Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Если функции f(x) и g(x) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0 и обращаются в ноль в этой точке $f(x_0)=g(x_0)=0$. Пусть $g'(x) \neq 0$

в окрестности точки x_0. Если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l}$$

Пример:

1. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{36x^2/2}{2x^2} = 9$$

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{36 \cos 6x}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

Правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$

Если функции f(x) и g(x) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0 и пусть в этой окрестности $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$ и $g'(x) \neq 0$

Если $\exists \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, то $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l}$

Пример:

1. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{tg3x}{tg5x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\cos^2 5x}{5\cos^2 3x} = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 10x}{1+\cos 6x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \frac{3}{5}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-10\sin 10x}{-6\sin 6x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 10x}{\sin 6x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{10\cos 10x}{6\cos 6x} = \frac{5}{3}$$

Возрастание и убывание функции

Теорема

(необходимое условие возрастания и убывания функции)

Если дифференцируемая на интервале (a,b) функция
y=f(x) возрастает (убывает), то $f'(x) \geq 0 \; (f'(x) \leq 0)$ для $\forall x \in (a,b)$.

Теорема

(достаточное условие монотонности функции)

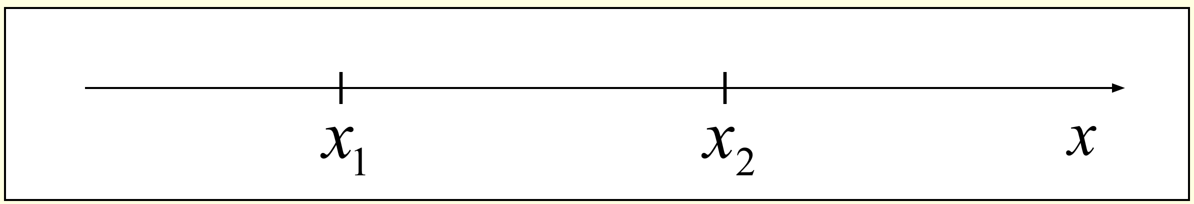
Если функция y=f(x) дифференцируемая на интервале
(a,b) и $f'(x) > 0 \; (f'(x) < 0) \; \forall x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a,b).

Выпуклость функции

Определение

Отрезком $[x_1, x_2]$ называется множество точек, удовлетворяющих равенству

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \qquad 0 \le \lambda \le 1$$



$$\lambda = 0 \Rightarrow x = x_2$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow x = x_1$$

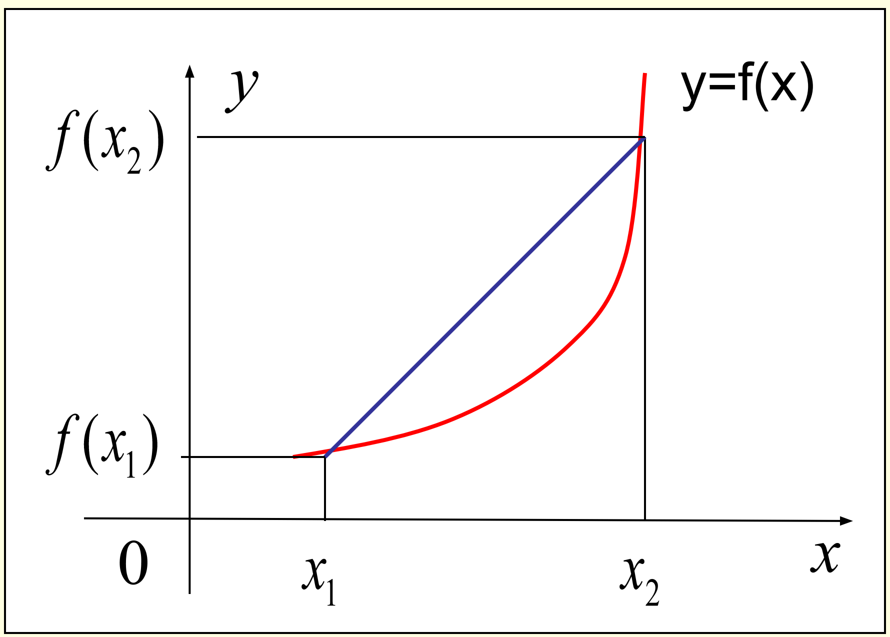
$$\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Выпуклость функции

