# Математическое моделирование систем и процессов

## ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ решения нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений

# ЭТАПЫ ПРИБЛИЖЕННОГО ПОИСКА КОРНЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

1. ***отделение корня***
2. ***уточнение корня***

**Отделение корня** - это определение промежутка, содержащего один и только один корень уравнения.
Одна из точек этого промежутка принимается за ***начальное приближение корня***.

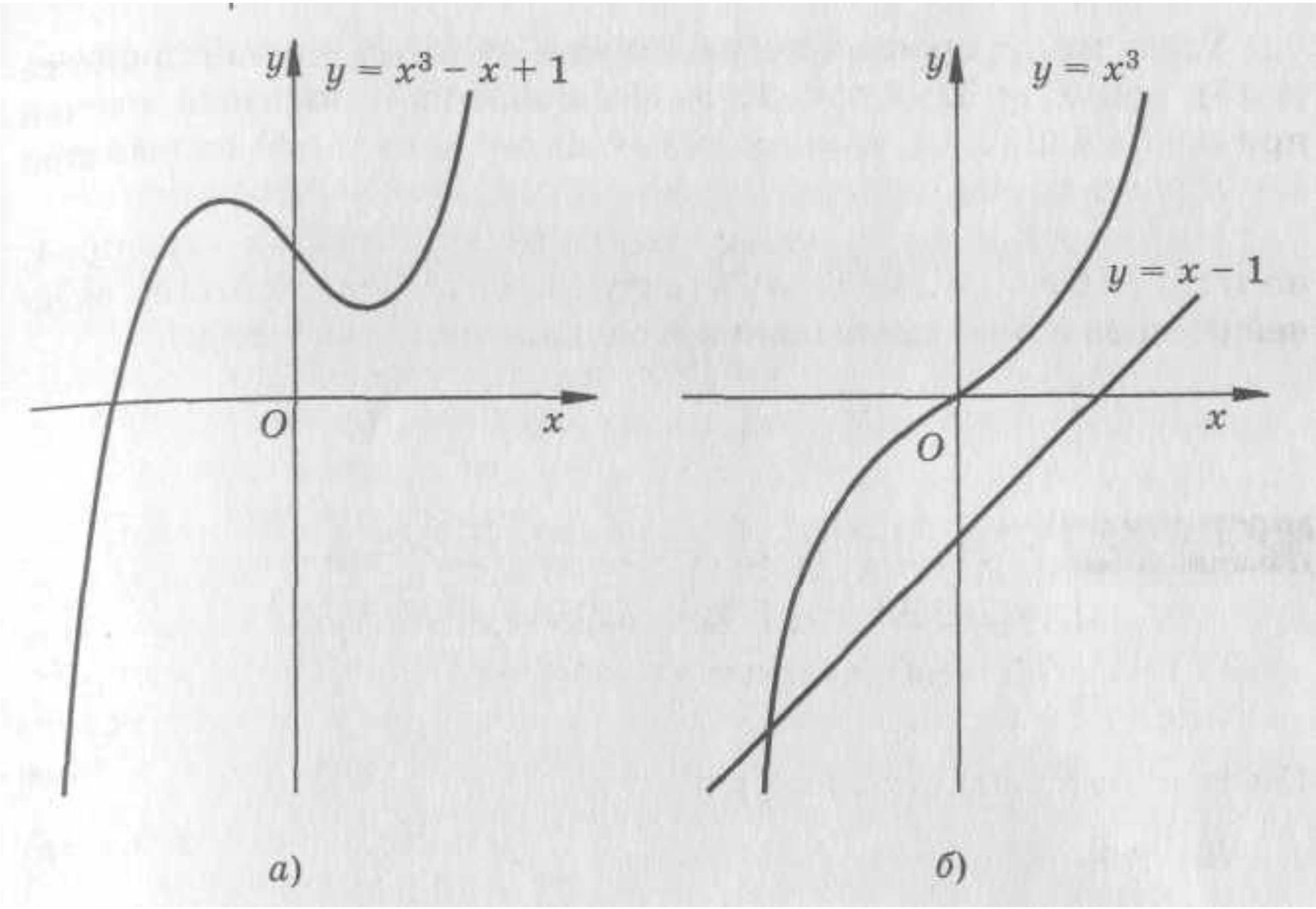
ТЕОРЕМА. Если функция *f(x),* определяющая уравнение *f(x) = 0* , на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков, т. е.

$$f(a)\cdot f(b)<0 \qquad (1)$$

то на этом отрезке содержится по крайней мере один корень уравнения.

