \| = \| \sum_{k=0}^{\infty} A^k \| \le \sum_{k=0}^{\infty} \| A^k \| \le \frac{1}{1 - \| A \|}.$

2. $A \in \mathbf{N}(X$ - б.п.$) \Rightarrow$
спектр $\sigma(A)$ ограничен: $\sigma(A) \subset \square B_{\theta, ||A||} \subset \mathbf{C}$, т. е. $r_\sigma(A) \leq ||A||$.

3. Если $|\lambda| > ||A||$, то $\lambda \in \rho(A)$ и операторное уравнение 2 рода $\lambda x - Ax = y$ однозначно и корректно разрешимо при любой правой части.

4. Спектр л.н.о. A $\sigma(A)$ замкнут (резольвентное м. открыто).

5. Пусть $X \neq \theta$ б.п., $A \in \mathbf{N}(X)$. Тогда спектр $\sigma(A)$ непуст.

ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Разложить резольвенту в ряд Неймана:

1) $X = Y = C[0,1];\ (Ax)(t) = \sin\frac{\pi}{4} t \cdot x(1)$

2) $X = Y = L_1[0,1];\ (Ax)(t) = \int_0^1 t^6 s^3 x(s)\,ds$

3) $X=Y=l_2$; $Ax = \{x_1 + x_2, i(x_1 + x_2), 0, 0, \ldots\}$

РЕШЕНИЕ

$$1)\ X = Y = C[0,1];\ (Ax)(t) = \sin\frac{\pi}{4}t\cdot x(1);$$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}} = \frac{I}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$$

$$(Ax)(t) = (x(1) = C) = C\cdot\sin\frac{\pi}{4}t;$$

$$(A^2x)(t) = A(Ax)(t) = \sin\frac{\pi}{4}t\cdot(Ax)(1) = \sin\frac{\pi t}{4}\cdot\left(C\cdot\sin\frac{\pi\cdot 1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sin\frac{\pi t}{4}\cdot C = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(Ax)(t)$$

$$A^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot A;$$

$$(A^3x)(t) = A(A^2x)(t) = \sin\frac{\pi t}{4}\cdot(A^2x)(1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sin\frac{\pi t}{4}\cdot C = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot(Ax)(t)$$

$$A^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot A \quad \text{и т.д.}$$

$$A^k = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}\cdot A \mid \text{подставим в формулу ряда Неймана}$$

$$\sigma(A) = \{0;\ 1/\sqrt{2}\};\ \ \rho(A) = C\setminus\{0;\ 1/\sqrt{2}\};\ r_{\sigma(A)} = 1/\sqrt{2};$$

$$R_\lambda(A) = \frac{I}{\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k-1}}{\lambda^{k+1}}\cdot A = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{2}\lambda)^k} = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2}\cdot\frac{1}{1 - 1/\sqrt{2}\lambda} = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda\cdot(\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}})}$$

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Исследовать методами функционального анализа данное уравнение, например, интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода $(\lambda I - K)x = y$ в н.п. $\langle X, \|\cdot\|_X \rangle$:

- 1. Доказать *действие* оператора $K: X \to X$.
- 2. Оценить *норму* $\|K\|$ и доказать *непрерывность* о. K.
- 3. Доказать *компактность* о. K.
- 4. Решая уравнение $(\lambda I - K)x = y$, найти резольвентное м. $\rho(K)$ и вычислить резольвенту $R_\lambda(K)$; найти спектр $\sigma(K)$.
- 5. *Решить* уравнение $(\lambda I - K)x = y$ при помощи резольвенты.
- 6. Разложить резольвенту в *ряд Неймана* при $|\lambda| > \|K\|$.
- 7. Найти *приближенное решение* уравнения $(\lambda I - K)x = y$, взяв 3 первых члена разложения резольвенты в ряд Неймана.

ПРИМЕР.

