

Геометрические основы отсечения

Уравнение прямой, проходящей через 2 точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Геометрические основы отсечения

Взаимное расположение 2-х точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2)
относительно прямой $ax + by + c = 0$

Геометрические основы отсечения

Угол α между векторами (x_1, y_1) и (x_2, y_2)

$$(a, b) = |a| \cdot |b| \cdot \cos(a, b) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\overline{(a, b)} = |a| \cdot |b| \cdot \sin(a, b) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

Геометрические основы отсечения

Пересечение прямых

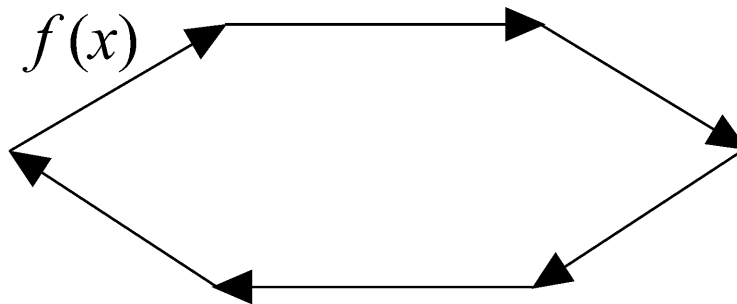
если одна из прямых вертикальна ($x = x_0$) или горизонтальна ($y = y_0$), то пересечение прямой $ax + by + c = 0$ с прямой $x = x_0$ ($y = y_0$) находится подстановкой в уравнение $y_0 = -(ax_0 + c) / b$, $x_0 = -(by_0 + c) / a$

$$\text{Иначе} \quad \begin{cases} ax + by + c = 0, \\ dx + ey + f = 0; \end{cases}$$

если нужно определить, пересекаются ли прямые AB и CD , то достаточно в соответствии с п.2 проверить, лежат ли точки A и B по разные стороны от прямой CD , и лежат ли точки C и D по разные стороны от прямой AB

Геометрические основы отсечения

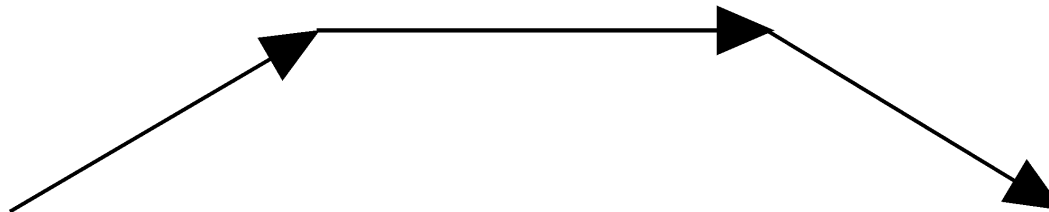
Определение порядка обхода точек



$$\oint = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot (y_i + y_{i-1})$$

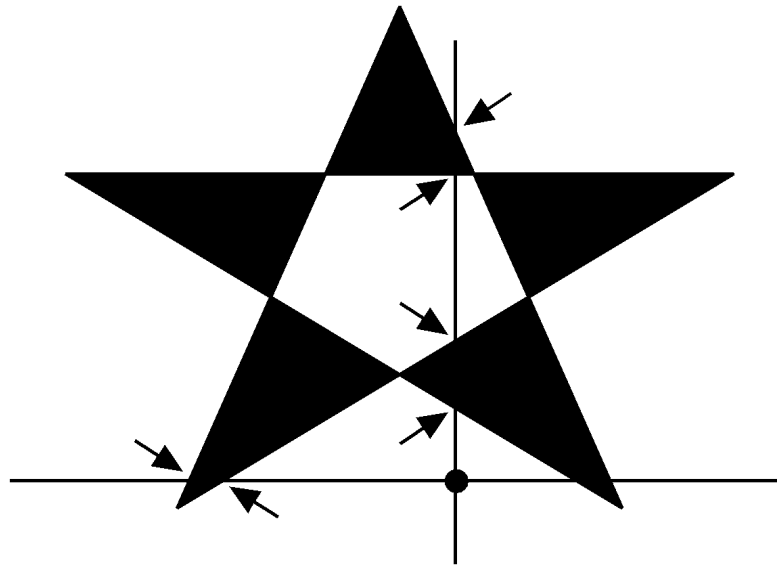
Геометрические основы отсечения

Определение выпуклости полигона



Геометрические основы отсечения

Взаимное расположение точки и полигона (отсечение точки)



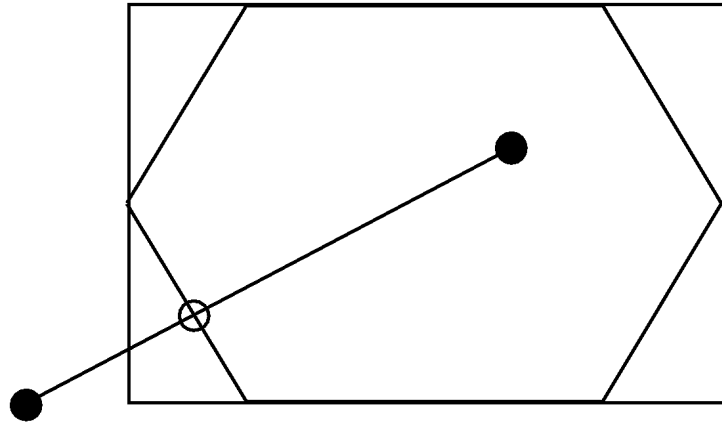
Отсечен ие

Алгоритм Козна-Сазерленда отсечения
отрезка

| | | |
|------|------|------|
| 0101 | 0100 | 0110 |
| 0001 | 0000 | 0010 |
| 1001 | 1000 | 1010 |