Определение

Функция y=f(x) называется выпуклой вниз (вогнутой) на промежутке X, если для любых двух значений $x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad 0 \le \lambda \le 1$$



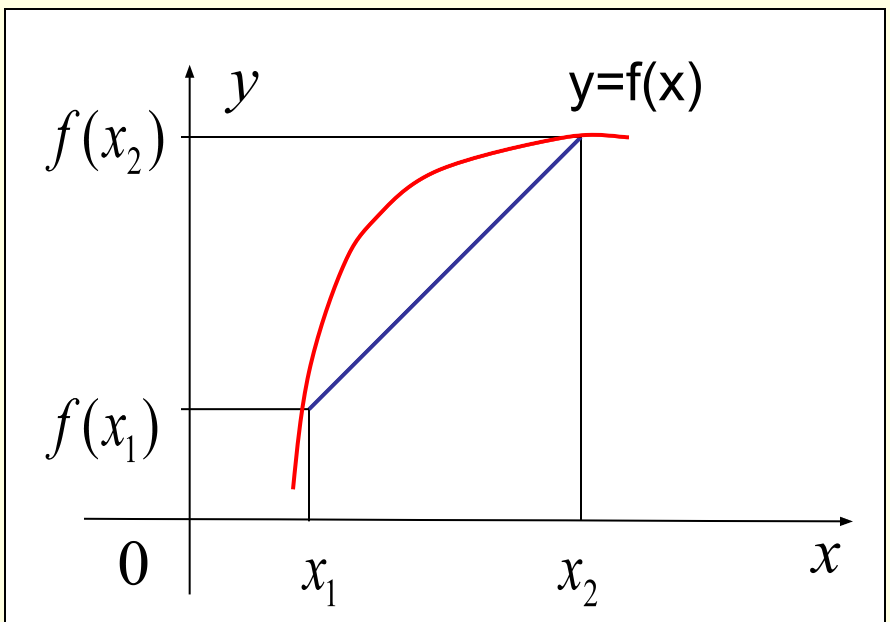
Если функция выпукла вниз, то отрезок, соединяющий любые точки графика, целиком лежит над графиком функции.

Выпуклость функции

Определение

Функция y=f(x) называется выпуклой вверх (выпуклой)
на промежутке X, если для любых двух значений
$x_1, x_2 \in X$ из этого промежутка выполняется неравенство

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) \qquad 0 \leq \lambda \leq 1$$



Если функция выпукла вниз, то отрезок, соединяющий любые точки графика, целиком лежит под графиком функции.

Выпуклость функции

Теорема

(достаточное условие выпуклости функции вверх(вниз))

Если функция y=f(x) $\forall x \in (a,b)$ имеет $f''(x) > 0 (f''(x) < 0)$, то эта функция выпукла вниз(вверх) на интервале (a,b).

Точки перегиба

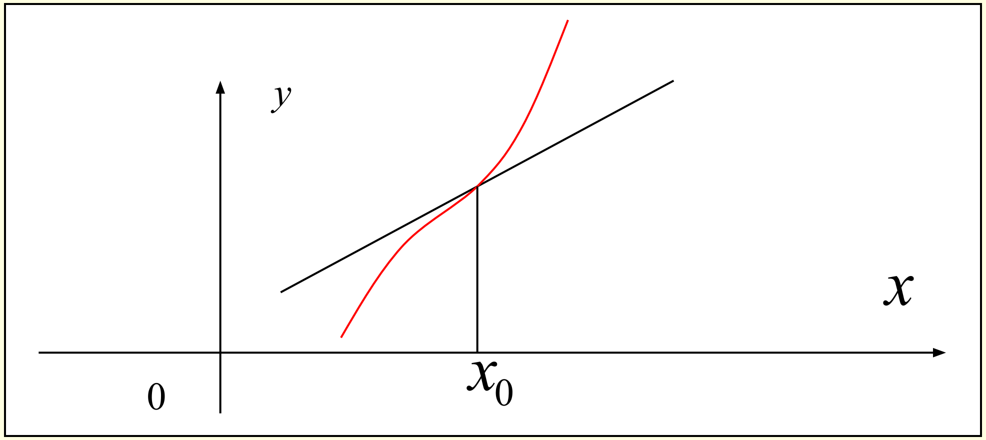
Определение

Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы,в которых функция выпукла вниз и вверх.