Исследовать интегральное уравнение:

$$\lambda \cdot x(t) - \int_0^1 t^6 \cdot s^3 \cdot x(s)\, ds = \chi_{[0,\,0.2]}(t),\ x \in L_3[0,\,1],\ \lambda = 2$$

Введем обозначение: λx – Kx=y→ $(Kx)(t) = \int_0^1 t^6\, s^3\, x(s)\, ds$

1. Действие оператора К: X→X

$$X = L_3[0,1];\ x \in X \Rightarrow (Kx)(t) = \int_0^1 t^6\, s^3\, x(s)\, ds = C \cdot t^6,\ C = \int_0^1 s^3\, x(s)\, ds \Rightarrow$$

$$(Kx)(t) = C \cdot t^6,\ t \in [0,1]\ u\ \| t^6 \|_3 = \sqrt[3]{\int_0^1 | t^6 |^3\, dt} = \frac{1}{\sqrt[3]{19}};\ | C | < +\infty \Rightarrow$$

$$\| Kx \|_3 < +\infty \Rightarrow Kx \in X.$$

2. Оценить норму ||K||:

$$\|Kx\|_3=\|Ct^6\|_3=|C|\cdot\|t^6\|_3=\frac{1}{\sqrt[3]{19}}\cdot\left|\int_0^1 s^3\,x(s)\,ds\right|\le\frac{1}{\sqrt[3]{19}}\cdot\int_0^1|s^3\,x(s)|\,ds=\left(\int_0^1|s^3\,x(s)|\,ds=\|x\cdot y\|_1,\ y(s)=s^3\right)=$$

$$(\textit{нер-во Гёльдера}: \|x\cdot y\|_1\le\|x\|_p\cdot\|y\|_q:\ \tfrac{1}{p}+\tfrac{1}{q}=1;\ p=3\Rightarrow\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{q}=1\Rightarrow q=\tfrac{3}{2}=1{,}5)$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{19}}\cdot\|x\cdot s^3\|_1\le\frac{1}{\sqrt[3]{19}}\cdot\|x\|_3\cdot\|s^3\|_{1,5}=\frac{1}{\sqrt[3]{19}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{121}}\cdot\|x\|_3=\sqrt[3]{\frac{4}{2299}}\cdot\|x\|_3\Rightarrow\|K\|\le\sqrt[3]{\frac{4}{2299}}\Rightarrow$$

$$\|s^3\|_{1,5}=\left(\int_0^1|s^3|^{\frac{3}{2}}\,ds\right)^{\frac{2}{3}}=\left(\frac{2}{11}\right)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{\frac{4}{121}}\Rightarrow\|Kx\|_3\le\frac{1}{\sqrt[3]{19}}\cdot\sqrt[3]{\frac{4}{121}}\cdot\|x\|_3\Rightarrow\|K\|\le\sqrt[3]{\frac{4}{19\cdot121}}.$$

оператор К линеен (см предыдущий модуль) и ограничен $\Rightarrow$ *по критерию непрерывности л.о.:*

оператор К непрерывен и $\|K\|\le\sqrt[3]{\frac{4}{2299}}\approx0{,}12027$

3. Доказать компактность оп. К.

$D\subset X,\ D$ *– ограничено*: $\forall x\in D\ \|x\|_3\le M\left(D\subseteq\overline{B}_{\theta,M}\right)$, *тогда согласно критерию*

непрерывности оп.К $\quad K(D)$ *– ограничено*: $\|Kx\|_3\le\sqrt[3]{\frac{4}{2299}}\cdot\|x\|_3\le\sqrt[3]{\frac{4}{2299}}\cdot M=L\Rightarrow$

$y=Kx\in\overline{B}_{\theta,L}$ *и* $\ y=(Kx)(t)=C\,t^6\Rightarrow K(D)$ *ограничено и* $K(D)\subset imK=Sp(t^6)$ *– к/м л.п/п* $\Rightarrow$

по критерию локальной компактности: $K(D)$ *предкомпактно* $\Rightarrow$ *по опр. компактного оп.*

К – компактный оператор

4. Решить уравнение λx-Kx=y

(см. Слайд 8)

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{1}{\lambda(\lambda-0,1)}\int_0^1 t^6 s^3\, y(s)\,ds,\ t\in[0,1]$$

$$\sigma(K)=\{0;0,1\};\ \ \rho(K)=C\setminus\{0;0,1\}$$

$$R_\lambda(K)=\frac{I}{\lambda}+\frac{K}{\lambda(\lambda-0,1)}$$

5. Решить уравнение с помощью резольвенты.