Если же функция *f(x)* непрерывна и дифференцируема и ее производная сохраняет знак внутри отрезка $[a,b]$, то на этом отрезке находится только один корень $x^*$ уравнения.

# ГРАФИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ



# ШАГОВОСТЬ И ПОРЯДОК СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

## *Скорость сходимости процесса*

Метод имеет ***n-й порядок сходимости***, если

$$\left|x^{(k+1)} - x^{*}\right| = \mathrm{C}\left|x^{(k)} - x^{*}\right|^{n}$$

*или*

$$\varepsilon^{(k+1)} = C \cdot \left(\varepsilon^{(k)}\right)^{n}$$

*C* - постоянная, не зависящая от *n.*

## *Шаговость процесса*

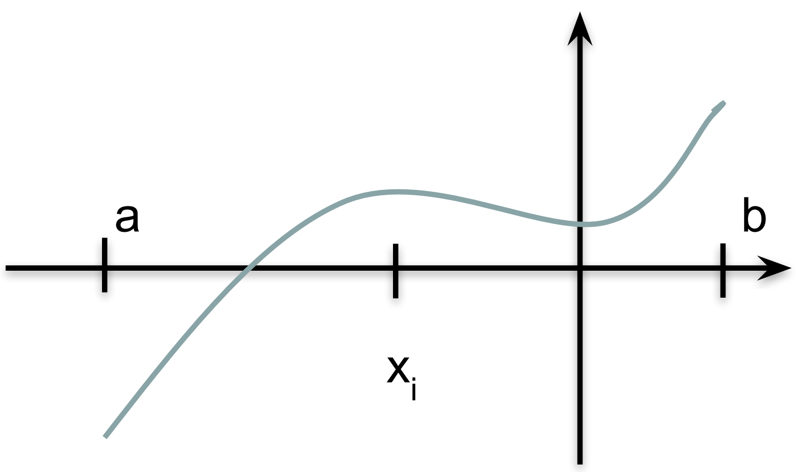
Метод является ***n-шаговым****,* если для построения итерационной последовательности ***нужно вычислить функцию в n точках***.

# МЕТОД ПОЛОВИННОГО ДЕЛЕНИЯ

Пусть действительный корень $x_0$ уравнения *f(x) = 0* отделен и функция *f(x)* непрерывна на интервале *[a, b]* отделения корня.
Будем делить отрезок пополам и оставлять ту его часть, где выполняется условие теоремы (1).

***Алгоритм***

1.Ввод a,b, e
2.i=1
3.Если (b-a)<e, то переход на п. 8
4. $x_i = (a+b)/2$
5.Если $f(b) \cdot f(x_i) < 0$, то $a=x_i$,
иначе $b=x_i$.
6.i=i+1
7.Переход на п. 3
8.Вывод $x_i$.



# МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

*f(x) = 0* (2) $\Rightarrow$ $x = \varphi(x)$ (3)

$$\varphi(x) = x + \psi(x) f(x)$$

$\psi(x)$ - непрерывная произвольная знакопостоянная функция.