Теорема

(достаточное условие существования точки перегиба)

Если $f''(x)$ при переходе через точку x_0 , в которой она равна нулю или не существует меняет знак, то точка x_0 является точкой перегиба ее графика.



Максимум и минимум функции

Определение

Точка x_0 называется точкой максимума функции y=f(x), если $\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < f(x_0)$

Определение

Точка x_0 называется точкой минимума функции y=f(x), если $\exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > f(x_0)$

Максимум(минимум) функции называется экстремумом функции.

Функция может иметь экстремум лишь во внутренних точках области определения. Поэтому часто экстремум функции называют локальным экстремумом.

Максимум и минимум функции

Необходимое условие экстремума

Для того, чтобы функция y=f(x) имела экстремум в точке x_0 необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю $f'(x_0) = 0$ или не существовала.

Определение

Точки, в которых производная функции равна нулю или не существует, называются критическими.

Максимум и минимум функции

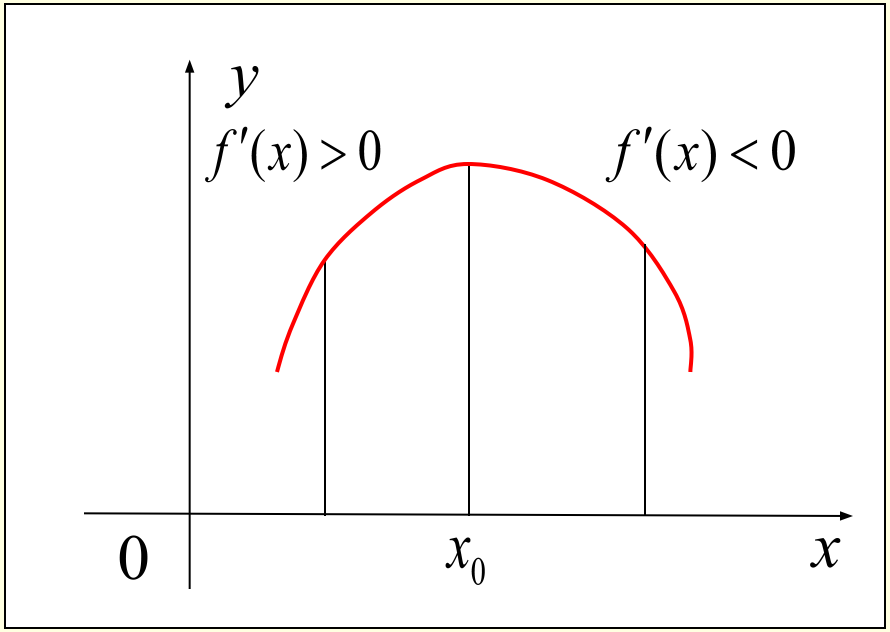
Теорема

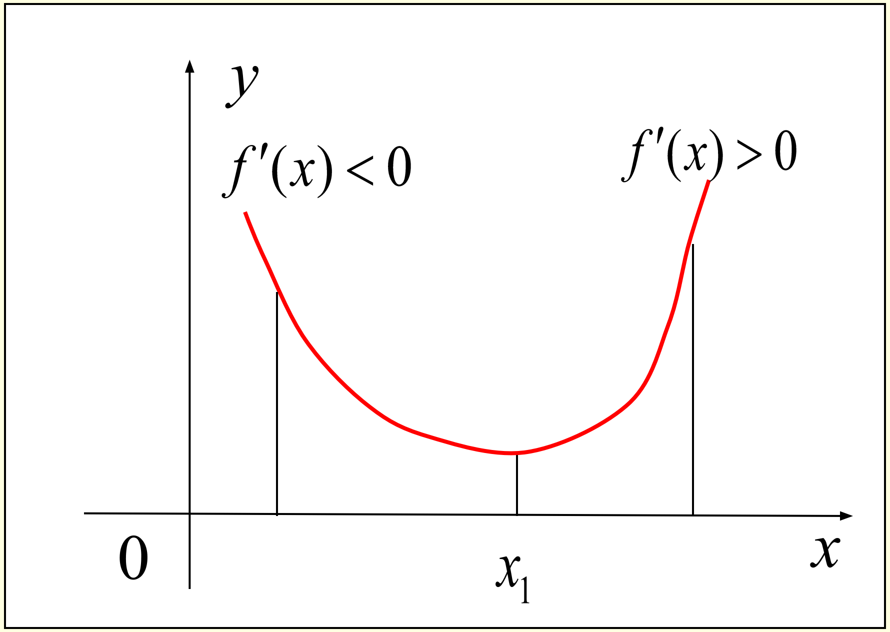
(1-ое достаточное условие экстремума)

