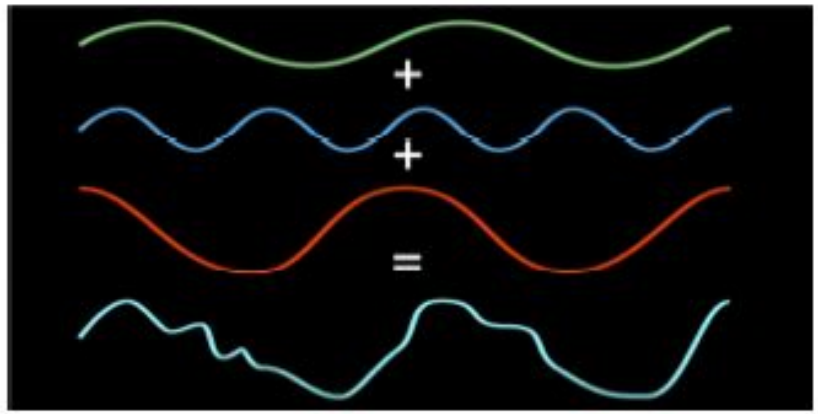
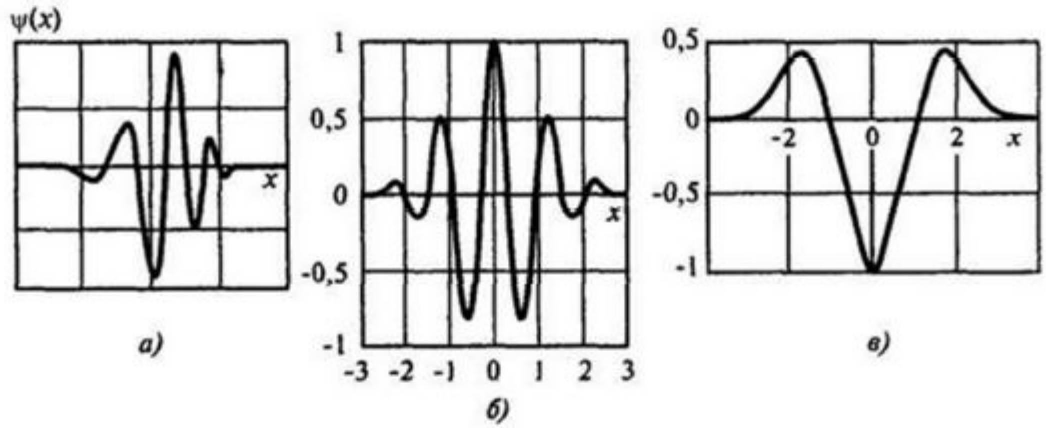
ОБРАБОТКА И РАСПОЗНАВАНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Леонид Моисеевич Местецкий
профессор
кафедра математических методов прогнозирования ВМК МГУ
кафедра интеллектуальных систем МФТИ

Генерация признаков на основе вейвлет-преобразования



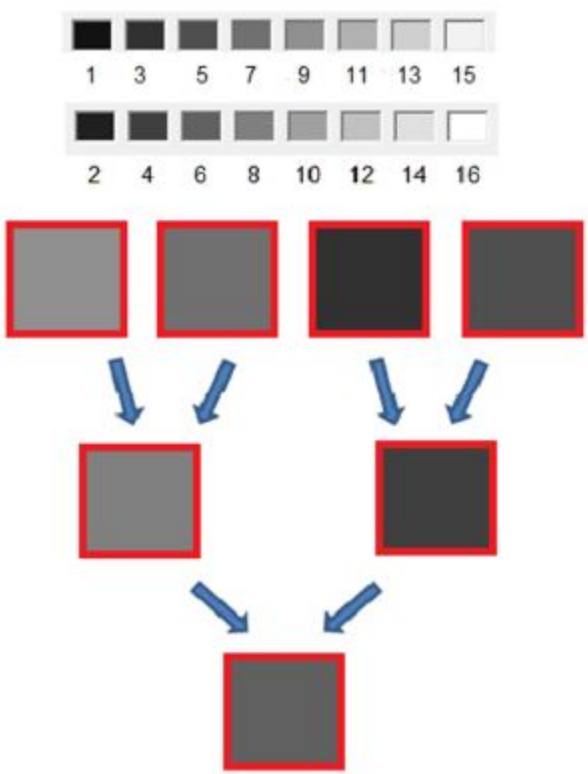
Синусоидальная волна – основа Фурье-преобразования