$$y(t)=\chi_{[0;\,0,2]}(t)=\begin{cases}1,\ t\in[0;0,2]\\ 0,\ t\notin[0;0,2]\end{cases},\ \ \lambda=2$$

$$x(t)=\frac{1}{\lambda}y(t)+\frac{1}{\lambda(\lambda-0,1)}\int_0^1 t^6 s^3\, y(s)\,ds=0,5\,\chi_{[0;0,2]}(t)+\frac{1}{3,8}\int_0^1 t^6 s^3\,\chi_{[0;0,2]}(s)\,ds=$$

$$=0,5\,\chi_{[0;0,2]}(t)+\frac{1}{3,8}\int_0^{0,2} t^6 s^3\,ds=0,5\chi_{[0;0,2]}(t)+\frac{0,2^4}{3,8\cdot 4}t^6\approx 0,5\,\chi_{[0;0,2]}(t)+0,000105\cdot t^6,\ t\in[0,1]$$

6. Разложить резольвенту в ряд Неймана при $|\lambda|>||K||$

$$(Kx)(t)=t^6\int_0^1 s^3x(s)\,ds=C\,t^6;$$

$$(K^2x)(t)=K(Kx)(t)=t^6\int_0^1 s^3\,(Kx)(s)ds=Ct^6\int_0^1 s^3\,s^6\,ds=0{,}1C\,t^6\Rightarrow K^2x=0{,}1\,Kx$$

$$K^2=0{,}1\,K$$

$$(K^3x)(t)=K(K^2x)(t)=t^6\int_0^1 s^3\,(K^2x)(s)\,ds=0{,}1C\,t^6\int_0^1 s^3\,s^6\,ds=0{,}1^2\,Ct^6\Rightarrow K^3x=0{,}1^2\,Kx$$

$$K^3=0{,}1^2\,K$$

и т.д.

$$K^n=0{,}1^{n-1}\,K;\ \textit{подставим в ряд Неймана}:\ R_\lambda(K)=\frac{I}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K^n}{\lambda^{n+1}}=\frac{I}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0{,}1^{n-1}K}{\lambda^{n+1}}=$$

$$=\frac{I}{\lambda}+K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}1)^{n-1}}{\lambda^2\cdot\lambda^{n-1}}=\frac{I}{\lambda}+\frac{K}{\lambda^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(0{,}1)^{n-1}}{\lambda^{n-1}}=(n:=n-1)=\frac{I}{\lambda}+\frac{K}{\lambda^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(10\lambda)^n},\ |\lambda|>0{,}12027$$

$$R_\lambda(K)=\frac{I}{\lambda}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{K}{(10\lambda)^{n+1}},\ |\lambda|>0{,}12027$$

7. Найти приближённое решение:

$$x(t) \approx \frac{y(t)}{\lambda} + \frac{(Ky)(t)}{\lambda^2} + \frac{(Ky)(t)}{10\lambda^3} = \frac{y(t)}{\lambda} + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{10\lambda^3}\right)(Ky)(t),\ t \in [0,1]$$

$$\lambda = 2;\ y(t) = \chi_{[0,1]}(t);\ \ (Ky)(t) = \int_0^1 t^6 s^3 \chi_{[0;\,0,2]}(s)ds =$$

$$= t^6 \int_0^{0,2} s^3\, ds = \frac{0,2^4}{4} t^6 = 0,0004t^6$$

$$x(t) \approx 0,5\, \chi_{[0;0,2]}(t) + (0,25 + 0,0125)\cdot 0,0004t^6 = 0,5\, \chi_{[0;0,2]}(t) + 0,000105\, t^6$$

ПРИМЕР КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1) *Пусть* $x(t)=t^3$. *Вычислить норму вектора* x *в пространствах* $C^2[0,2]$; $L_2[0,2]$:

1.1. $X=C^2[0,2]$;

$$\|x\|=\sup_{[0,2]}|x(t)|+\sup_{[0,2]}|x'(t)|+\sup_{[0,2]}|x''(t)|=\sup_{[0,2]}|t^3|+\sup_{[0,2]}|3t^2|+\sup_{[0,2]}|6t|=8+12+12=32.$$

1.2. $X=L_2[0,2]$;

$$\|x\|_2=\sqrt{\int_0^2|x(t)|^2\,dt}=\sqrt{\int_0^2|t^3|^2\,dt}=\sqrt{\frac{2^7}{7}}=\frac{8\sqrt{14}}{7}.$$

2) *Задана последовательность* $x_n(t)=t^n$. *Определить, сходится ли* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *к* $x_0(t)=0$ *в пространствах* $X=C[0;\,2/3]$; $X=L_3[0,2]$?