Если непрерывная функция y=f(x) дифференцируема в некоторой - окрестности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) производная $f'(x)$ меняет знак с пляса на минус, то x_0 - точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 - точка минимума.

Максимум и минимум функции

Первое достаточное условие экстремума





x_0 - точка максимума

x_1 - точка минимума

Максимум и минимум функции

Правило исследования функции на экстремум

0. Найти область определения функции y=f(x)

1. Найти критические точки функции y=f(x)

2. Выбрать те, которые являются внутренними точками области определения функции

3. Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от исследуемой внутренней критической точки

4. Найти экстремумы функции y=f(x)

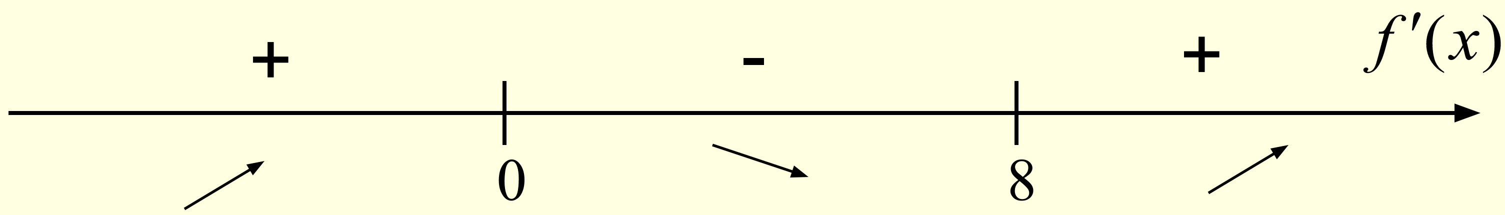
Найти экстремум функции

$$y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$$

$$D(y): R$$

$$y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$$

y' не существуют при $x_1 = 0$ и $x_2 = 8$



$x_1 = 0$ - точка максимума $y_{\max} = y(0) = 0$ - максимум функции

$x_1 = 8$ - точка минимума $y_{\min} = y(8) = -\dfrac{4}{3}$ - минимум функции

Максимум и минимум функции

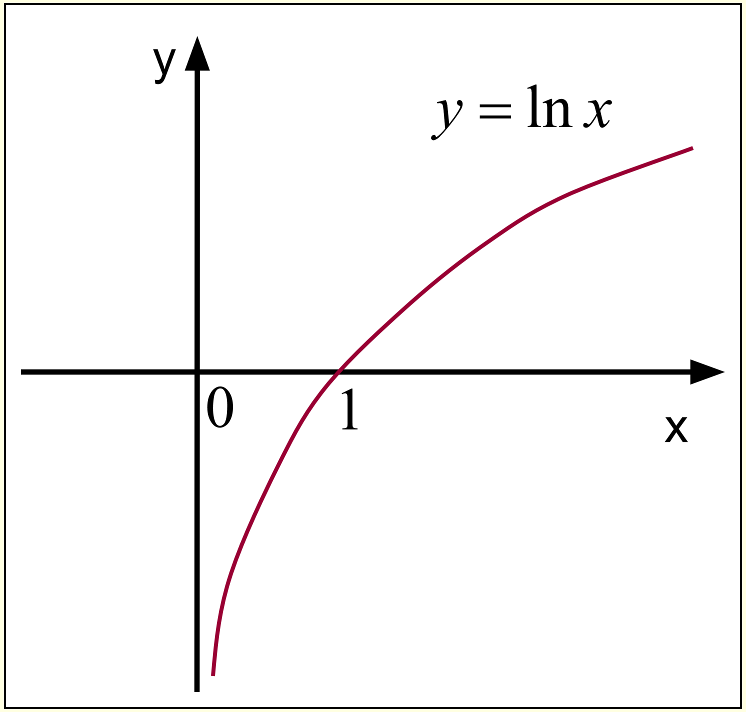
Теорема

(2-ое достаточное условие экстремума)

Если в точке x_0 $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0)$ существует и $f''(x_0) \neq 0$, то если $f''(x_0) < 0$, то в точке x_0 функция имеет максимум, если $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция имеет минимум.