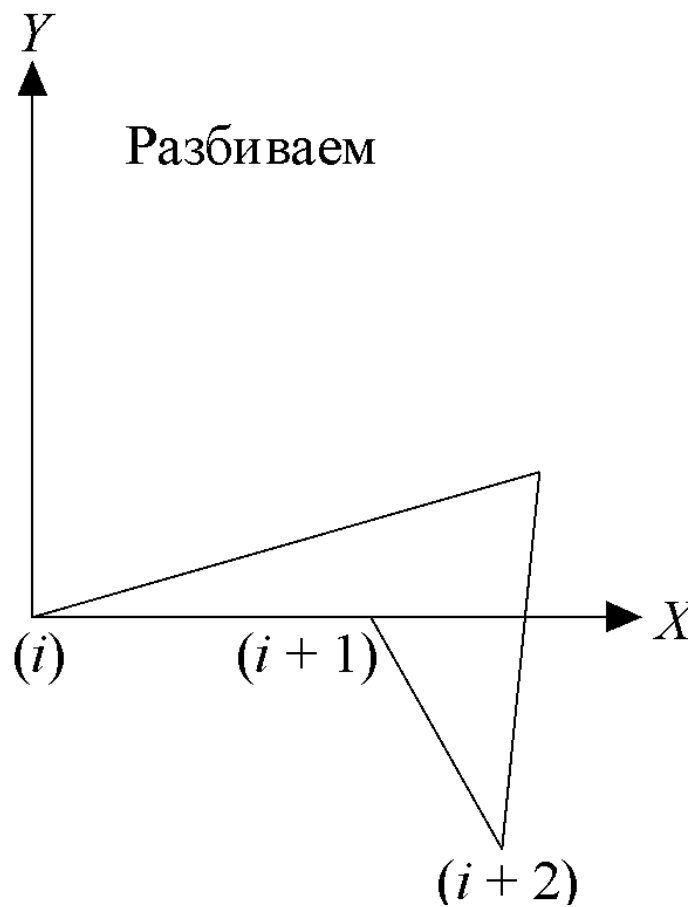
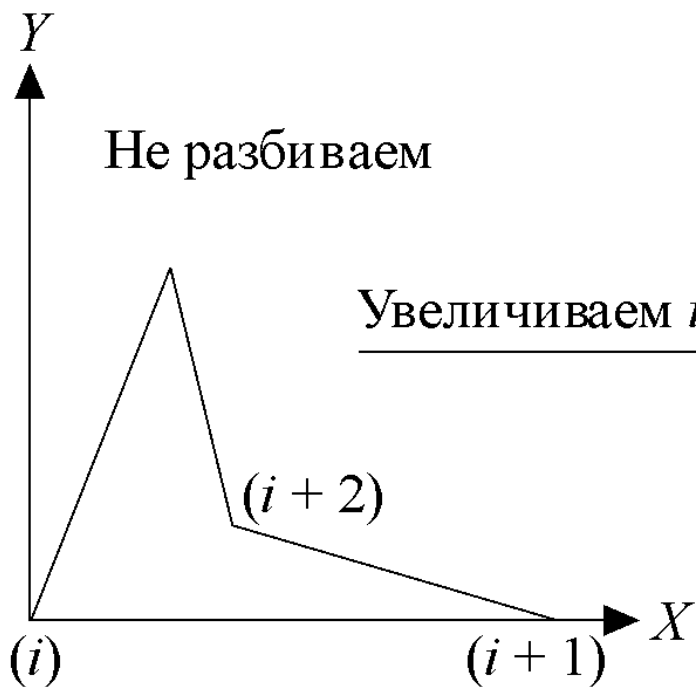
Отсечен ие

Алгоритм отсечения отрезка выпуклым
ОКНОМ



Отсечение

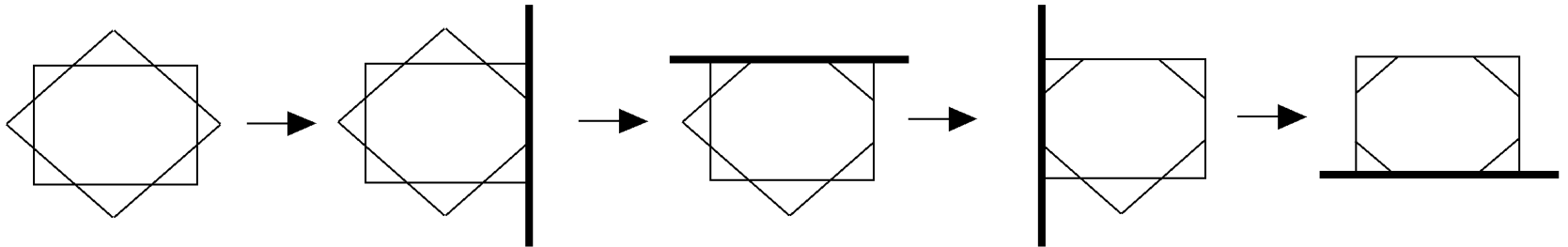
Разбиение невыпуклых многоугольников на выпуклые