## *Итерационный процесс*

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}),$$

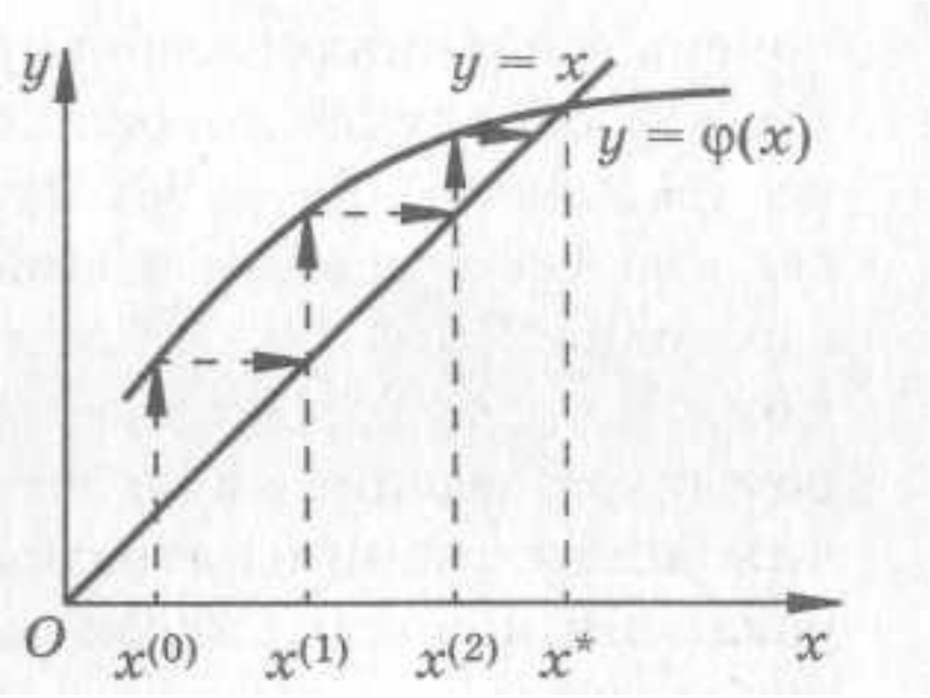
*k* = 0, 1, 2, …,

## *Достаточное условие сходимости итераций*

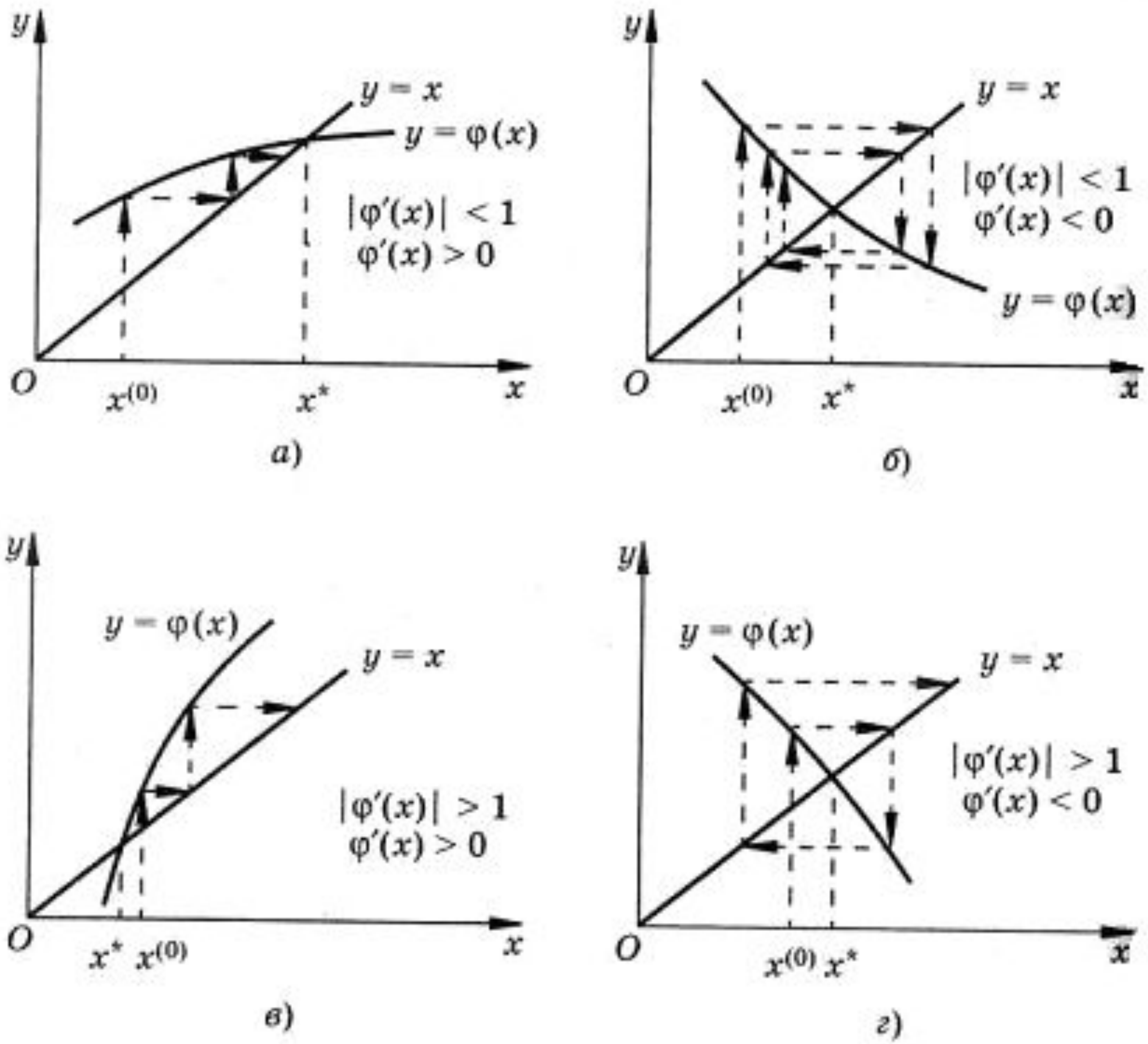
$$|\varphi'(x)| < 1$$

$$\forall \ x \in (a,b)$$

## *Графическая интерпретация метода простой итерации*



# ТИПОВЫЕ СЛУЧАИ УСТОЙЧИВОЙ И НЕУСТОЙЧИВОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ



# КЛАССИЧЕСКИЙ ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

$$f(x) = x^2 - a = 0 (a \geq 0)$$