Вертикальная асимптота

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, быть может, саму эту точку) и хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$. Тогда x= x_0 является вертикальной асимптотой графика функции y=f(x).



Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва функции или на концах ее области определения

y=ln x $\quad x\in(0;+\infty)$

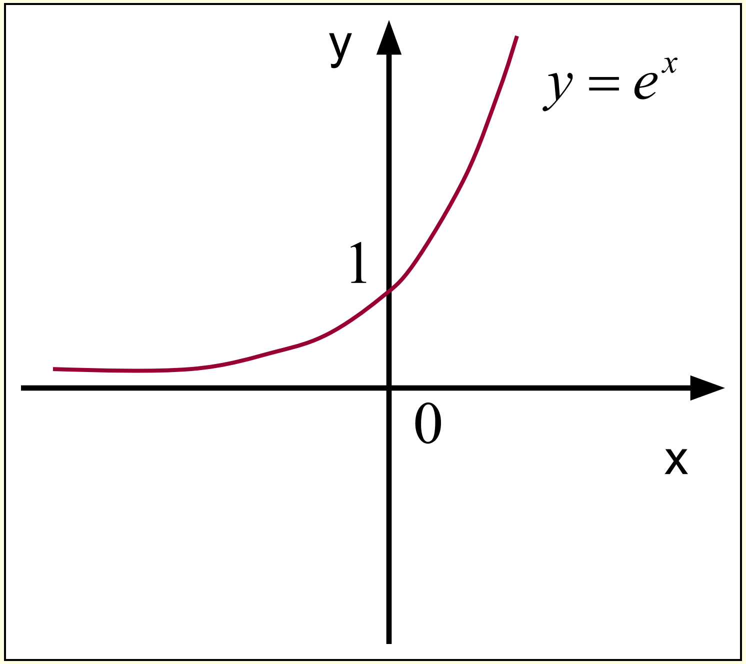
$$\lim_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$$

x= 0 – вертикальная асимптота графика функции y=lnx

Горизонтальная асимптота

Пусть функция y=f(x) определена при достаточно больших x и $\exists \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.Тогда прямая y=b является горизонтальной асимптотой графика функции y=f(x).

Если конечен только один из пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b_{Л}$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b_{П}$ то функция имеет лишь левостороннюю $y=b_л$ или правостороннюю $y=b_п$ горизонтальную асимптоту.



$$y = e^x$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

y= 0 – левосторонняя горизонтальная асимптота графика функции $y = e^x$

Наклонная асимптота

Если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ функция может иметь наклонную асимптоту.

Пусть функция y=f(x) определена при достаточно больших x и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$. Тогда y=kx+b является наклонной асимптотой графика функции y=f(x).

Наклонная асимптота так же может быть правосторонней или левосторонней.

Исследование на наличие асимптот

$$\boxed{y = x \cdot e^{x}}$$

Так как $D(y):(-\infty;+\infty)$, то вертикальных асимптот нет

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot e^{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{x} = \begin{cases} +\infty, x \to +\infty \\ 0, x \to -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to-\infty} x\cdot e^{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

y=0 – горизонтальная левосторонняя асимптота

Исследование на наличие асимптот

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

Так как $D(y):(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$, то

x=1 – вертикальная асимптота при $x\to 1-0$, $x\to 1+0$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2}{x-1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=1$$

y=x+1 – наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$

Общая схема исследования функции и построения графика

Найти область определения функции

Найти (если возможно) точки пересечения графика с
осями координат

Найти интервалы знакопостоянства функции

Исследовать функцию на четность (нечетность)