Отсечение
МНОГОУГОЛЬНИКОВ

**Отсечен
ие**

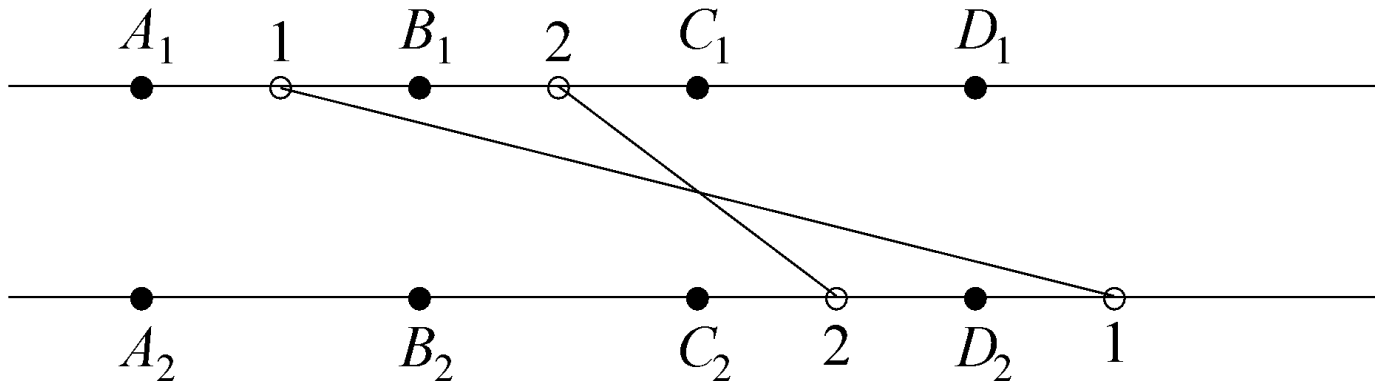
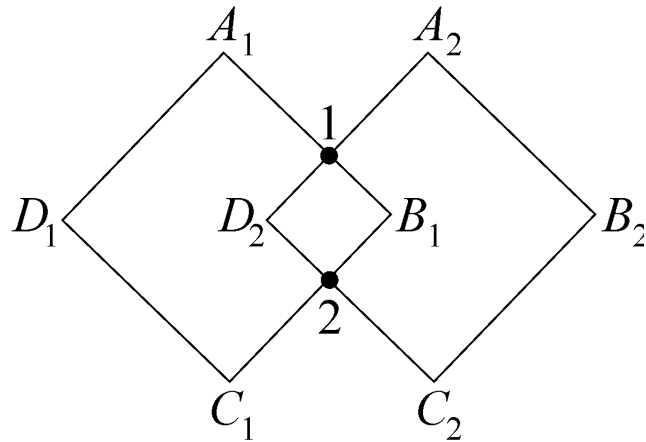
**Алгоритм Сазерленда-
Ходжмана**
отсечения выпуклым окном



Отсечен ие

Отсечение МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Алгоритм Вейлера- Азертона



Проективные преобразования

(проекции)

Проекция – это преобразование точек пространства размерности N в точки пространства размерности меньшей, чем N , или, как еще говорят, на подпространство исходного пространства

