МОДЕЛИ НА ОСНОВЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Математическое моделирование электромеханической системы с использованием передаточных функций

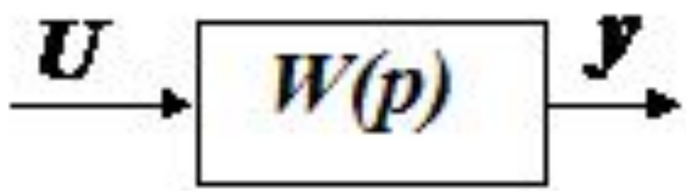
Передаточными функции при исследовании систем, объектов, элементов пользуются при их структурном моделирование.

Изображение системы (объекта) представляют в этом случае в виде совокупности динамических звеньев с указанием связей между ними.

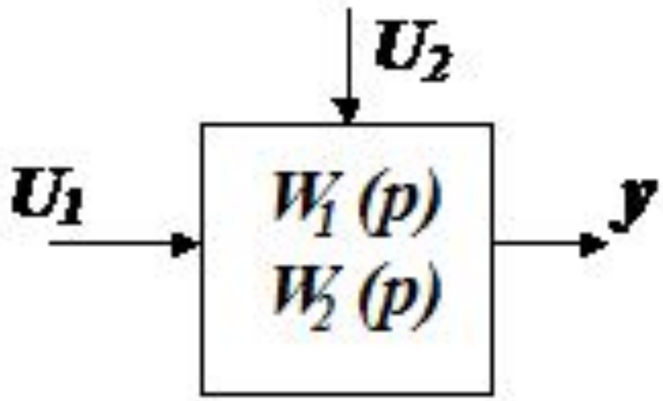
Такое представление систем называется структурной схемой.

Графическое изображение основных звеньев системы имеют следующий вид:

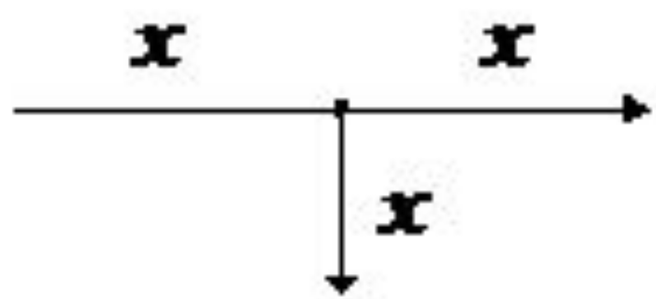
Звено с одним входом:



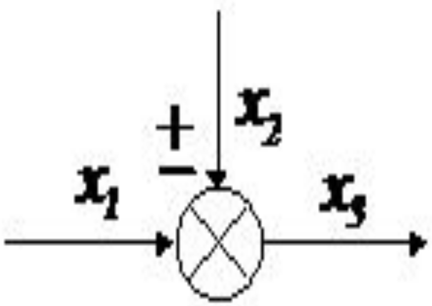
Звено с двумя входами:



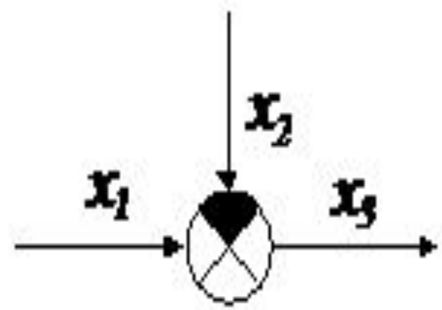
Узел:



Сумматор (элемент сравнения):



$$x_3 = x_1 \pm x_2$$



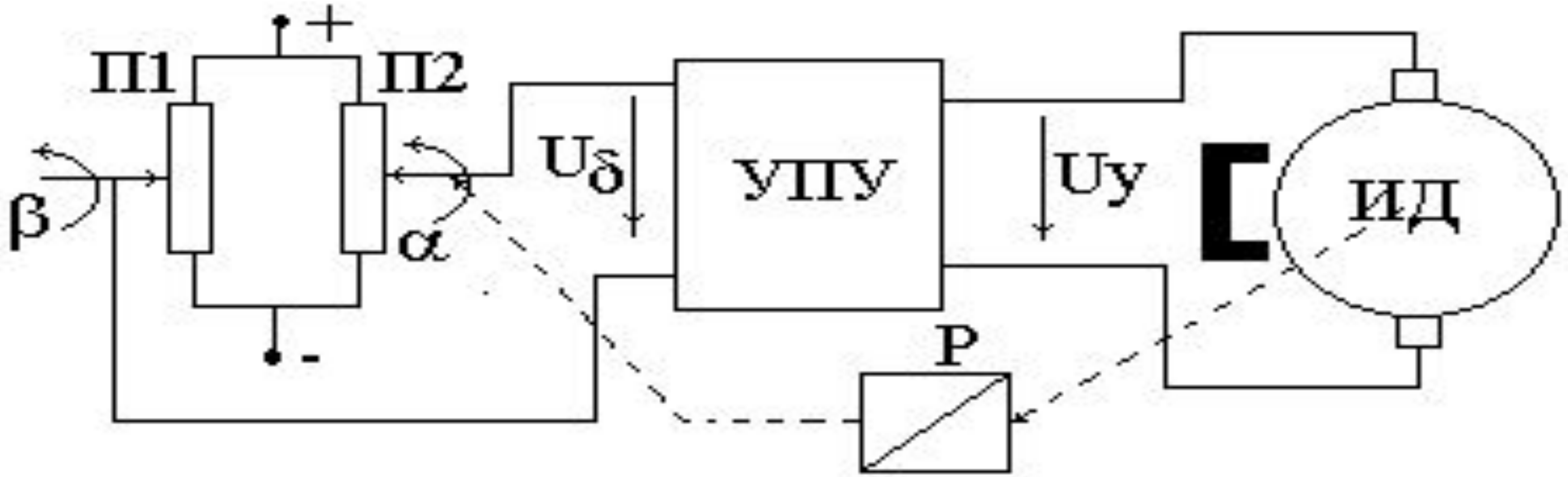
$$x_3 = x_1 - x_2$$

Математическая модель электромеханической системы постоянного тока

Рассмотрим структурную математическую модель электромеханической следящей системы постоянного тока.