Найти асимптоты графика функции

Найти интервалы монотонности функции

Найти экстремумы функции

Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции

Исследовать функцию и построить ее график

$$y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$$

1. $D(y) = (-\infty; +\infty)$

2. Точки пересечения с осями координат

OX: y=0 $\Rightarrow \sqrt[3]{x^3 - 3x^2} = 0$

$$x^2(x-3) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 3$$

$(0,0); (3,0)$ - точки пересечения с осью OX

OY: x=0 $\Rightarrow f(0) = \sqrt[3]{0^3 - 3 \cdot 0^2} = 0$

$(0,0)$ - точка пересечения с осью OY

3. $f(x) > 0 \Rightarrow x^2(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (3; +\infty)$

$f(x) < 0 \Rightarrow x^2(x-3) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty; 0) \cup (0; 3)$

Исследовать функцию и построить ее график

4. $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

$$f(-x)=\sqrt[3]{(-x)^3-3(-x)^2}=\sqrt[3]{-x^3-3x^2}$$

$f(x)\neq f(-x); -f(x)\neq f(-x)$ - функция ни четна, ни нечетна

5. Вертикальных асимптот нет, так как функция непрерывна

$$\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3-3x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}x\cdot\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=\pm\infty$$ $\Rightarrow$ горизонтальных асимптот нет

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-3x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3-3x^2}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3}{\sqrt[3]{\frac{(x^3-3x^2)^2}{x^6}}+\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}+1}=-1$$

наклонная асимптота

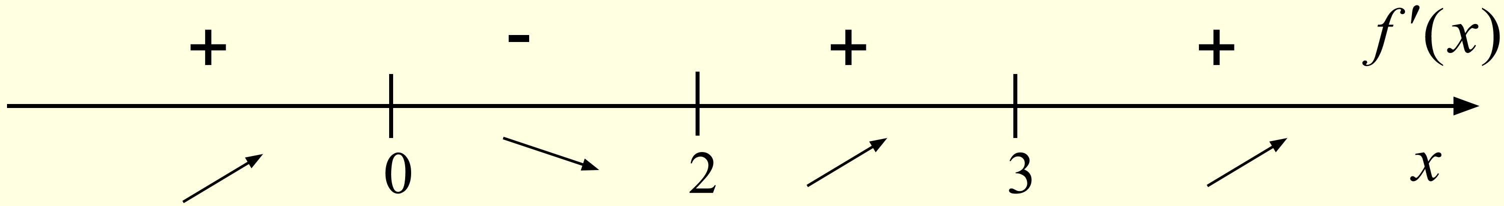
$$y=x-1$$

Исследовать функцию и построить ее график

6. $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2 - 6x}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}} = \frac{x(x-2)}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}}$

$y' = 0$ при $x_1 = 0; x_2 = 2$

y' не существует при $x = 3$



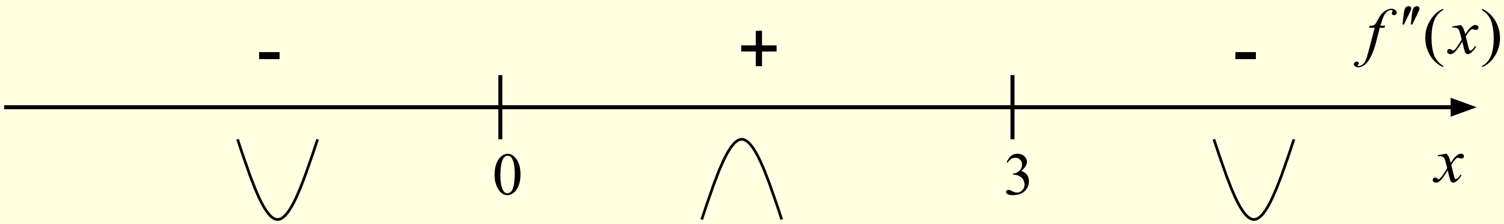
$x = 0$ - точка максимума $y_{\max} = y(0) = 0$ - максимум функции

$x = 2$ - точка минимума $y_{\min} = y(2) = -\sqrt[3]{4}$ - минимум функции

Исследовать функцию и построить ее график

7. $y'' = -\dfrac{2}{x^{\frac{4}{3}} \cdot (x-3)^{\frac{5}{3}}}$

y'' не существует при $x_1 = 0; x_2 = 3$



$x = 0 \quad y(0) = 0$

$x = 3 \quad y(3) = 0$

- точки перегиба

Исследовать функцию и построить ее график