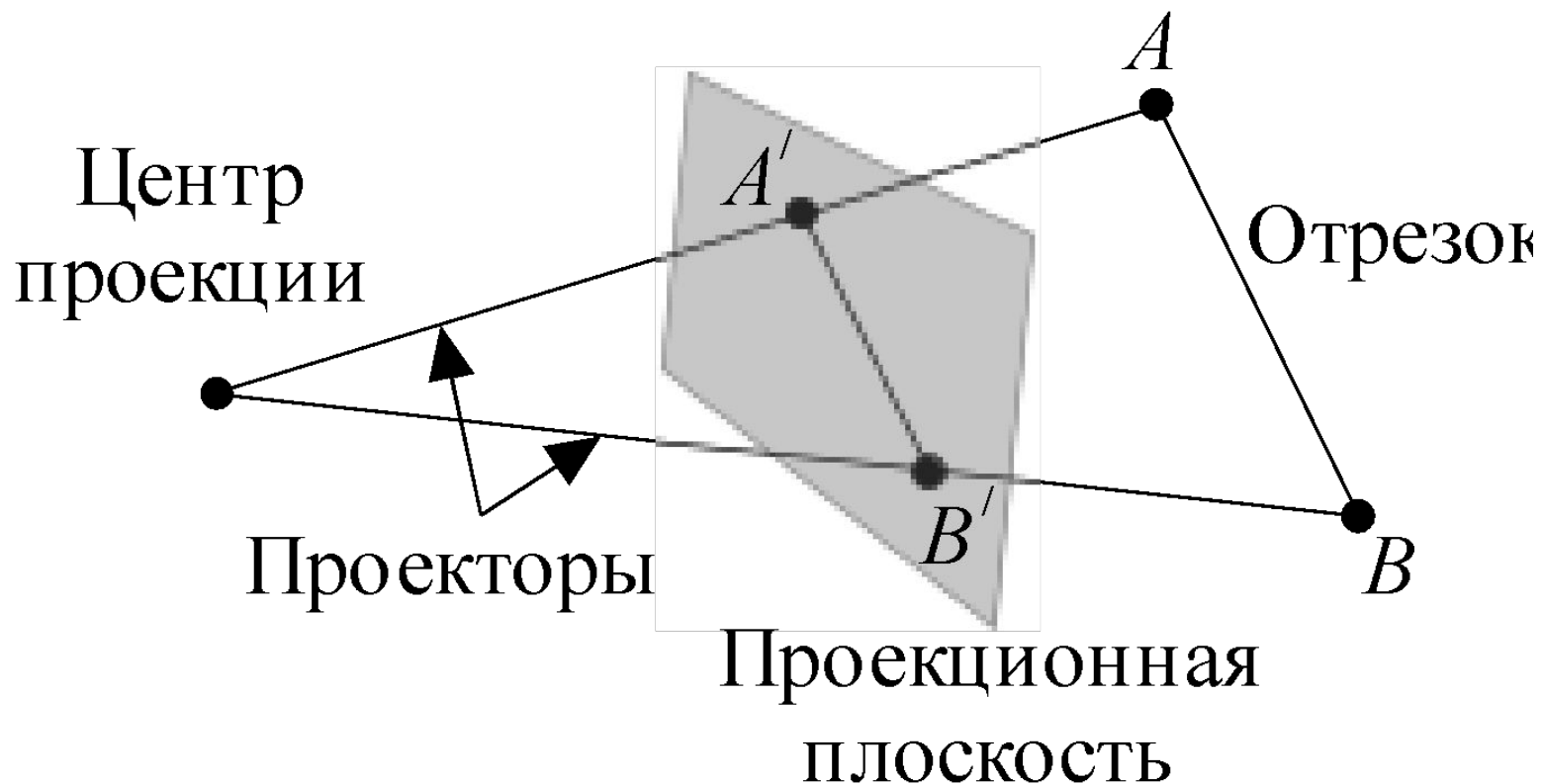
Проекция трехмерного объекта, представленного в виде совокупности точек, на двумерную плоскость строится при помощи ПРЯМЫХ проецирующих лучей, которые выходят из центра проекции, проходят через каждую точку объекта и, пересекая плоскость, образуют проекцию объекта на эту плоскость

Проективные преобразования (проекции)

Плоские геометрические проекции можно разделить на *центральные* и *параллельные*. Различие между ними определяется соотношением между центром проекции и проекционной плоскостью. Если расстояние между ними конечно, то проекция – центральная, иначе параллельная

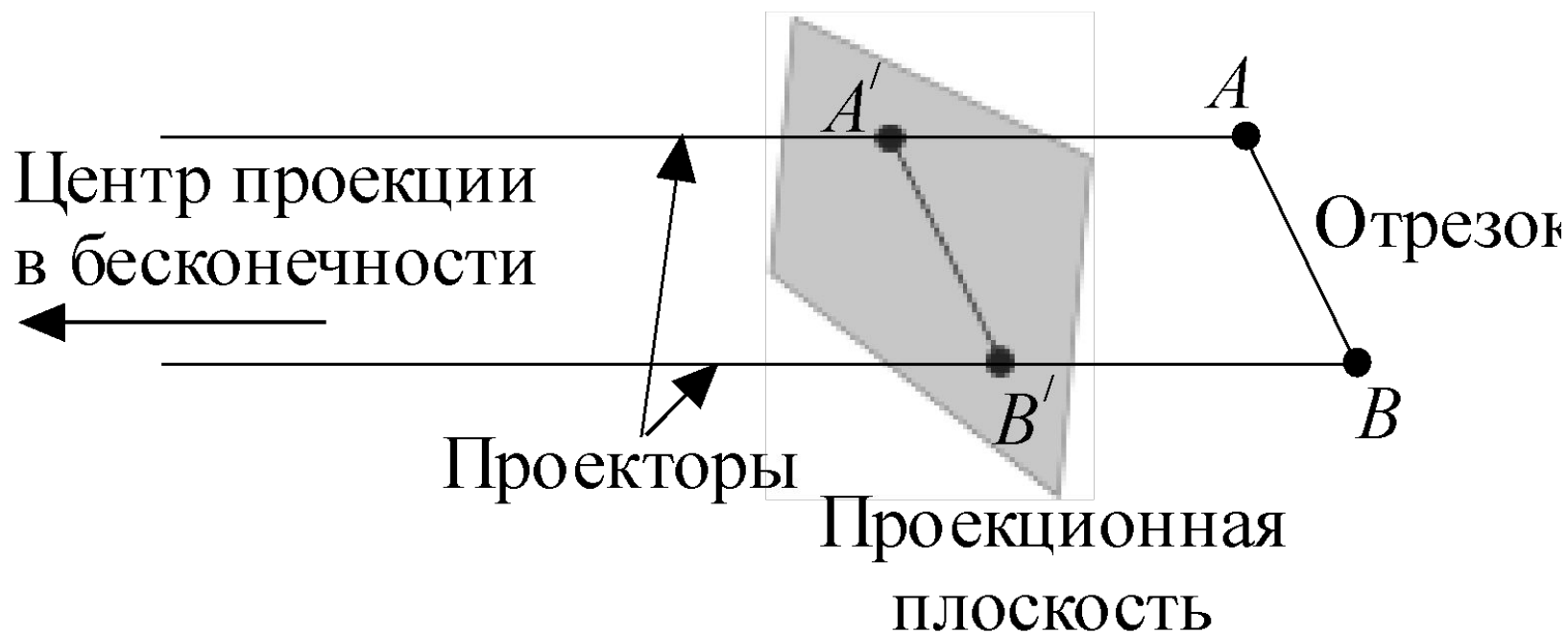
Проективные преобразования (проекции).