Wavelet - короткая волна, волнишка, всплеск

Преобразование Хаара на основе попарного усреднения

Пример изображения из одной строки в 4 пиксела



16-цветная палитра

9	**7**	**3**	**5**

8	**4**	1	-1

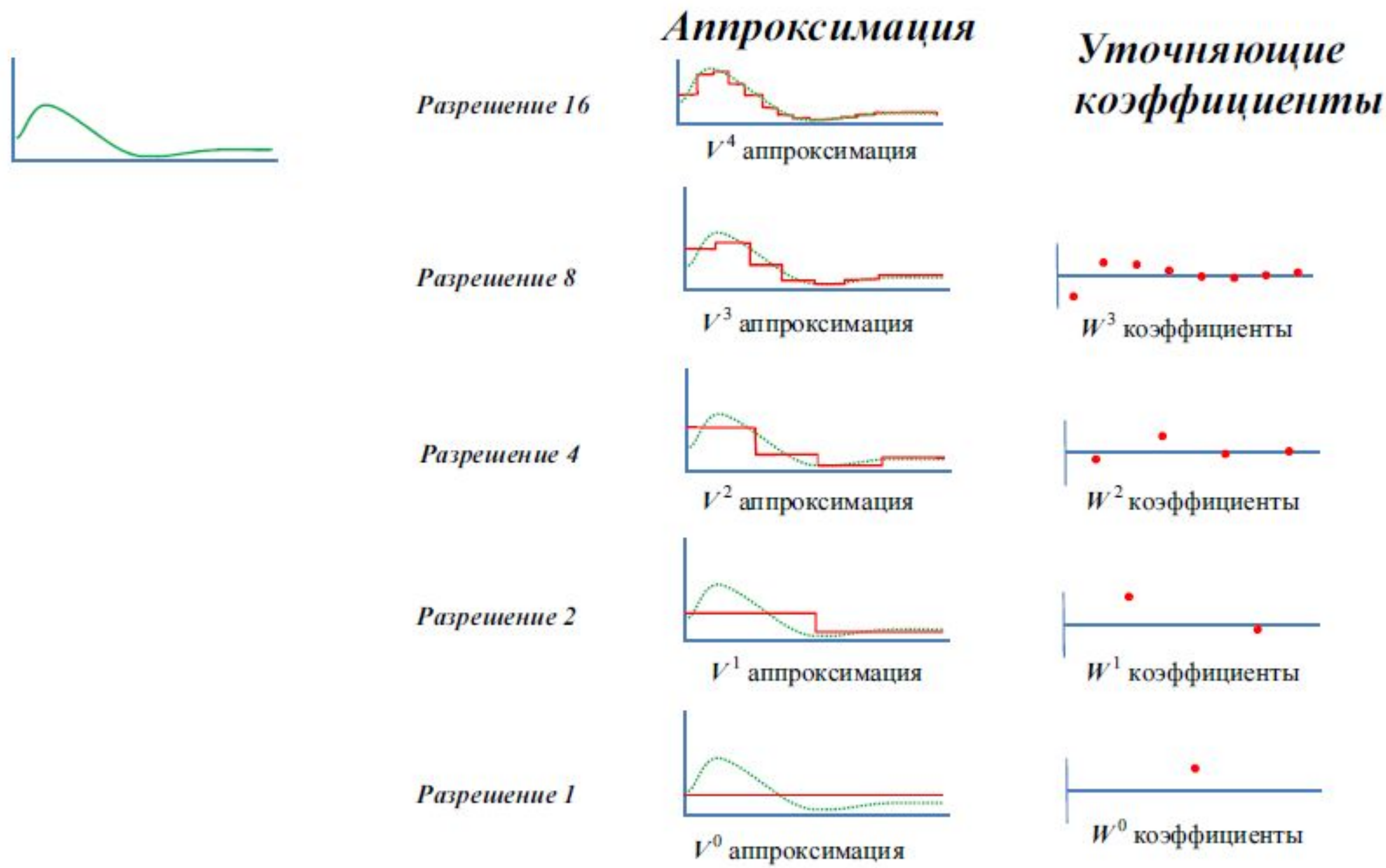
6	2	1	-1

Черный квадрат Малевича

Последовательное уменьшение разрешения

Разрешение	Средние значения	Уточняющие коэффициенты
4	9 7 3 5	
2	8 4	1 -1
1	6	2

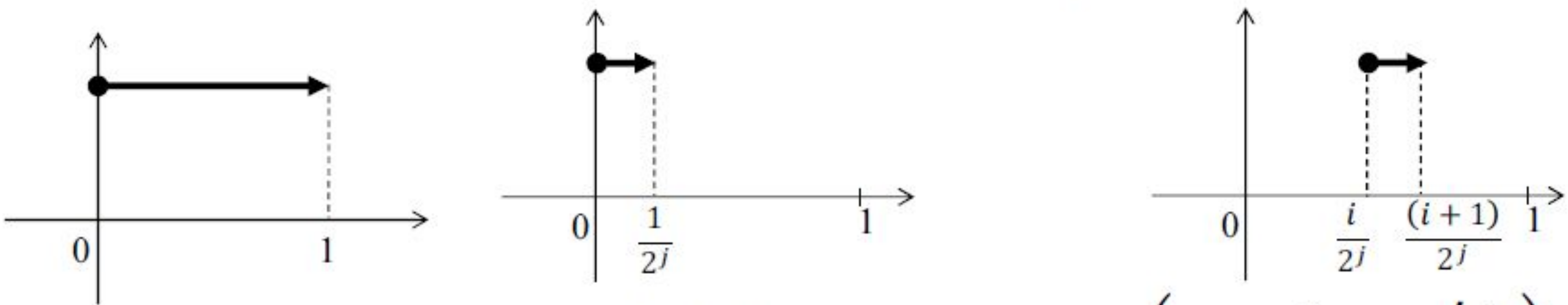
Аппроксимация сигнала кусочно-постоянными функциями



Функции одномерного базиса Хаара

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\phi_i^j(x) = \phi(2^j x - i) = \phi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$



$\phi(x)$ $\qquad$ $\phi(2^j x)$ $\qquad$ $\phi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right)$

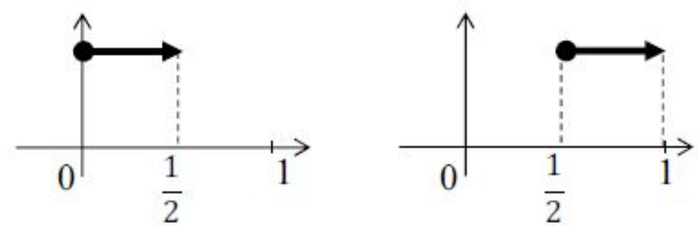
Пространство функций

V^j - пространство всех кусочно-постоянных функций

на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^j}$

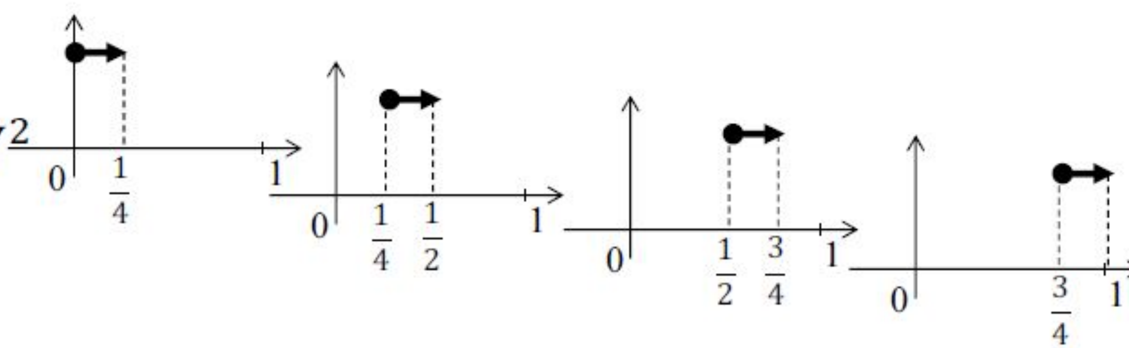
$$\phi_i^j(x) \in V^j, \quad i = 0, 1, \ldots, 2^j - 1$$

$$\phi_0^0(x) = \phi(x) \in V^0 \,,$$



$$\left.\begin{aligned} \phi_0^1(x) &= \phi(2x) \\ \phi_1^1(x) &= \phi(2x-1) \end{aligned}\right\} \in V^1$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_0^2(x) &= \phi(4x) \\ \phi_1^2(x) &= \phi(4x-1) \\ \phi_2^2(x) &= \phi(4x-2) \\ \phi_3^2(x) &= \phi(4x-3) \end{aligned}\right\} \in V^2$$



Скалярное произведение в пространстве функций

$$f(x),\ \ g(x) \in V^j\,,$$

$$(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

Ортогональное дополнение в пространстве функций

V^j - пространство всех кусочно-постоянных функций на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^j}$

V^{j+1} - пространство всех кусочно-постоянных функций на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{2^{j+1}}$

$$V^j \subset V^{j+1}$$

W^j – ортодополнение для V^j в V^{j+1} – это множество всех функций в V^{j+1}, ортогональных всем функциям из V^j.

Множество вейвлетов

Функции $\phi_i^j(x)$ образуют базис в пространстве V^j.

