

# **Лекция 3. Моделирование одномерных временных рядов и прогнозирование**

---

## **План:**

- 1. Общие сведения о временных рядах и задачах их анализа.**
  - 2. Автокорреляция уровней временного ряда.**
  - 3. Моделирование тенденции (тренда) временного ряда.**
  - 4. Моделирование периодических колебаний.**
  - 5. Прогнозирование на основе моделей временных рядов.**
-

# Литература:

## Базовый учебник:

1. Эконометрика. Кн. 1. Ч. 1,2: учебник / В.П. Носко. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. — 672 с. (Сер. «Академический учебник».)
2. Эконометрика. Кн. 2. Ч. 3, 4: учебник / В.П. Носко. — М.: Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2011. — 576 с. (Сер. «Академический учебник».)

## Основная литература:

1. Эконометрика: учебник/И.И. Елисеева, СВ. Курышева, Т.В. Костеева и др.; под ред. И. И. Елисеевой. - 2-е изд., пере-раб. и доп. - М: Финансы и статистика, 2007. - 576 с: ил.
2. Григорьева С.В. Сборник задач по эконометрике - Чебоксары: Волжский филиал Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета (МАДИ), 2012. - 72с.
3. Сборник задач по эконометрике: Учебное пособие для студентов экономических вузов / Сост. Е.Ю. Дорохина, Л.Ф. Преснякова, Н.П. Тихомиров. — М: Издательство «Экзамен», 2003. — 224 с.
4. Доугерти К. Введение в эконометрику: Учебник. 3-е изд. / Пер. сангл. — М.: ИНФРА-М, 2009. — XIV; 465 с. - (Университетский учебник).
5. Кремер Н.Ш. Эконометрика: учебник / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко; под ред. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., стер. М.: Юнити, 2008.- 311 с.

## Дополнительная литература:

1. В.И. Суслов, Н.М. Ибрагимов, Л.П. Тальшева А А. Цыплаков. Эконометрия. – Новосибирск: КФАК, 2005. – 740 с.
2. Практикум по эконометрике: Учеб. пособие / И.И. Елисеева, СВ. Курышева, Н.М. Гордеенко и др.; Под ред. И.И. Елисеевой. - М: Финансы и статистика, 2005. - 192 с: ил.

# Временной ряд

Временной ряд — ряд наблюдаемых значений изучаемого показателя, расположенных в хронологическом порядке или в порядке возрастания времени. Наблюдения  $y_t$  ( $t = 1..n$ ) - **уровни ряда**,  $t$  - **временные метки**.

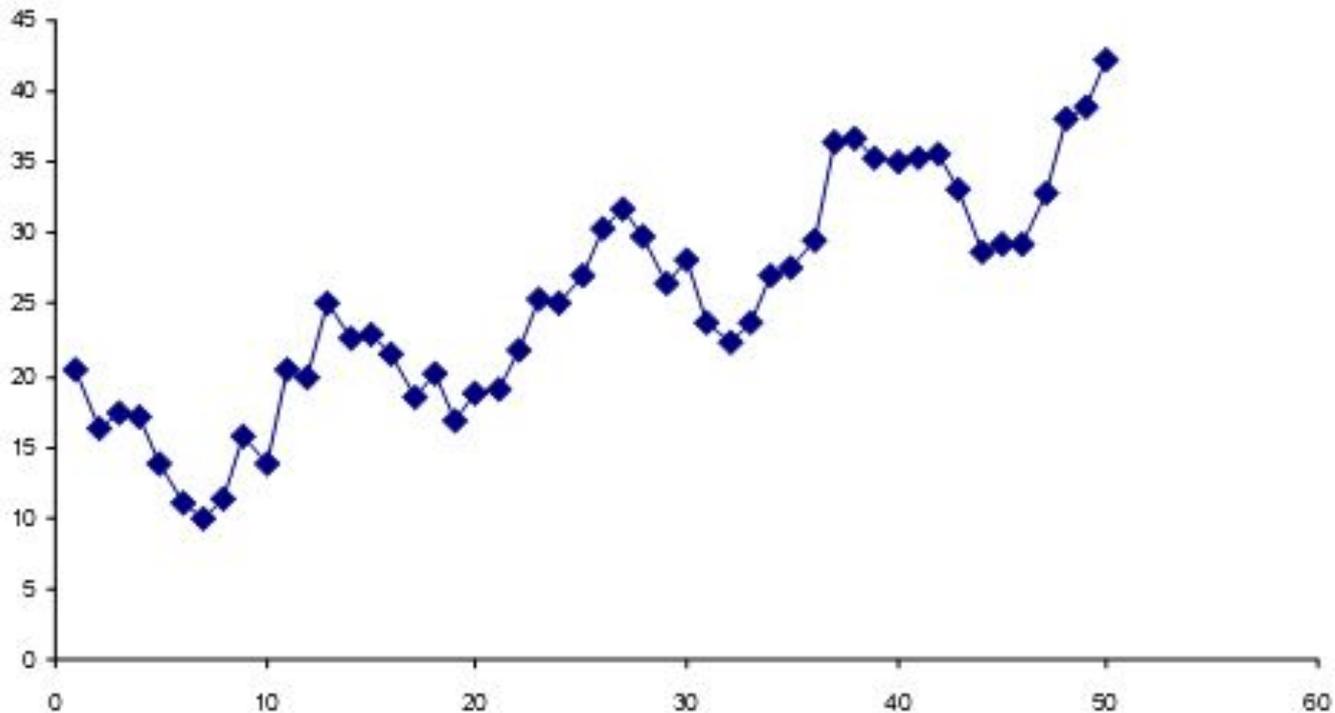
Год, $t$	1	2	3	4	5	6	7	8
Спрос, $y_t$	213	171	291	309	317	362	351	361