Основой для разработки структурной модели являются прежде всего математическое описание системы, которое формируется в соответствии с ее функциональной схемой.

Функциональная схема электромеханической системы



Система имеет типичный набор элементов. К ним, в данном случае, можно отнести:

измеритель рассогласований (ИР), представленный в виде потенциометрического моста П1-П2;

усилительно-преобразовательное устройство (УПУ);

исполнительное устройство, электродвигатель постоянного тока с магнитоэлектрическим возбуждением;

передаточный механизм, редуктор.

Математическое описание рассматриваемой системы.

- Напряжение на выходе усилительного каскада, исходя из предположения, что это звено безынерционное, запишется в виде:

$$U_y = k\,U_\delta.$$

- Уравнение электрического равновесия для обмотки якоря двигателя постоянного тока

$$U_y = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + c_e \Omega$$

- Уравнение механического равновесия

$$J' \frac{d\Omega}{dt} = M_{\text{вр}} - M'_{\text{н}}$$

- Уравнение, связывающее угол поворота вала двигателя с угловой скоростью:

$$\alpha_{\partial} = \int \Omega dt$$

- Решая в операторной форме приведенные уравнения можно получить следующее равенство

$$k_{\text{д}} U_{y} = (T_{\text{Э}} T_{\text{М}} p^{2} + T_{\text{М}} p \quad + 1)\Omega - \frac{1}{Fi}(1 + T_{\text{Э}} p) M_{\text{Н}}$$

где $T_{\text{э}} = L_{\text{a}}/R_{\text{a}}$ – электромагнитная постоянная времени, характеризующая нарастание скорости момента в заторможенном двигателе;

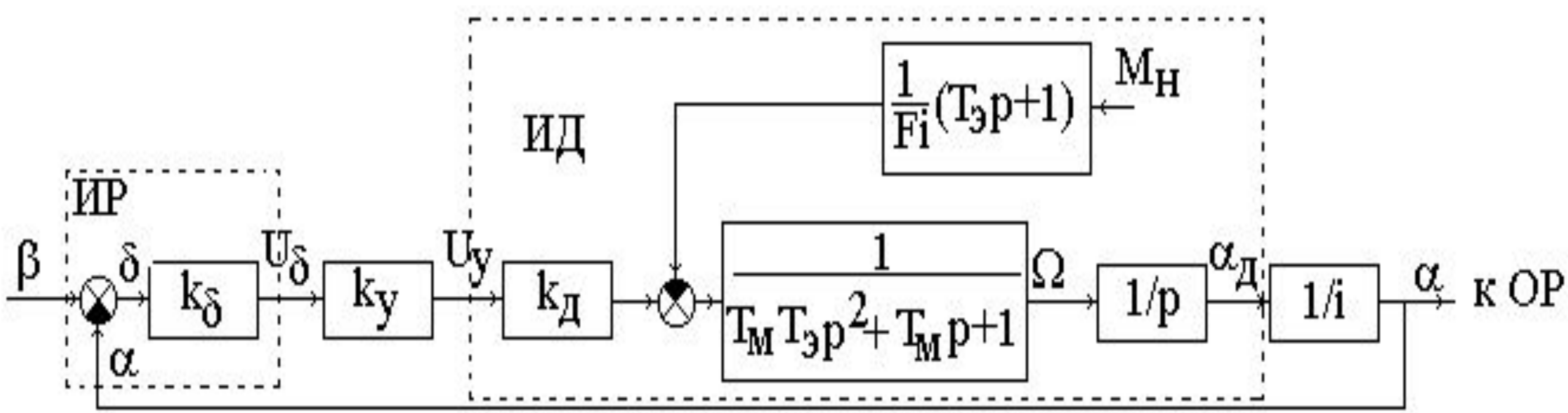
$F = c_e c_м/Ra$ – коэффициент демпфирования, определяющий наклон (жесткость) механической характеристики;

$T_{\text{М}}$ – механическая постоянная времени, характеризующая нарастание скорости и определяемая механическими параметрами ИД:

Вывод

- Таким образом, в зависимости от задачи исследований и принятых при этом допущениях, разрабатываются структурные схемы и математическая модель системы на базе представленных выше уравнений.
- В данном случае структурная схема (модель) имеет следующий вид:

Структурная схема электромеханической системы



- В структурной схеме исполнительный двигатель представлен колебательным звеном.
- Передаточную функцию разомкнутой системы можно записать в виде:

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{\alpha}{\delta} = \frac{K}{p(T_{\text{э}} T_{\text{м}} p^2 + T_{\text{м}} p + 1)};$$

где *K* – коэффициент передачи (добротности) системы:

$$K = k_y \cdot k_\partial \cdot k_\delta \cdot k$$

$k_y \cdot k_\partial \cdot k_\delta \cdot k$ – коэффициент усиления усилителя, коэффициенты передачи двигателя, измерителя рассогласования и редуктора, соответственно.