Центральная проекция



Проективные преобразования (проекции).

Параллельная проекция



Проективные преобразования (проекции). Классификация

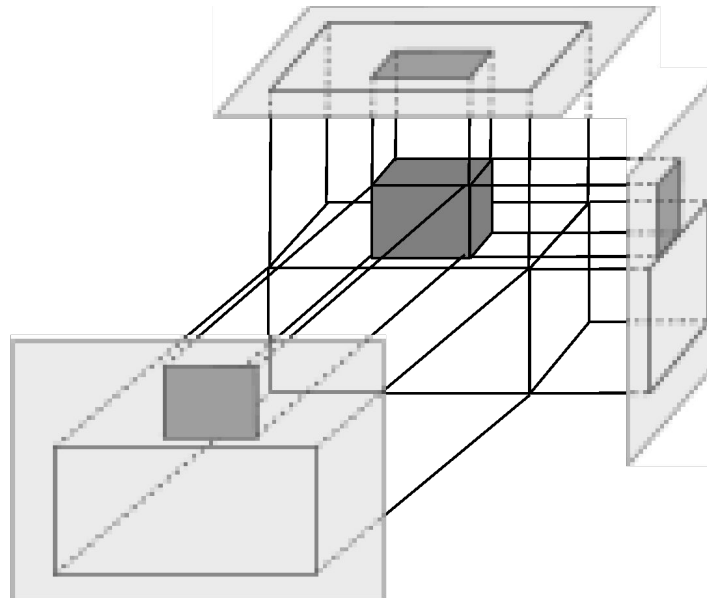


Параллельные ортографические

проекции

Если в параллельной проекции направление проецирования является нормалью к проекционной плоскости, то такая проекция называется *ортографической*

Наиболее широко используемыми видами ортографических проекций являются вид спереди, вид сверху и вид сбоку, в которых проекционная плоскость перпендикулярна координатным осям, совпадающим вследствие этого с направлением проецирования.



Параллельные ортографические проекции.

Математический аппарат

$$P_{XOY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{XOZ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{YOZ} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Параллельные аксонометрические

проекция

В случае *аксонометрических* проекций используются проекционные плоскости, не перпендикулярные главным координатным осям. На них изображаются сразу несколько сторон объекта, что позволяет восстановить положение в пространстве, получив наглядное изображение предмета.

Так как картинная плоскость не параллельна ни одной из координатных осей, то имеются искажения отрезков по длине.

Если коэффициент искажения (отношение длины спроектированного на плоскость отрезка, параллельного координатной оси, к действительной длине отрезка) по всем трём осям одинаков, то такая проекция называется *изометрической*

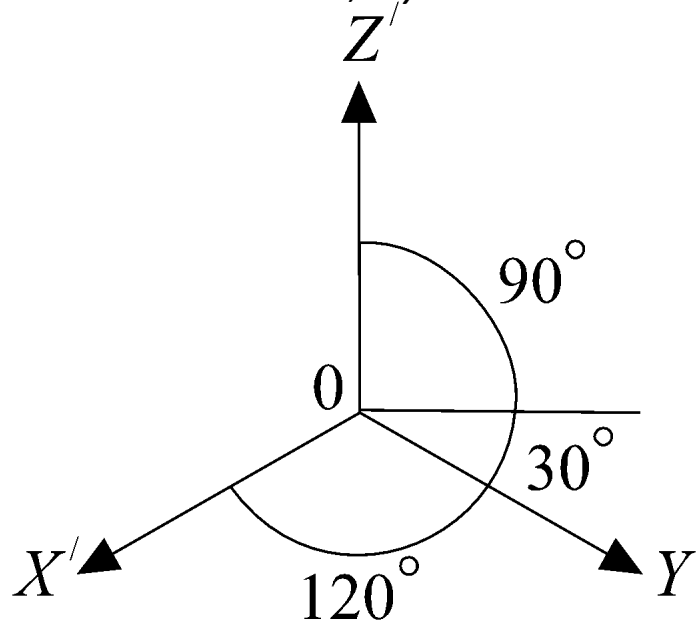
Параллельные аксонометрические проекции.