# Компоненты временного ряда

## 1. Систематическая составляющая:

- тренд (Т);
- сезонные и циклические колебания (S).

## 2. Случайная составляющая (E).



# *Модели временного ряда:*

– аддитивная модель

$$Y_t = T_t + S_t + E_t;$$

– мультипликативная модель

$$Y_t = T_t * S_t * E_t;$$

– смешанная модель

$$Y_t = T_t * S_t + E_t.$$

# Порядок построения аддитивной и мультипликативной моделей

- 1) выравнивание исходного ряда методом скользящей средней;
- 2) расчет значений сезонной компоненты  $S$ ;
- 3) устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных в аддитивной ( $T + E$ ) или в мультипликативной ( $T * E$ ) модели;
- 4) аналитическое выравнивание уровней ( $T + E$ ) или ( $T * E$ ) и расчет значений  $T$  с использованием полученного уравнения тренда;
- 5) расчет полученных по модели значений ( $T + S$ ) или ( $T * S$ );
- 6) расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

# Коэффициент автокорреляции

$$r_\tau = \frac{\sum_{t=1+\tau}^n (y_t - \bar{y}_{1\tau}) \cdot (y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})}{\sqrt{\sum_{t=1+\tau}^n (y_t - \bar{y}_{1\tau})^2 \cdot \sum_{t=1+\tau}^n (y_{t-\tau} - \bar{y}_{2\tau})^2}}, \text{ где: } \bar{y}_{1\tau} = \frac{\sum_{t=1+\tau}^n y_t}{n-\tau}; \quad \bar{y}_{2\tau} = \frac{\sum_{t=1+\tau}^n y_{t-\tau}}{n-\tau}$$

**Коэффициент автокорреляции уровней ряда первого порядка:**

$$r_1 = \frac{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_2)}{\sqrt{\sum_{t=2}^n (y_t - \bar{y}_1)^2 \cdot \sum_{t=2}^n (y_{t-1} - \bar{y}_2)^2}} \quad \bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=2}^n y_t}{n-1}; \quad \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=2}^n y_{t-1}}{n-1}$$

**Коэффициент автокорреляции уровней ряда второго порядка:**

$$r_2 = \frac{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3) \cdot (y_{t-1} - \bar{y}_4)}{\sqrt{\sum_{t=3}^n (y_t - \bar{y}_3)^2 \cdot \sum_{t=3}^n (y_{t-1} - \bar{y}_4)^2}} \quad \bar{y}_1 = \frac{\sum_{t=3}^n y_t}{n-2}; \quad \bar{y}_2 = \frac{\sum_{t=3}^n y_{t-1}}{n-2}$$

# Анализ автокорреляционной функции и коррелограммы

1. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции первого порядка, то исследуемый ряд содержит только тенденцию.
2. Если наиболее высоким оказался коэффициент автокорреляции порядка  $m$ , то ряд содержит циклические колебания с периодичностью в  $m$  моментов времени.
3. Если ни один из коэффициентов автокорреляции не является значимым, можно сделать предположение относительно структуры этого ряда: либо ряд не содержит тенденции и циклических колебаний и присутствуют только случайные колебания, либо ряд содержит сильную нелинейную тенденцию, для выявления которой нужно провести дополнительный анализ.