Определение. Совокупность всех линейно независимых функций $\psi_i^j(x)$, на которые натянуто W^j (базис), называется множеством вейвлетов.

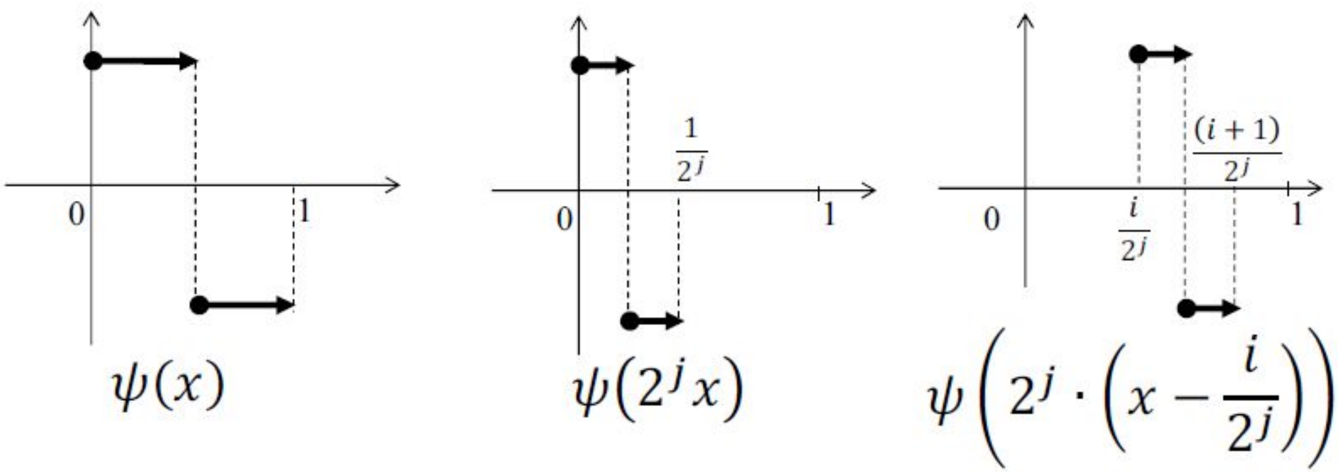
Свойства.

1. Базисные функции ψ_i^j из W^j вместе с базисными функциями ϕ_i^j из V^j образуют базис V^{j+1}
2. Любая базисная функция ψ_i^j из W^j ортогональна любой базисной функции ϕ_i^j из V^j.

Базис Хаара в ортодополнении

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le x < 1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$\psi_i^j(x) = \psi(2^j x - i) = \psi\left(2^j \cdot \left(x - \frac{i}{2^j}\right)\right), \quad i = 0, 1, \dots, 2^j - 1$$



Пример разложения Хаара

$\tau(x) = [\mathbf{9\ \ 7\ \ 3\ \ 5}]$,

$\tau(x) \in V^j, j = 2$.