Передаточная функция замкнутой системы

Передаточную функцию замкнутой системы определяют по выражению:

$$W_{\text{з}}(p)=\frac{W_{\text{р}}(p)}{1+W_{\text{р}}(p)}.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы по управляющему воздействию будет иметь вид:

$$W_{з}(p) = \frac{K}{(T_{э}T_{м}p^{3} + T_{м}p^{2} + p) + K}.$$

Знаменатель передаточной функции является характеристическим уравнением замкнутой системы

Перечень исследований с помощью передаточных функций

1. По траектории корней характеристического уравнения, (корневого годографа) на комплексной плоскости можно провести количественную и качественную оценку влияния параметров системы на ее устойчивость, качество регулирования и осуществить синтез корректирующих звеньев

2. Используя передаточную функцию ошибки системы по управляющему воздействию

$$G(p) = \frac{\delta}{\beta} = \frac{1}{1 + W_{\text{р}}(p)}$$

и передаточную функцию ошибки системы по возмущающему воздействию

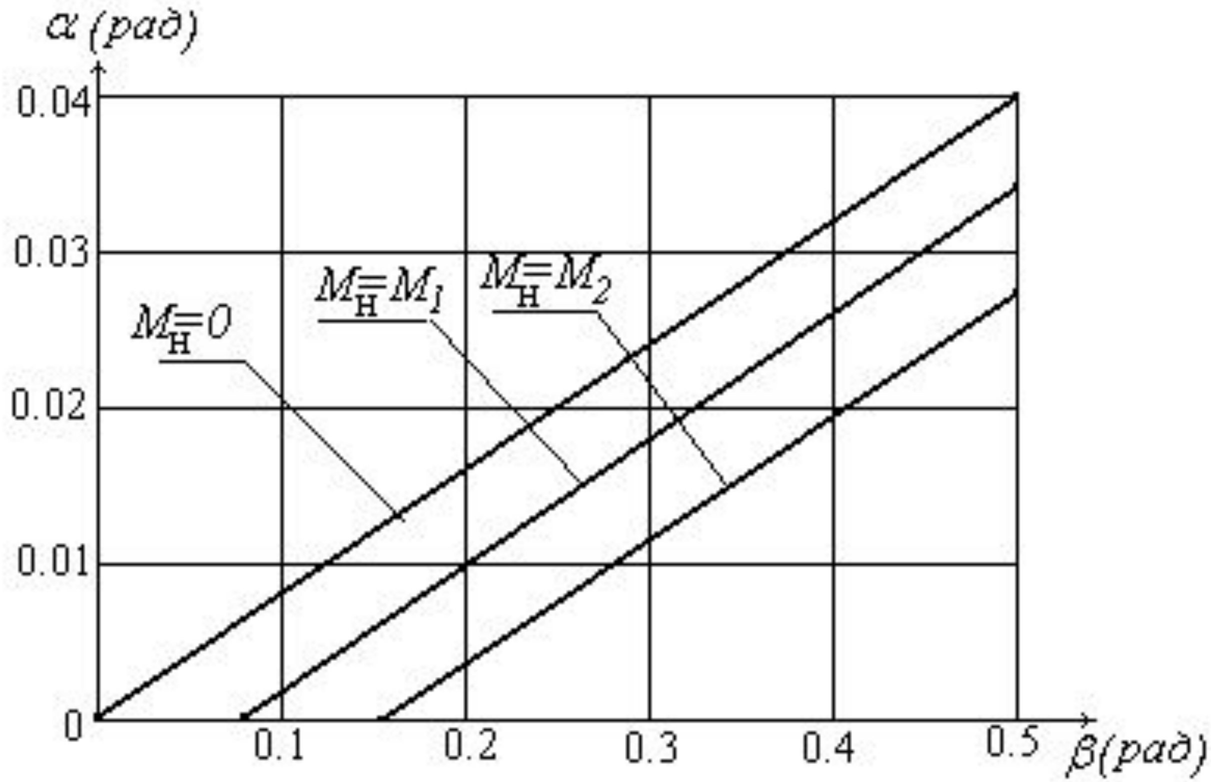
$$Y(p) = \frac{\delta}{M_{\text{н}}} = \frac{\frac{1}{Fi^2}(T_{\text{э}} p + 1)}{(T_{\text{э}} T_{\text{м}} p^3 + T_{\text{м}} p^2 + p) + K}.$$

можно оценить точность отработки системой управляющего и возмущающего воздействий