Решение:

2.1. $X=C[0;2/3]$; $\left(x_n\to x_0,\ n\to\infty\right)\Leftrightarrow\left(\|x_n-x_0\|\to 0,\ n\to\infty\right)$

$$\|x_n-x_0\|_{\sup}=\sup_{[0;2/3]}|t^n-0|=\left(2/3\right)^n\to 0,\ n\to\infty;\ \text{сходится}$$

2.2. $X=L_3[0,2]$;

$$\|x_n-x_0\|_3^3=\int_0^2|t^n-0|^3\,dt=\frac{t^{3n+1}}{3n+1}\Bigg|_0^2=\frac{2^{3n+1}}{3n+1}\not\to 0,\ n\to\infty;\ \text{не сходится.}$$

3) Задано множество X вещественн ых функций, определённ ых на $[a,b]$, $\| x \| = \int_a^b | x(t) | dt$.

Установить, является ли $(X, \| x \|)$ – банаховым пространст вом, если

X – множество многочлено в степени $= 2$?

Решение.

Для решения воспользуе мся критерием банаховост и:

$\underline{(X, \| x \|) \text{банахово} \Leftrightarrow (X - \text{замкнутое } n/np - \text{во в б.п. } (Y, \| y \|))} \Leftrightarrow (\text{всякий абс. сх. ряд сходится})$

Выберем $Y = L_1[a,b]$ – б.п. с нормой $\| y \|_1 = \int_a^b | y(t) | dt$; $X = Sp\{1, t, t^2\}$;

$X \subset Y$ (все многочлены интегрируе мы на конечном промежутке $[a,b]$)

X – лин. подпростра нство в б.п. Y. Проверим замкнутост ь X в Y:

выберем сходящуюся последоват ельность $\{x_n\} \subset X$:

$x_n(t)$ – многочлен 2 степени : $x_n(t) = C_{0n} + C_{1n}t + C_{2n}t^2$, $C_{2n} \neq 0$;

Последоват ельность $\{x_n\}$ сходится : $x_n \to x_0$, $n \to \infty \Leftrightarrow$

$x_n(t) \to x_0(t)$, $n \to \infty$, $\forall t \in [a,b]$ в $Y \Rightarrow \| x_n - x_0 \| \to 0$, $n \to \infty \Rightarrow$

$x_0(t)$ тоже многочлен. $x_0(t) \in X$???

Сходимость многочлено в эквивалент на сходимости коэффициен тов

этих многочлено в (это уже сходимость числовых последоват ельностей

$\{C_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$, $j = 0,1,2$)

$x_n \to x_0 \Leftrightarrow (C_{0n} \to C_0;\ C_{1n} \to C_1;\ C_{2n} \to C_2,\ n \to \infty)$

Если $C_2 \neq 0 \Rightarrow x_0 \in X \Rightarrow X$ – замкнуто в $Y \Rightarrow X$ – банахово пр – во.

Если $\exists \{C_{2n}\}: C_{2n} \neq 0, \forall n; C_{2n} \to 0$, то x_0 – многочлен степени $< 2 \Rightarrow x_0 \notin X \Rightarrow$

X незамкнуто в $Y \Rightarrow X$ не является банаховым пр – вом;

$C_{2n} = \dfrac{1}{n} \neq 0$ и $C_{2n} = \dfrac{1}{n} \to 0$, $n \to \infty \Rightarrow X$ не является б.п.