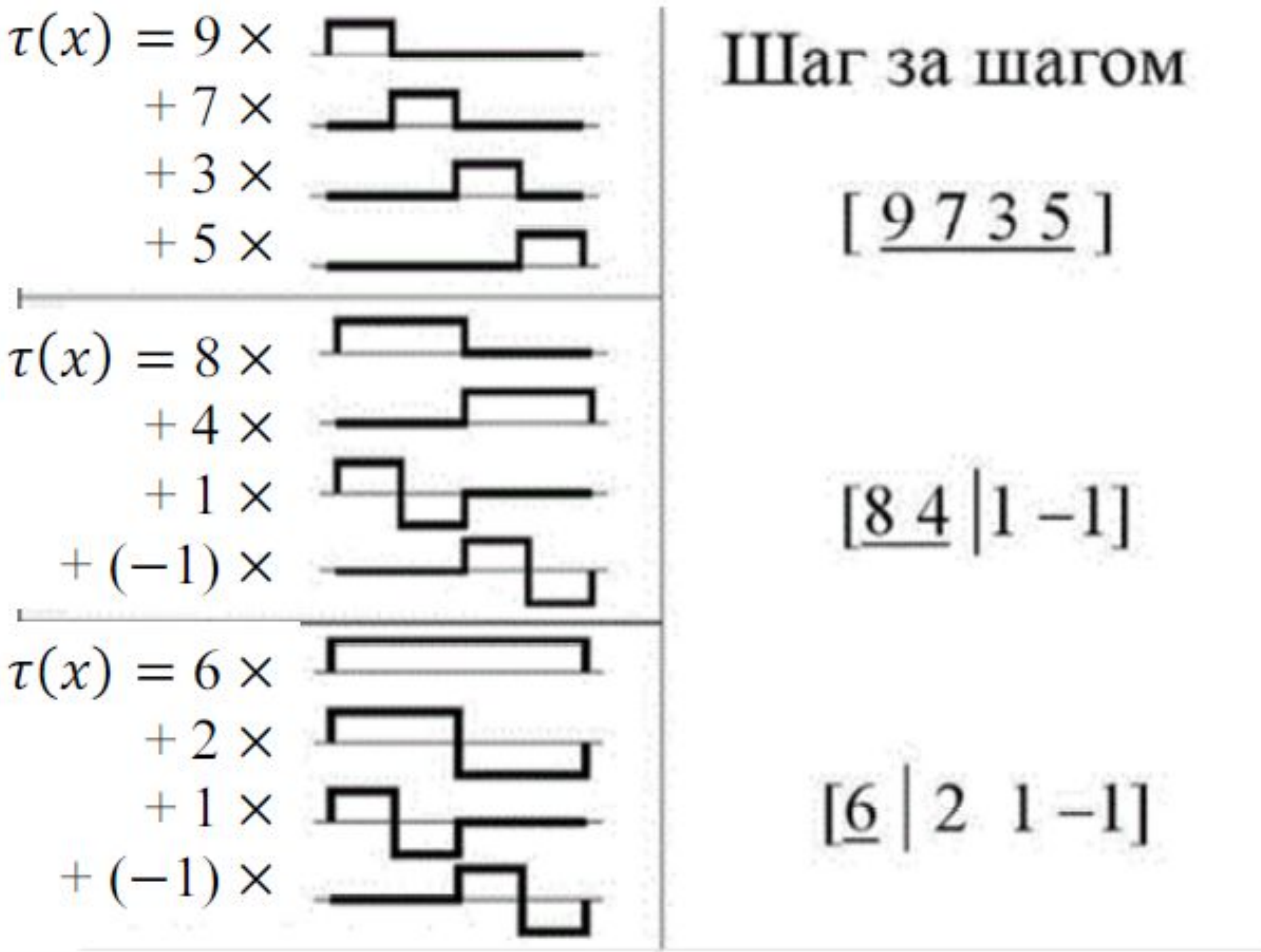
$\tau(x)$ – кусочно-постоянная функция на $[0,1)$ с интервалом постоянства $\frac{1}{4}$.

$$V^2 = V^1 \oplus W^1 = (V^0 \oplus W^0) \oplus W^1$$

$$\tau(x) = c_0^2 \cdot \phi_0^2(x) + c_1^2 \cdot \phi_1^2(x) + c_2^2 \cdot \phi_2^2(x) + c_3^2 \cdot \phi_3^2(x) =$$
$$= c_0^1 \cdot \phi_0^1(x) + c_1^1 \cdot \phi_1^1(x) + d_0^1 \cdot \psi_0^1(x) + d_1^1 \cdot \psi_1^1(x) =$$
$$= c_0^0 \cdot \phi_0^0(x) + d_0^0 \cdot \psi_0^0(x) + d_0^1 \cdot \psi_0^1(x) + d_1^1 \cdot \psi_1^1(x)$$

$\phi_0^0(x), \psi_0^0(x), \psi_0^1(x), \psi_1^1(x)$ – базис Хаара для V^2

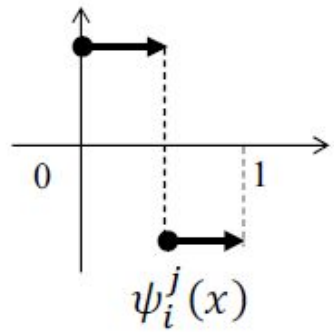
Пример разложения Хаара

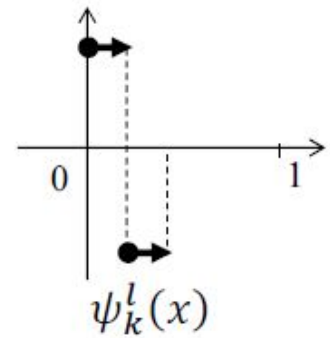


Ортогональность базиса Хаара

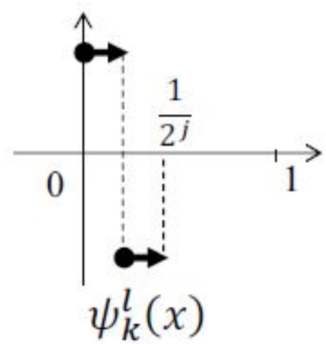
$$\left(\psi_i^j(x), \psi_k^l(x)\right) = 0$$