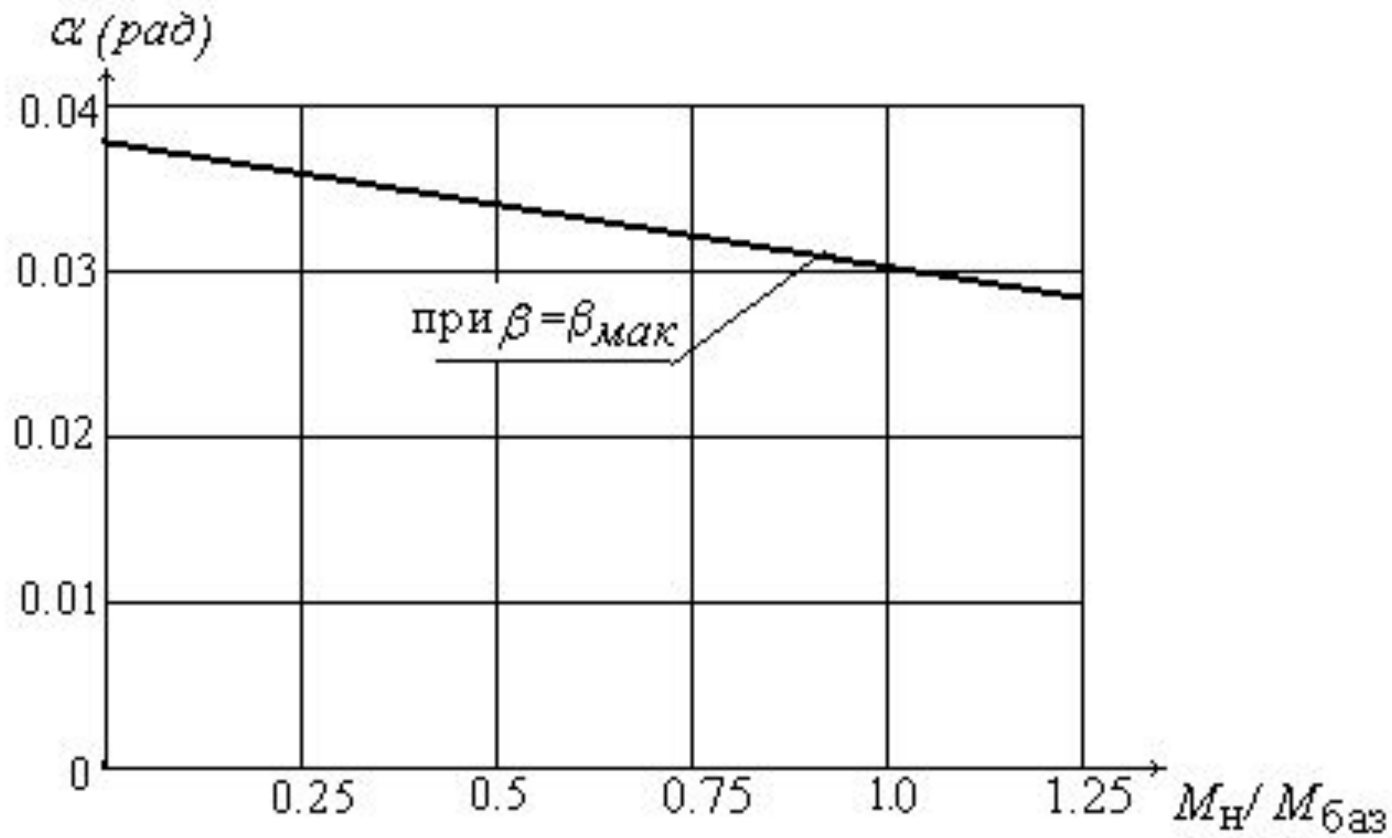
$$\delta_{\Sigma} = \delta_{\beta} + \delta_{м}$$

3. Используя передаточные функции замкнутой системы по управляющему и возмущающему воздействиям, получают уравнения для расчета внешней и регулировочных характеристик системы в установившемся режиме работы в виде

$$\alpha = \frac{K}{K+1} \cdot \beta - \frac{\frac{1}{Fi^2}}{K+1} \cdot M_{\text{н}}$$



Семейство регулировочных характеристик



Внешняя характеристика системы

4. Передаточные функции систем позволяют рассчитать их переходные характеристики, анализируя которые определяют динамические показатели качества системы, именно:

- перерегулирование $\sigma\%$,
- число колебаний n,
- время переходного процесса $t_{пп}$,
- декремент затухания процесса χ

Исследование электромеханических систем в частотной области

- Проектирование, анализ и синтез систем с помощью частотных характеристик осуществляют при наличии передаточной функции замкнутой (разомкнутой) системы.
- Для формирования частотных характеристик необходимо от передаточной функции системы перейти к ее частотной передаточной функции.

Частотная передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{K}{p(T_{\text{э}}T_{\text{м}}p^2 + T_{\text{м}}p + 1)};$$

$$W_{\text{Р}}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(T_{\text{Э}}T_{\text{М}}(j\omega)^2 + T_{\text{М}}j\omega + 1}$$

Частотная передаточная функция замкнутой системы

$$W_{\text{з}}(p) = \frac{K}{(T_{\text{э}} T_{\text{м}} p^3 + T_{\text{м}} p^2 + p) + K}.$$

$$W_{з}(j\omega) = \frac{K}{(T_{\text{э}} T_{\text{м}} (j\omega)^3 + T_{\text{м}} (j\omega)^2 + j\omega) + K}$$

Преобразование частотных передаточных функций

- В результате преобразования частотных передаточных функций выделяют вещественную и мнимую составляющие функций.
- Для этого комплексное значение знаменателя частотной передаточной функции умножают на сопряженное комплексное число.

- Осуществив преобразования, частотную передаточную функцию приводят к виду

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

где $U(\omega),\ V(\omega)$ – вещественные и мнимые частотные функции, а их графики, соответственно, вещественная и мнимая частотные характеристики.

- Амплитудную и фазовую частотные функции определяют по выражениям

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctq}\frac{V(\omega)}{U(\omega)} + k\pi,$$

где k = 0, ±1, ±2,…..

Частотные характеристики электромеханической следящей системы

- Вещественная частотная характеристика

$$U(\omega) = \frac{KT_{\text{М}}\omega^2}{T_{\text{М}}^2\omega^4 + (\omega - \omega^3 T_{\text{М}} T_{\text{Э}})^2}.$$

- Мнимая частотная характеристика

$$V(\omega) = \frac{K(\omega - \omega^3 T_{\text{М}} T_{\text{Э}})}{T_{\text{М}}^2\omega^4 + (\omega - \omega^3 T_{\text{М}} T_{\text{Э}})^2}.$$

Устойчивость системы

Система считают устойчивой, если

- после снятия воздействия по окончанию переходного процесса система возвращается в исходное равновесное состояние;
- после изменения воздействия на постоянную величину по окончанию переходного процесса система приходит в новое равновесное состояние.