Изометрия

В прямоугольной изометрической проекции аксонометрические оси образуют между собой углы в 120° , ось Z' направлена вертикально.

$$\sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82$$

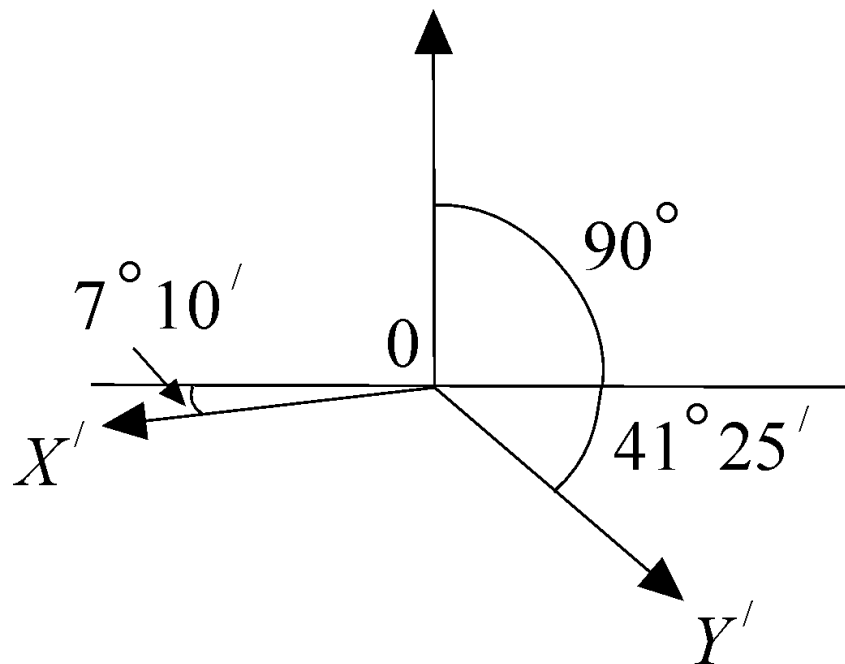
Коэффициенты искажения k_x , k_y и k_z имеют значение



Параллельные аксонометрические проекции.

Диметрия

В прямоугольной *диметрической* проекции ось Z' , как и в предыдущем случае, расположена вертикально, а оси X' и Y' образуют с горизонтальной линией углы $7^{\circ}10'$ и $41^{\circ}25'$. Коэффициент искажения по оси Y' равен 0,47, а по осям X' и Z' принимает значение 0,94.



Параллельные аксонометрические проекции.

Триметрия

В *триметрической* проекции коэффициенты искажения по всем трем осям, а также углы, образованные каждой парой осей, попарно различны между собой.

Параллельные аксонометрические проекции.

Математический аппарат

Пусть проекционная плоскость задается единичным вектором нормали (n_x, n_y, n_z) и расстоянием от начала координат $d \geq 0$

$$n_x \cdot x + n_y \cdot y + n_z \cdot z - d = 0.$$

Вектор, направленный по нормали от начала координат до пересечения с плоскостью:

$$\vec{N} = d \cdot \vec{n} = (n_x d, n_y d, n_z d) = (N_x, N_y, N_z).$$

Параллельные аксонометрические проекции.

Математический аппарат. Шаг 1

1. Сдвиг на вектор с помощью матрицы

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -N_x \\ 0 & 1 & 0 & -N_y \\ 0 & 0 & 1 & -N_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Параллельные аксонометрические проекции.

Математический аппарат. Шаг 2

2. Поворот, совмещающий направление нормали с направлением оси OZ

- первый поворот (относительно оси OZ) переводит нормаль в плоскость YOZ
- второй поворот выполняется относительно оси OY до совмещения нормали с осью OZ .

Соответствующую матрицу вращения, являющуюся произведением двух матриц, обозначим R .

Параллельные аксонометрические проекции.

Математический аппарат. Шаг 3

3. Проекция на плоскость XOY с помощью матрицы

$$P_{XOY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Параллельные аксонометрические проекции.

Математический аппарат. Шаги 4-5

4. Поворот с помощью матрицы R^{-1}

5. Сдвиг на вектор с помощью матрицы S^{-1}

$$P = S^{-1} \cdot R^{-1} \cdot P_{XOY} \cdot R \cdot S.$$

Параллельные косоугольные проекции

Косоугольные (наклонные) проекции сочетают в себе свойства ортографических проекций со свойствами аксонометрии.

Проекционная плоскость перпендикулярна главной координатной оси, поэтому сторона объекта, параллельная этой плоскости, проецируется так, что можно измерить углы и расстояния.

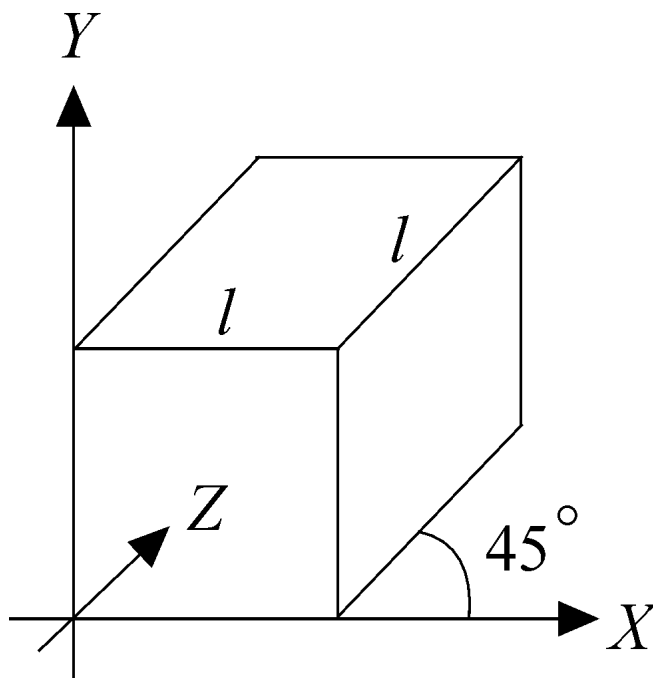
Проецирование других сторон объекта также допускает проведение линейных измерений (но не угловых) вдоль главных осей.