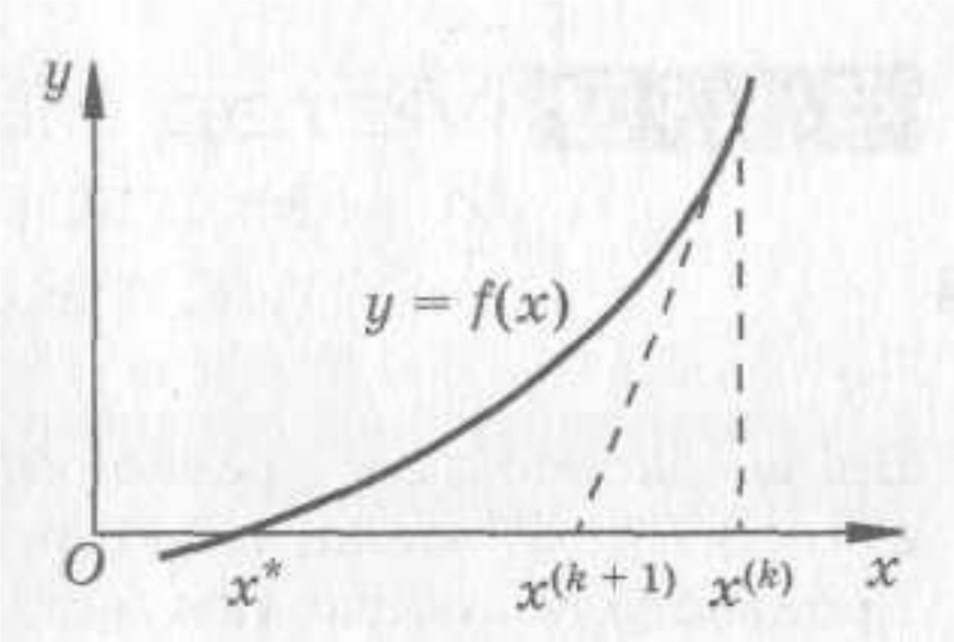
| $\varphi(x)$ | $\varphi'(x)$ | **Поведение** $\lvert\varphi'(x)\rvert$ | **Сходимость метода** |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{a}{x}$ | $-\dfrac{a}{x^2}$ | $\lvert\varphi'(x)\rvert \to 1$ при $x \to \pm\sqrt{a}$ | Не сходится |
| $x^2 + x - a$ | $2x + 1$ | $\lvert\varphi'(x)\rvert$ <1 при $x \in (-1,0)$, | Сходится в ограниченном интервале к отрицательному значению корня |
| $\dfrac{(x + a/x)}{2}$ | $\dfrac{(x - a/x^2)}{2}$ | $\lvert\varphi'(x)\rvert \to 0$ при $x \to \pm\sqrt{a}$ | Сходится, и очень быстро |