Условия устойчивости

- Переходный процесс в любой системе определяется свободной и принужденной составляющими.
- Основной составляющей, которая определяет переходный процесс является свободная составляющая, изменение которой во времени зависит от корней характеристического уравнения системы

В самом общем случае корни характеристического уравнения – это комплексные сопряженные числа

$$p_{i,i+1} = a_i \pm j\omega_i$$

где a_i может быть положительной или отрицательной величиной.

При этом если $a_i < 0$, свободная составляющая будет затухать и наоборот, при $a_i > 0$ получаются расходящиеся колебания

Вывод

- Отсюда следует, что общим условием затухания всех свободных составляющих, а значит, всего переходного процесса в целом является отрицательность вещественных частей всех полюсов передаточной функции электромеханической системы

Критерии устойчивости системы

Устойчивость системы оценивают с помощью следующих критериев устойчивости:

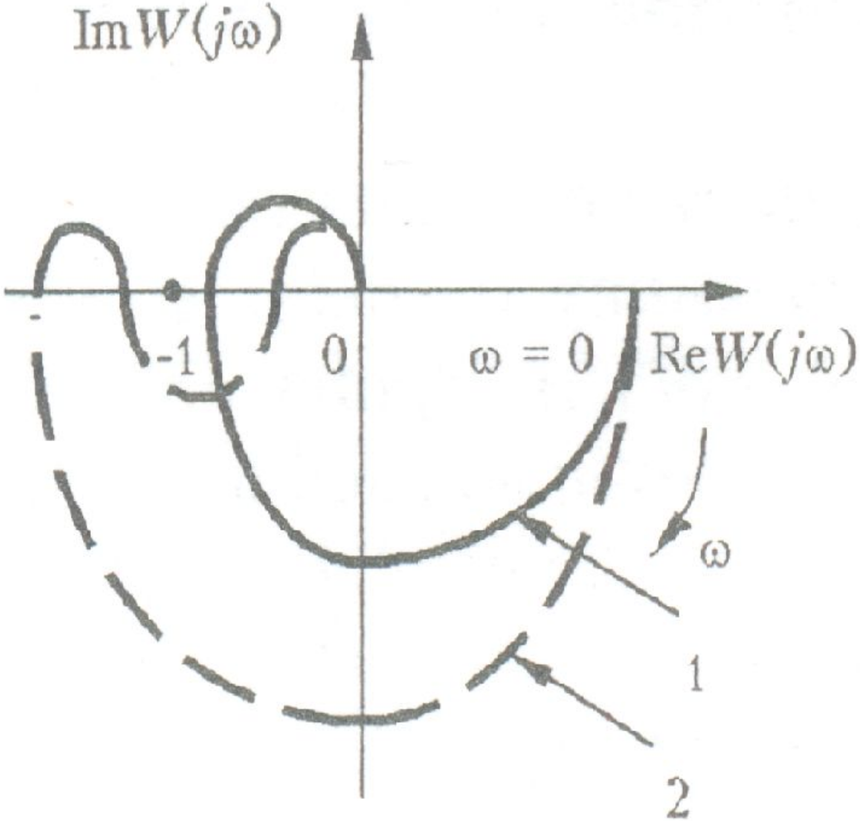
- критерий устойчивости Гурвица;
- критерий устойчивости Михайлова;
- критерий устойчивости Найквиста.

Критерий устойчивости Найквиста

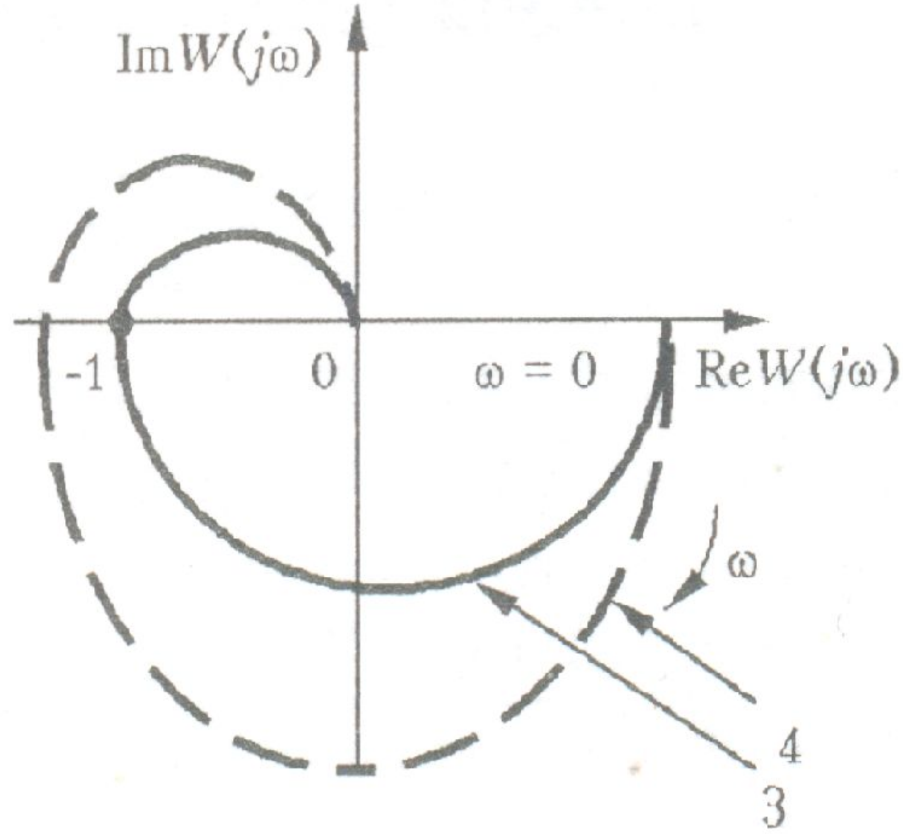
- Для исследования устойчивости системы в динамических режимах работы широко используют критерий Найквиста, основанный на построении частотного годографа разомкнутой системы.
- Для устойчивости замкнутой системы автоматического управления (САУ) необходимо и достаточно, чтобы годограф Найквиста при изменении частоты от 0 до ∞

не охватывал точку с координатами $(-1, j0)$.