(!) Нормаль к проекционной плоскости и направление проецирования не совпадают.

Параллельные косоугольные проекции.

Проекция Кавалье

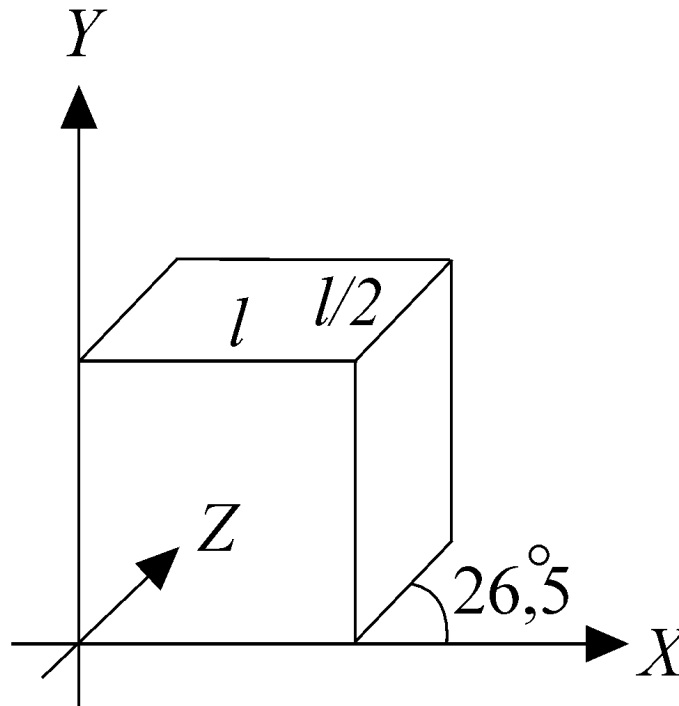
В проекции *Кавалье* направление проецирования составляет с плоскостью угол 45° . В результате проекция отрезка, перпендикулярного проекционной плоскости, имеет ту же длину, что и сам отрезок, т. е. укорачивание отсутствует



Параллельные косоугольные проекции.

Кабинетная проекция

В кабинетной проекции (рис. 7.8) направление проецирования составляет с плоскостью угол $\alpha = \arctg \frac{1}{2} \approx 26,5^\circ$. При этом отрезки, перпендикулярные проекционной плоскости, после проецирования составляют половину их действительной длины.



Параллельные косоугольные проекции.

Математический аппарат

$$P_{XOY} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}, 0\right)$$

$$\left(0.5 \cdot \cos \frac{\pi}{4}, 0.5 \cdot \cos \frac{\pi}{4}, 0\right)$$

Центральные проекции

Когда пучок проекторов исходит из заданного центра, то отрезки, бывшие изначально параллельными, на плоскости проекции уже не будут таковыми (за исключением случая, когда они лежат в плоскости, параллельной проекционной).

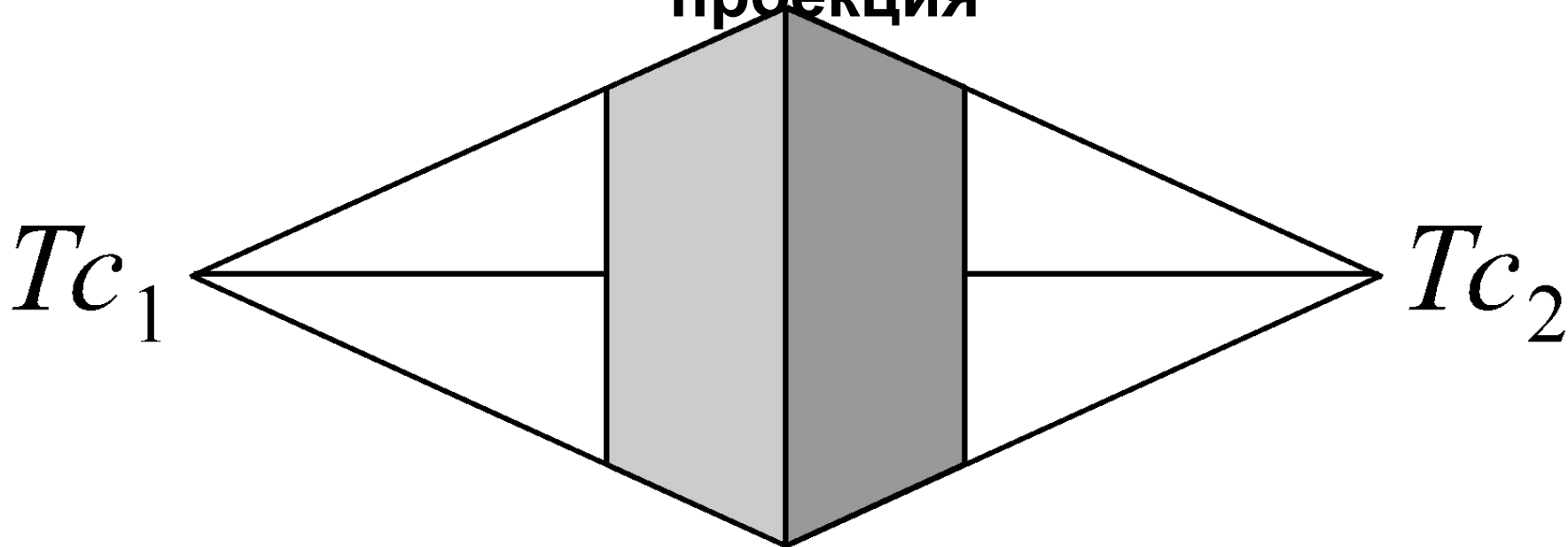
При проецировании нескольких параллельных прямых их проекции пересекаются в так называемой точке схода.