# МЕТОД НЬЮТОНА

***приближенное значение корня***

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}. \qquad (4)$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МЕТОДА НЬЮТОНА




метод Ньютона
- имеет вблизи корня второй порядок сходимости.
- является одношаговым.

# ПРЕИМУЩЕСТВА И НЕДОСТАТКИ МЕТОДА НЬЮТОНА

**Преимущества**:

1) квадратичная сходимость,
2) возможность обобщения на случай систем уравнений,
3) метод является одношаговым.

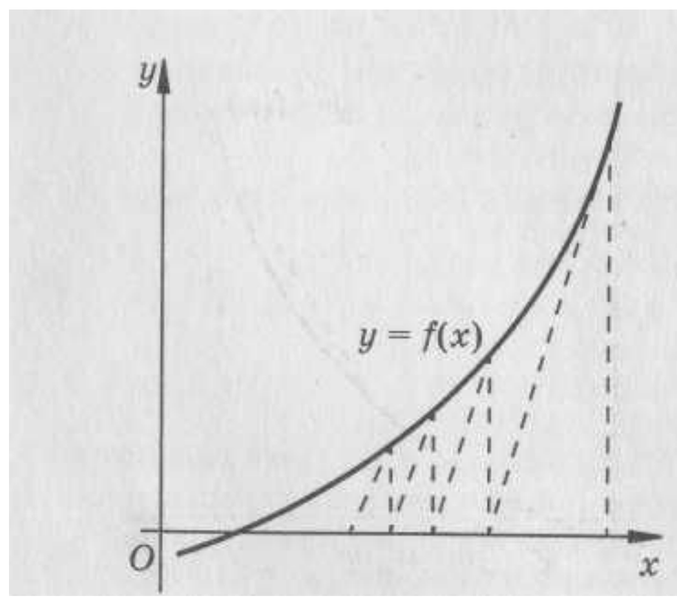
| **Недостатки:** | |
|---|---|
| 1) Расходится в тех областях, где $f'(x) \cong 0$ | 2) если функция *f(x)* задана таблично, то вычисление $f'(x)$ затруднено |
| **Пути устранения:** | |
| ***Модифицированный метод Ньютона*** | ***Метод секущих*** |

# МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА

***Модифицированный метод*** – это вариант ***метода Ньютона с постоянным значением производной.*** При этом значение производной вычисляется только в начальной точке $x = x^{(0)}$ и далее для всех итераций значения производных полагаются постоянными, равными $f'(x^{(0)})$.

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(0)})}.$$

***Графическая интерпретация модифицированного метода Ньютона***




Метод Ньютона с постоянным значением производной имеет лишь ***первый порядок сходимости***