Годографы Найквиста



а



б

Метод логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик

- В инженерной практике расчета и проектирования систем автоматического управления, электромеханических систем и систем электронной техники широко применяется метод логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик (ЛАФЧХ).

- В этом случае частотные характеристики строятся на полулогарифмической сетке, когда по оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе, а по оси ординат амплитуда в децибелах, а фаза в радианах:

$$L(\omega) = 20 \log A(\omega);$$

- Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному увеличению мощности. Децибел равен 0,1 Бел.

- частотная передаточная функция представляет собой отношение не мощностей, а выходной и входной величин, то увеличение этого отношения в десять раз будет соответствовать увеличению отношения мощностей в 100 раз, что соответствует 2 Белам или 20 дб. Поэтому в правой части уравнения имеем множитель 20

Суть метода логарифмических частотных характеристик

- Суть этого метода сводится к анализу логарифмических частотных характеристик разомкнутых систем.
- В результате анализа оцениваются такие показатели качества системы, как: запас устойчивости замкнутой системы по фазе и амплитуде, точность отработки управляющих сигналов, частотный диапазон работы, колебательность и быстродействие системы.

- Метод ЛАФЧХ позволяет произвести синтез системы в соответствии с требованиями технического задания.
- Для этого в базу данных на моделирование необходимо ввести подпрограмму для типовых желаемых логарифмических амплитудных и фазовых характеристик.
- Провести сравнительный анализ логарифмических характеристик неизменной части разомкнутой системы с желаемыми логарифмическими характеристиками.

- произвести синтез корректирующих звеньев;
- получить характеристики спроектированной в соответствии с требованиями технического задания (ТЗ) системы.

Построения логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик

- Рассмотрим пример построения логарифмических амплитудно-фазовых частотных характеристик следящей системы, в неизменную часть которой входят интегрирующее, апериодическое и колебательное звено.

$$W(p) = \frac{K}{p(T_1 p + 1)(T_2^2 p^2 + 2\xi T_2 p + 1)}$$

Частотные характеристики системы

- Заменин в передаточной функции

p = *j*ω, получают частотную передаточную функцию

$$W(j\omega)=\frac{K}{j\omega(T_1 j\omega+1)\left[\left(1-T_2\omega^2\right)+j2\xi T\omega\right]}$$

- Амплитуда *A(ω)* частотной передаточной функции в данном случае имеет вид

$$A(\omega)=\frac{K}{\omega\sqrt{1+T^2\omega^2}\sqrt{\left(1-T_2^2\omega^2\right)^2+\left(2\xi T_2\omega\right)^2}}$$

- а фазовая функция

$$\varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\omega\mathrm{T}_1-\mathrm{arctg}\frac{2\xi\mathrm{T}_2\omega}{1-\mathrm{T}_2^2\omega^2}$$

- При использовании системы MathCAD для расчета и построения точных логарифмических частотных характеристик пользуются выражением

$$L1(\omega) := 20\log A(\omega)$$

- Асимптотическая логарифмическая амплитудная частотная характеристика рассчитывается с использованием функции *if*,

- В рассматриваемом случае расчет такой характеристики представлен в виде следующего набора выражений

$$
\begin{cases}
L_0(\omega) := 20\log K - 20\log \omega \\
L_1(\omega) := if\left(\omega < \dfrac{1}{T_1}, 0, -20\log(\omega \mathrm{T}_1)\right) \\
L_2(\omega) := if\left(\omega < \dfrac{1}{T_2}, 0, -40\log(\omega \mathrm{T}_2)\right) \\
L(\omega) := L_0(\omega) + L_1(\omega) + L_2(\omega) \\
\\
\omega := 1, 1.5, ..100
\end{cases}
$$

Фазовая частотная характеристика в данном случае рассчитывается по выражению:

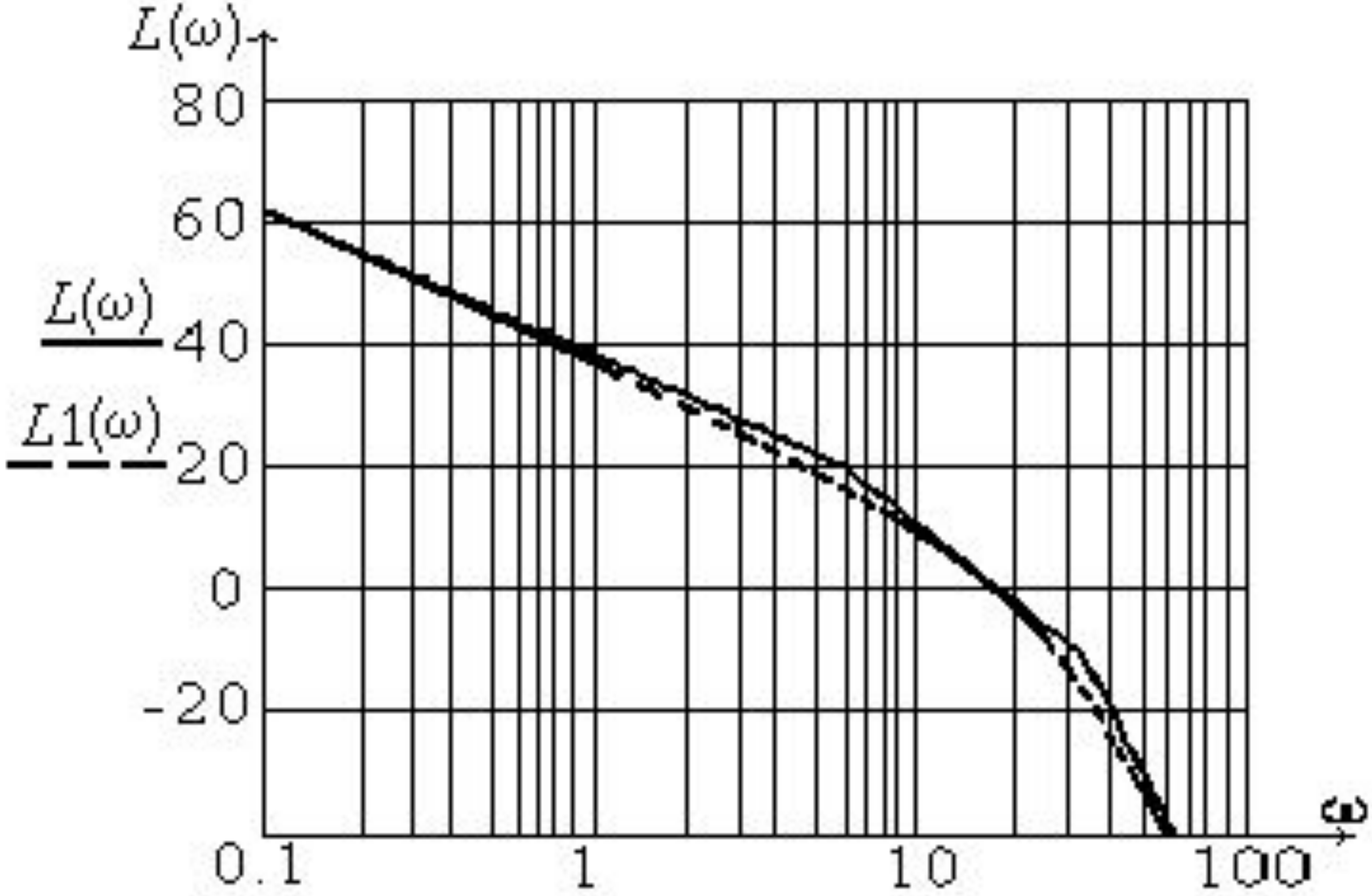
$$\varphi(\omega) := -\frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(\omega T_1) - \operatorname{atan}\frac{2\xi T_2 \omega}{1 - T_2^2 \omega^2}$$

Результаты расчетов при исходных данных

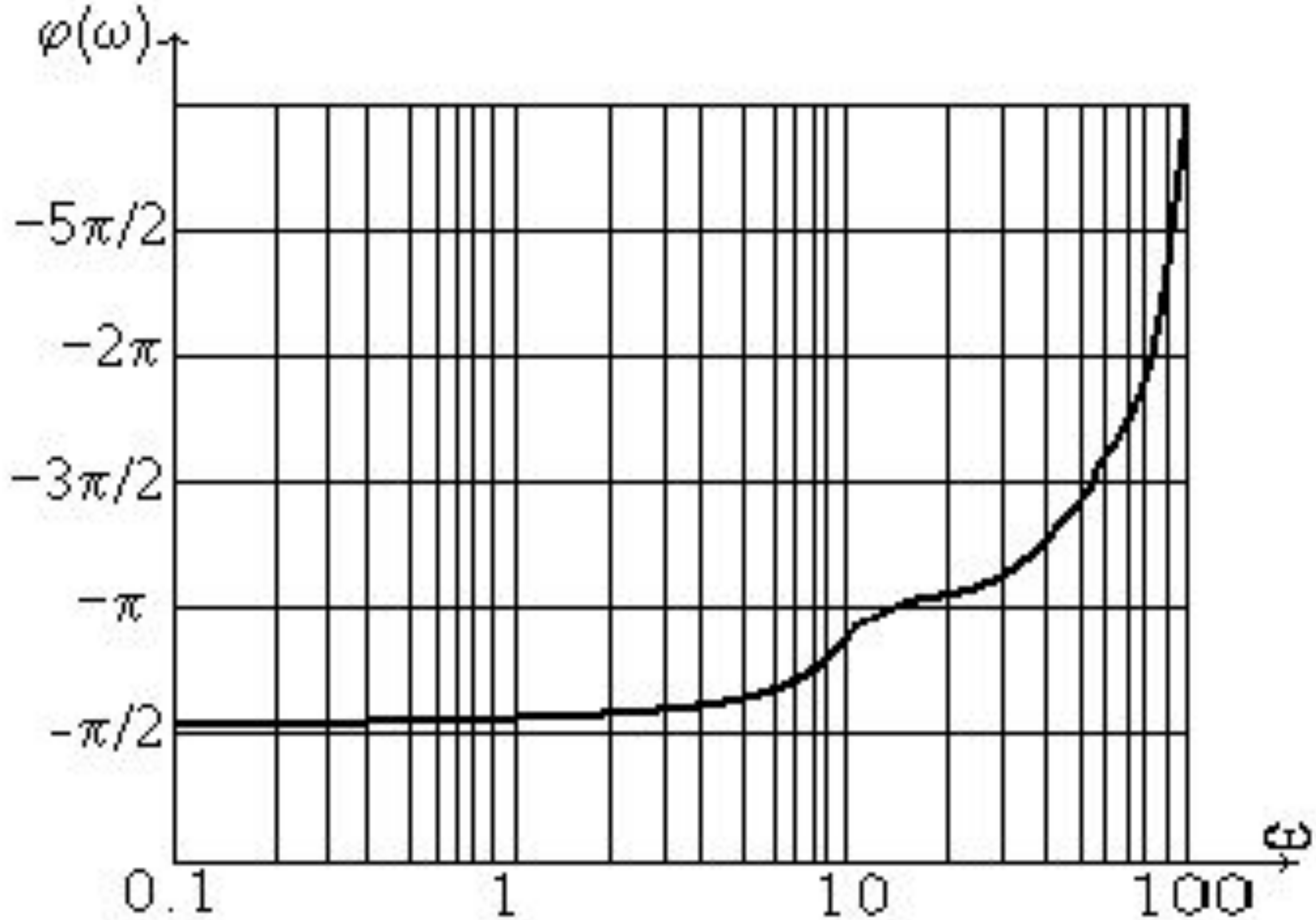
$$T2 := 0.08; \quad T1 := 0.15; \quad K := 100; \quad \xi := 0.15$$