- 4) Найти ядро, образ и норму оператора A

$$(Ax)(t)=\frac{t^2}{t^2+1}\cdot x(1)\ \textit{в пространстве}\ C[0,1]$$

$$1.1 \ker A = ?$$

$$Ax=0\Rightarrow\frac{t^2}{t^2+1}x(1)=0,\forall t\in[0,1]\Rightarrow x(1)=0\Rightarrow$$

$$\ker(A)=\{x\in C[0,1]:\ x(1)=0\}$$

$$1.2.\ \textit{образ оператора}\ A=imA$$

$$imA=\{y\in C[0,1]:\ y(t)=(Ax)(t)\}$$

$$\frac{t^2}{t^2+1}x(1)=y(t),\ \forall t\in[0,1]\Rightarrow\left(\textit{обозн.}\ x(1)=C\right)$$

$$y(t)=C\cdot\frac{t^2}{t^2+1}=C\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)=C-\frac{C}{t^2+1},t\in[0,1]\Rightarrow$$

$$imA=Sp\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)=\left\{C_1+\frac{C_2}{t^2+1},\ C_2=-C_1\right\}$$

1.3. *Норма оператора.*

$(Ax)(t) = \dfrac{t^2}{t^2+1}x(1) -$ *линейный оператор;*

лин. оператор непрерывен $\Leftrightarrow$ *он ограничен;*

а) если $\exists M > 0 : \forall x \in X = C[0,1] \quad \| Ax \| \le M \cdot \| x \|,$

то оператор A *ограничен* $\Rightarrow$ *непрерывен*

Оценим модуль $\left|(Ax)(t)\right| = \left|\dfrac{t^2}{t^2+1}x(1)\right| = \left|\dfrac{t^2}{t^2+1}\right| \cdot |x(1)| \le \sup\limits_{[0,1]}\left|\dfrac{t^2}{t^2+1}\right| \cdot |x(1)| = 0,5\,|x(1)| \le 0,5 \cdot \| x \|$

переходя к $\sup$ *по* $t \in [0,1]$ *в левой части, получим:* $\| Ax \| \le 0,5 \| x \| \quad (*)$

б) $\forall x \in X \; \| Ax \| \le 0,5 \| x \| \Rightarrow \| A \| \le 0,5 \; (M = 0,5)$

Поскольку норма $\| A \| -$ *наименьшая из всех констант ограниченности, то*

$\| Ax \| \le \| A \| \cdot \| x \|, \quad \forall x \in C[0,1]$

$\exists x_0(t) : \| Ax_0 \| = 0,5; \; \| x_0 \| = 1?$

Выберем $x_0(t) \equiv 1 : \; \| x_o \| = 1; \| Ax_0 \| = \sup\limits_{[0,1]} \left| \dfrac{t^2}{t^2+1} \right| = 0,5,$ *тогда:*

$\| Ax_0 \| \le \| A \| \cdot \| x_o \| \Rightarrow 0,5 \le \| A \| \cdot 1 \Rightarrow \| A \| \ge 0,5 \quad (**)$

Из $(*)$ *и* $(**) \Rightarrow \| A \| = 0,5$

5) Найти спектр, резольвентное множество и резольвенту оператора

$$(Ax)(t) = (2t^2 - t)\cdot x(t);$$

Решение.

Рассмотрим операторное уравнение II рода:

$\lambda x - Ax = y,\ x, y \in C[0,1]$

$\lambda x(t) - (2t^2 - t)x(t) = y(t),\ t \in [0,1];$

$$x(t) = \frac{y(t)}{\lambda - (2t^2 - t)},\ t \in [0,1];$$

Резольвента оператора A:

$$R_\lambda(Ay)(t) = \frac{y(t)}{\lambda - (2t^2 - t)},\ t \in [0,1];$$

спектр A = значениям функции $2t^2 - t$ на $[0,1]$:

$g(t) = 2t^2 - t;\ g(0) = 0;\ g(1) = 1;$

$g'(t) = 4t - 1 = 0 \Rightarrow t = 0,25 \in [0,1]$

$g(0,25) = 0,125 - 0,25 = -0,125 = -\frac{1}{8} < 0$

$g(t) \in [-0,125;\ 1] \Rightarrow$ *спектр* $\sigma(A) = [-0,125;\ 1]$

резольвентное множество

$\rho(A) = C \setminus [-0,125;\ 1]$