# Методы определения наличия тренда

## Метод сравнения средних

1.  $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

$$\tau = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

2.  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$\tau = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{s^2} \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}}$$

# Методы определения наличия тренда

## Метод Фостера-Стюарта

$$q_t = \begin{cases} 1, & y_t > y_{t-1} > \dots > y_1, \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad p_t = \begin{cases} 1, & y_t < y_{t-1} < \dots < y_1, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$d_t = q_t - p_t$$

$$\sigma_D = \sqrt{2 \sum_{t=2}^n \frac{1}{t}} \approx \sqrt{2 \ln n - 0,8456}$$

$$D = \sum_{t=2}^n d_t$$

$$t_{\text{набл}} = \frac{D}{\sigma_D}$$

Значения стандартных ошибок для  $\sigma_D$  для  $n$  от 10 до 100

$n$	$\sigma_D$	$n$	$\sigma_D$	$n$	$\sigma_D$	$n$	$\sigma_D$
10	1,964	35	2,509	60	2,713	85	2,837
15	2,153	40	2,561	65	2,742	90	2,857
20	2,279	45	2,606	70	2,769	95	2,876
25	2,373	50	2,645	75	2,793	100	2,894
30	2,447	55	2,681	80	2,816		

## Пример на применение метода Фостера-Стюарта

Изменения курса акций промышленной компании в течение месяца представлены в таблице:

**Курс акций (дол.)**

t	y <sub>t</sub>	t	y <sub>t</sub>	t	y <sub>t</sub>	t	y <sub>t</sub>
1	509	6	515	11	517	16	510
2	507	7	520	12	524	17	516
3	508	8	519	13	526	18	518
4	509	9	512	14	519	19	524
5	518	10	511	15	514	20	521

Проверить утверждение об отсутствии тенденции в изменении курса акций с помощью метода Фостера – Стюарта.

### Решение

а) Вспомогательные вычисления по методу Фостера-Стюарта представлены в таблице 1.

1) Если уровень  $y_t$  больше всех предшествующих уровней, то в графе  $q_t$ , ставим 1.

Если  $y_t$  меньше всех предшествующих уровней, то в графе  $p_t$ , ставим 1.

2) Определяем  $d_t = q_t - p_t$  для  $t=2 \div 20$ ;

3)  $D = \sum_{t=2} d_t = 3$ ;

4) Значение  $\sigma_D$  для  $n=20$  берем из таблицы 1.2.

$\sigma_D = 2,279$ .

Значение  $t_{кр}$  берем из таблицы t- распределения Стьюдента:

$$t_{кр} (\alpha=0,05; K=19)=2,093; t_n = \frac{D}{\sigma_D} = 1,316.$$

$t_n < t_{кр} \Rightarrow$  нет оснований отвергнуть гипотезу об отсутствии тренда.

С вероятностью 0,95 тренд во временном ряду отсутствует.

**Таблица 1**

1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	t	yt	qt	pt	dt	t	yt	qt	pt	dt
2	1	509	–	–	–	11	517	0	0	0
3	2	507	0	1	-1	12	524	1	0	1
4	3	508	0	0	0	13	526	1	0	1
5	4	509	0	0	0	14	519	0	0	0
6	5	518	1	0	1	15	514	0	0	0
7	6	515	0	0	0	16	510	0	0	0
8	7	520	1	0	1	17	516	0	0	0
9	8	519	0	0	0	18	518	0	0	0
10	9	512	0	0	0	19	524	0	0	0
11	10	511	0	0	0	20	521	0	0	0

# Сглаживание временного ряда по методу скользящей средней

1) *Нечетный интервал сглаживания*  $g$

$= 2p+1$ :

$$y'_t = \frac{\sum_{i=t-p}^{t+p} y_i}{2p+1} = \frac{y_{y-p} + y_{y-p+1} + \dots + y_{y+p-1} + y_{y+p}}{2p+1}$$

2) *Четный интервал сглаживания*

$g = 2p$ :

$$y'_t = \frac{\frac{1}{2} y_{t-p} + \sum_{i=t-p}^{t+p} y_i + \frac{1}{2} y_{t+p}}{2p}$$

# Аналитическое выравнивание временного ряда

$$\hat{y} = f(t)$$

- линейная:  $y_t = a_0 + a_1 t$ ;

- парабола второго и более высоких порядков:

$$y_t = a_0 + a_1 t^1 + a_2 t^2 + \dots + a_k t^k ;$$

- гиперболическая:  $y_t = a_0 + a_1 / t$ ;

- экспонента:  $y_t = a_0 + e^{a_0 + a_1 t}$  ;

- потенциальная:  $y_t = a_0 + a_1^t$  ;

- степенная:  $y_t = a_0 t^{a_1}$  .