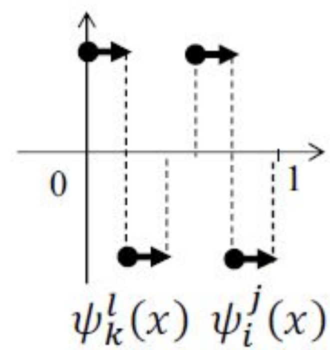
Случай $l \neq j$





Случай $l = j$ и $i \neq k$





Нормирование базиса Хаара

$$\phi_i^j(x) = \sqrt{2^j} \cdot \phi(2^j x - i)$$
$$\psi_i^j(x) = \sqrt{2^j} \cdot \psi(2^j x - i)$$

Тогда

$$\left(\phi_i^j(x), \phi_i^j(x)\right) = 1$$
$$\left(\psi_i^j(x), \psi_i^j(x)\right) = 1$$

Разложение

$$[6 \quad 2 \quad 1 \; -1]$$

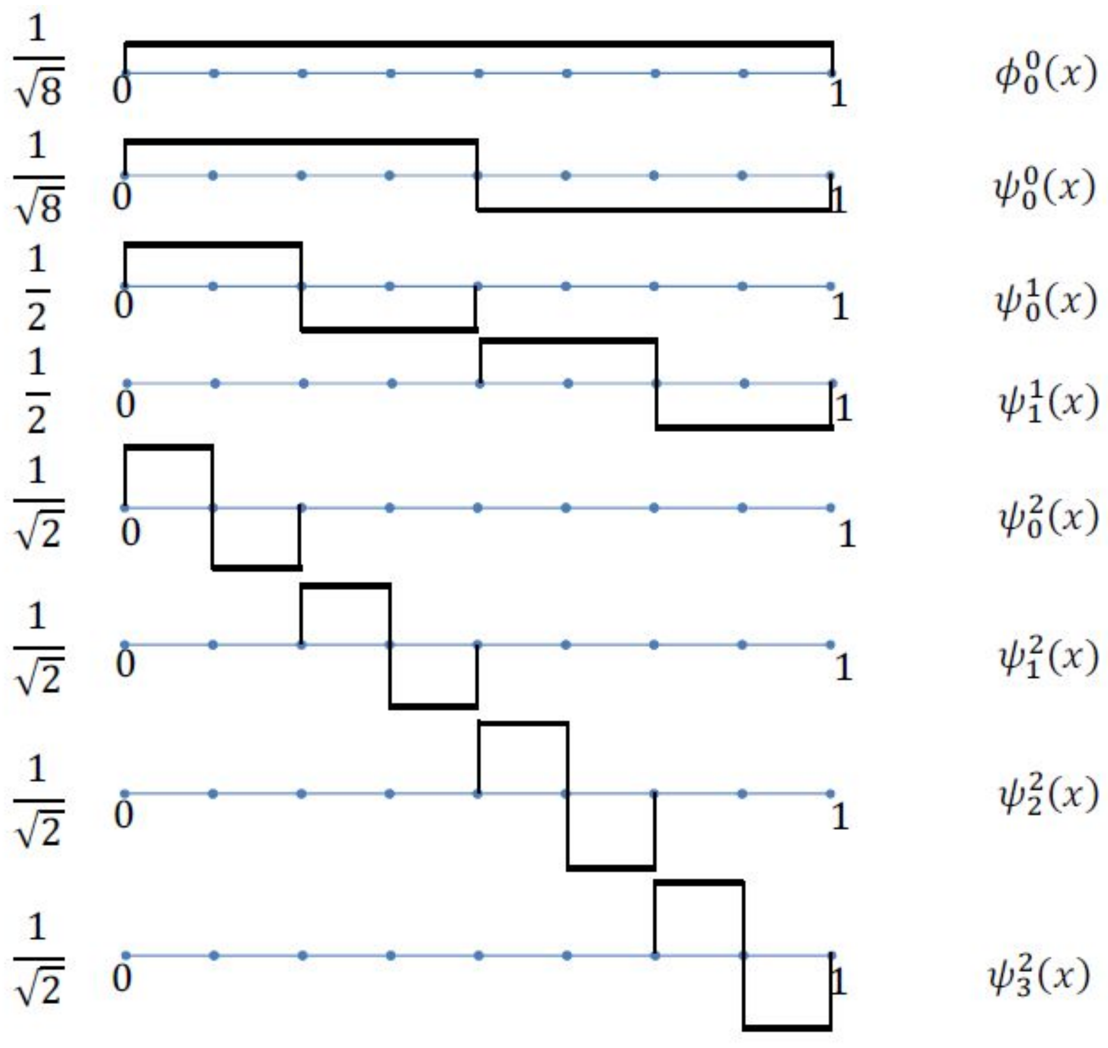
превращается в

$$\left[6 \quad 2 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}\right]$$