Если совокупность прямых параллельна одной из координатных осей, то их точка схода называется главной.

Таких точек может быть не больше трех

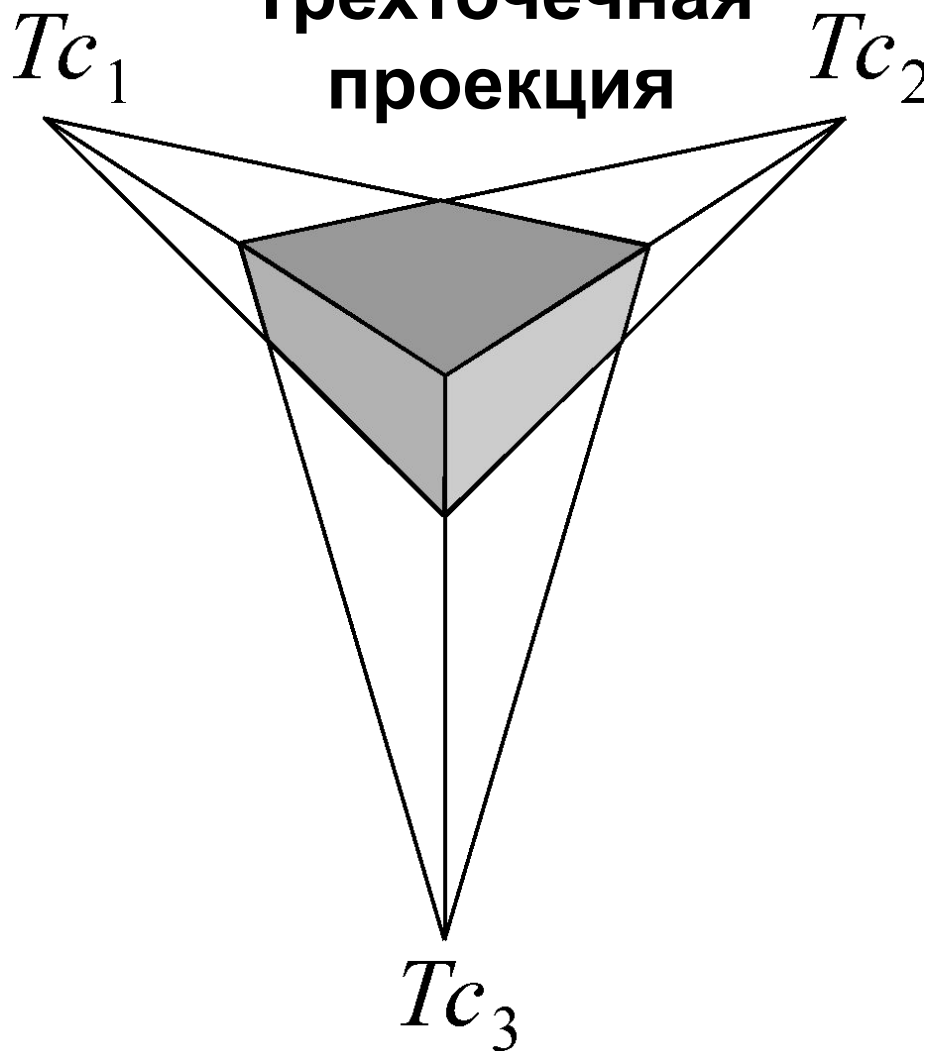
Центральные проекции. Односторонняя

**Центральные
проекции.
Двухточечная
проекция**



**Центральные
проекции.**

**Трехточечная
проекция**



**Центральные
проекции.
Математический**

$$P_{XOY} = \begin{bmatrix} \text{аппарат} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c_1} & 1 \end{bmatrix}$$

c_1 – расстояние от наблюдателя (точки схода лучей) до проекционной плоскости

Центральные проекции.

Математический

аппарат

Заметим, что после операции умножения матрицы P_{xOy} на вектор-столбец координат точки $(x, y, z, 1)$ получаем вектор

$$(x, y, 0, 1 - \frac{z}{c_1})$$

Для двух- и трехточечных проекций нули в нижней строке матрицы заменяются величинами, обратными расстоянию до соответствующих точек схода

Можно отметить связь матрицы центральной проекции с матрицей параллельного проецирования