имеют следующий вид

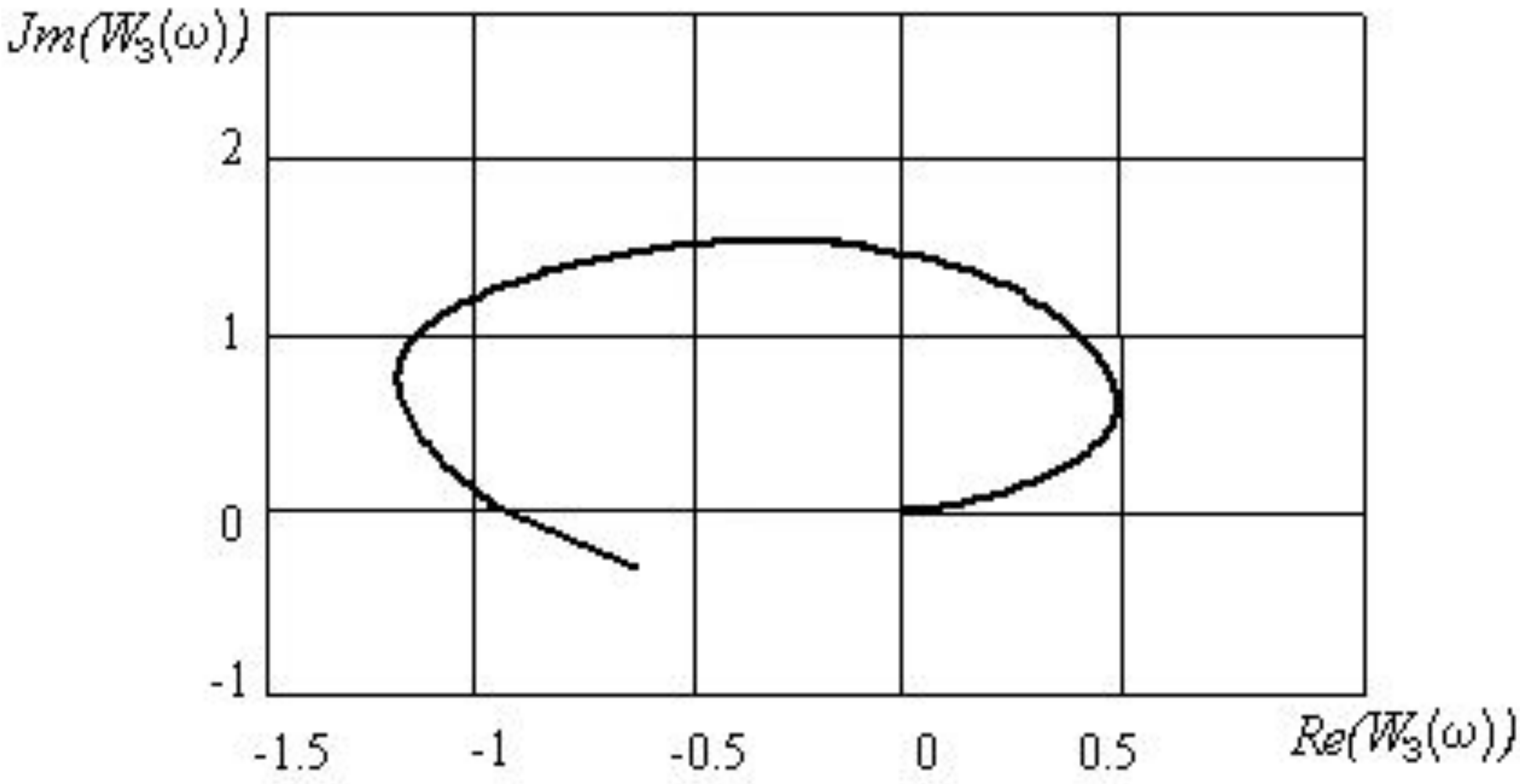
Логарифмические амплитудные частотные характеристики



Логарифмическая фазовая частотная характеристика



Амплитудно-фазовая частотная характеристика



Амплитудная частотная характеристика