Матрица преобразования Хаара

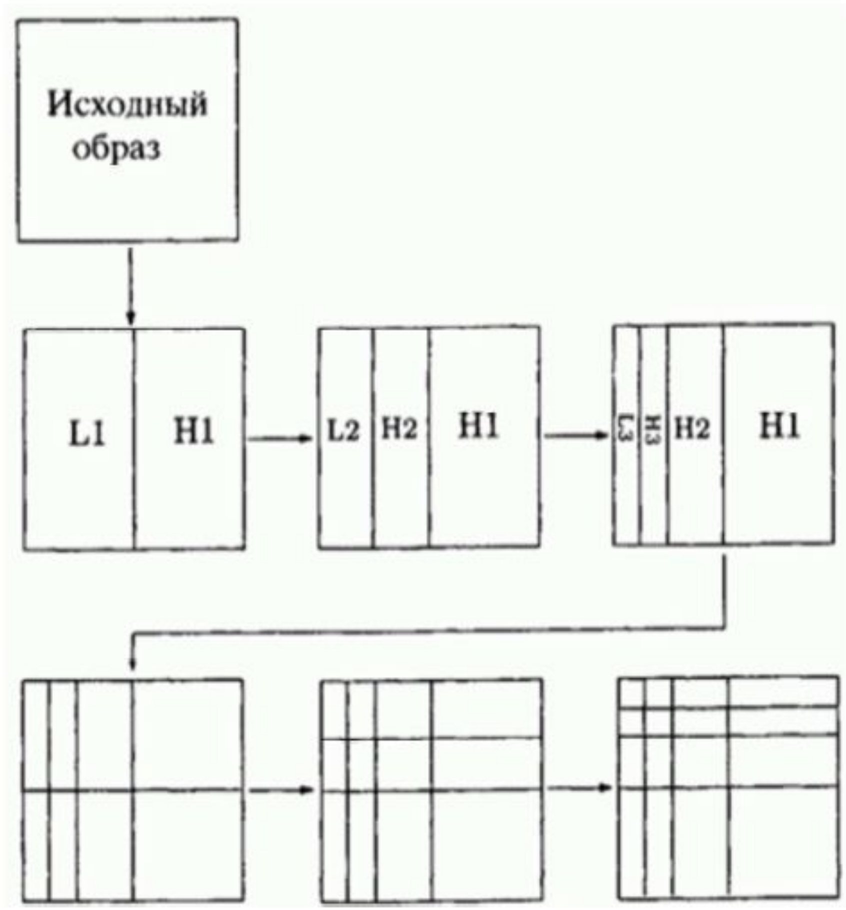
$$W = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Базис Хаара в пространстве V²



Двумерный базис Хаара

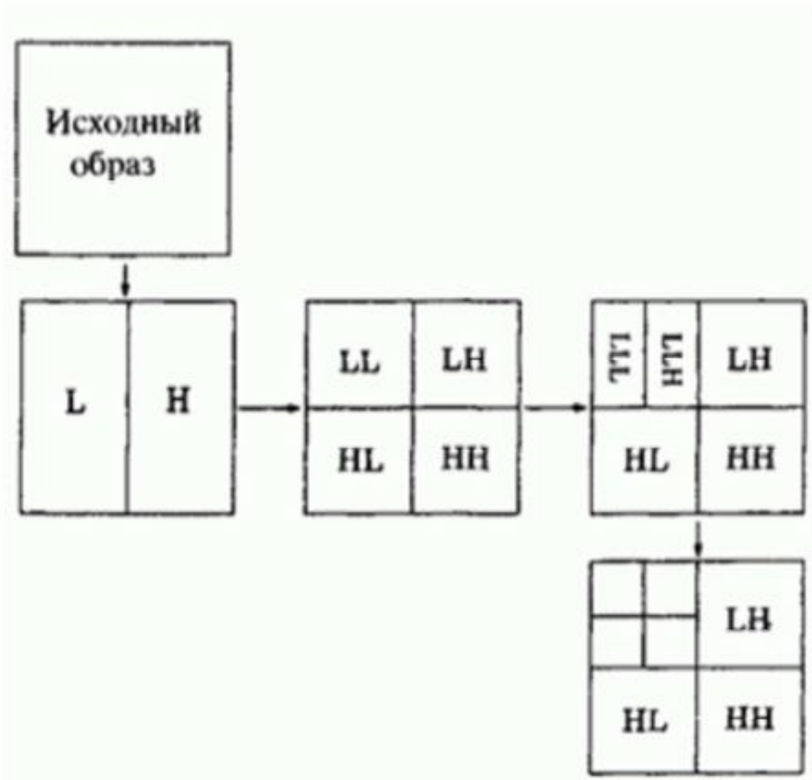
Стандартное разложение:



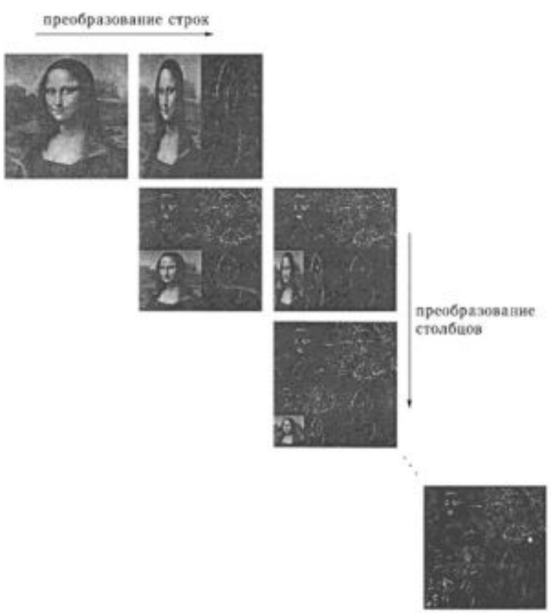
1. Начинается вычислением вейвлетных преобразований всех строк изображения.
2. После этого стандартный алгоритм производит вейвлетное преобразование каждого столбца.

Двумерный базис Хаара

Нестандартное (пирамидальное) разложение:



Пирамидальное разложение вычисляет вейвлетное преобразование, применяя итерации поочередно к строкам и столбцам.

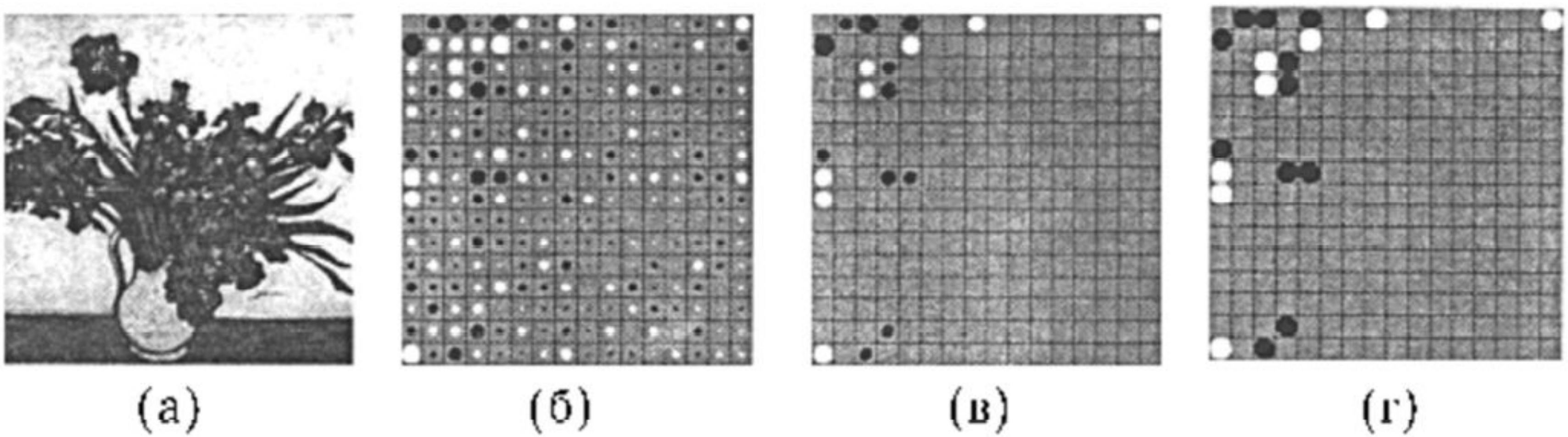


Сжатие изображения вейвлетами Хаара

(а) (б) (в) (г)

(а) Исходное изображение
(б) 19% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 5% в - норме
(в) 3% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 10% в - норме
(г) 1% вейвлет-коэффициентов, относительная погрешность 15% в - норме

Формирование запросов изображений



(а) Исходное изображение «Ирисы» Ван-Гога
(б) Разложение на вейвлет-коэффициенты. Размер круга соответствует
величине, цвет – знаку коэффициента.
(в) Усечение коэффициентов, остаются только самые большие по модулю
(г) Квантование оставшихся коэффициентов

Сравнение изображений