# МЕТОД СЕКУЩИХ (МЕТОД ХОРД)

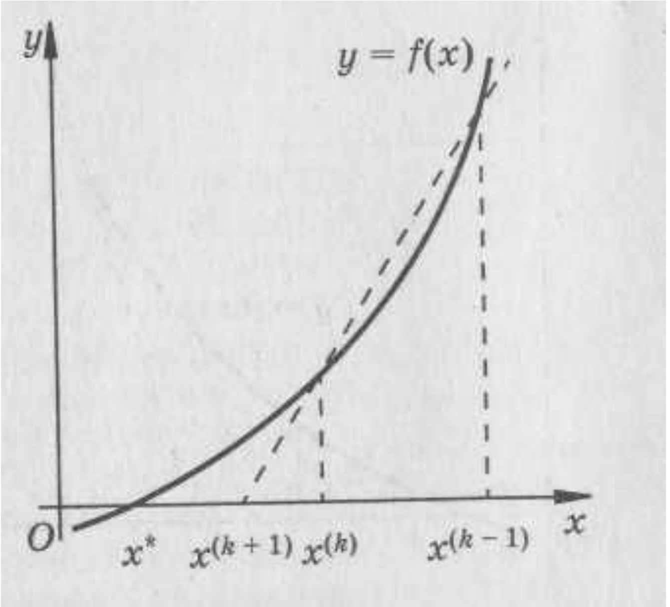
***Идея: замена производной конечной разностью –***

$$f'(x^{(k)}) \approx \frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{x^{(k)} - x^{(k-1)}},$$

что приводит к замене касательной в точке секущей, проведенной через две точки кривой *y = f(x)* (линейная аппроксимация).

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)\cdot\left(x^{(k)} - x^{(k-1)}\right)}{f\left(x^{(k)}\right) - f\left(x^{(k-1)}\right)}.$$

***Графическая интерпретация метода секущих***




***Порядок сходимости метода секущих***

$$\varepsilon^{(k+1)} \approx \alpha\varepsilon^{(k)}\varepsilon^{(k-1)} \approx \alpha^{1/p}\left[\varepsilon^{(k)}\right]^{p},$$

где $p = \sqrt{5/2} \approx 1{,}58$

# МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ - вектор-столбец неизвестных,

$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]^T$ - вектор-столбец функций

$$x = \varphi(x) \qquad (2)$$

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)]^T,$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases} \qquad (3)$$

# МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ НАХОЖДЕНИЯ КОРНЕЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

## *Итерационный процесс*

Начальное приближение для корня

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})^T,$$

## *Формула расчета значения на (k+1) итерации*

$$x^{(k+1)} = \varphi(x^{(k)}), k = 0,1,2,\dots,$$

или

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \varphi_1\left[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right], \\ x_2^{(k+1)} = \varphi_2\left[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = \varphi_n\left[x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}\right]. \end{cases}$$

***Вектор погрешности испытывает линейное преобразование, (метод имеет первый порядок сходимости)***

# СХОДИМОСТЬ МЕТОДА ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

**МАТРИЦА ЯКОБИ ФУНКЦИЙ** $\varphi_i(x)$

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_1(x)}{\partial x_n} \\ \cdots\cdot & \cdots\cdot & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\varphi_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x=x^*},$$

Система принимает вид:

$$\varepsilon^{k+1} = A_\varphi \varepsilon^k.$$

***Достаточное условие сходимости итераций***

$$\left\| A_\varphi \right\| < 1$$

# МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ЗЕЙДЕЛЯ

$$x_i^{(k+1)} = \varphi_i \left[ x_1^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)}, x_i^{(k)}, \dots, x_n^{(k)} \right], \qquad i = 1, \dots, n.$$

# МЕТОД НЬЮТОНА

***Приближенное значение корня***

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[ A_f^{(k)} \right]^{-1} f^{(k)},$$

***Условие сходимости***

$$\det(A_f^{(k)}) \neq 0.$$

# МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА

***Модифицированный метод*** – это вариант ***метода Ньютона с постоянным значением производной.***

$$x^{(k+1)} \approx x^{(k)} - \left[A_f^{(0)}\right]^{-1} f^{(k)}$$

Метод Ньютона с постоянным значением производной имеет ***первый порядок сходимости***:

## Вариант №21

Метод 2 – Метод простой итерации

$$ctg(x) - \frac{x}{2} = 0$$

Метод 3 – Метод Ньютона

$$\begin{cases} \sin(y + 0{,}4) = x^2; \\ -x^2 + 2y^2 = 8. \end{cases}$$