

# НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Раздел № 3  
Солодухин Е.А.

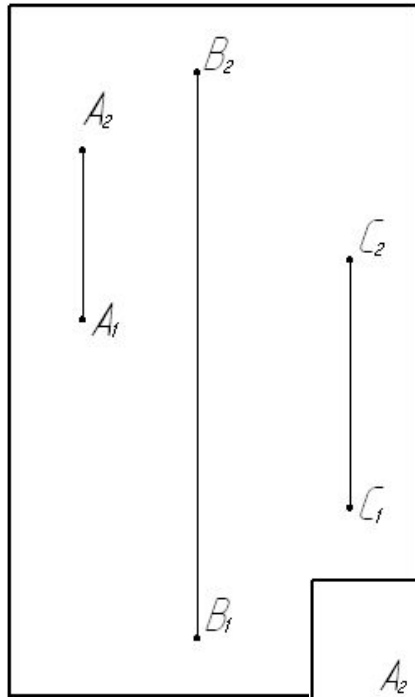
## **ОБЯЗАТЕЛЬНО**

- Рассмотреть частный случай ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ, когда плоскость проецирующая

# Плоскость

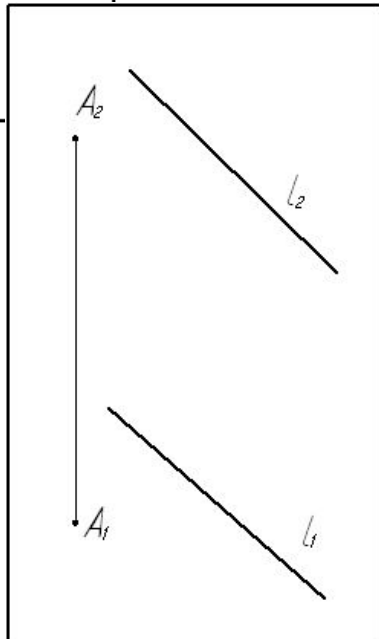
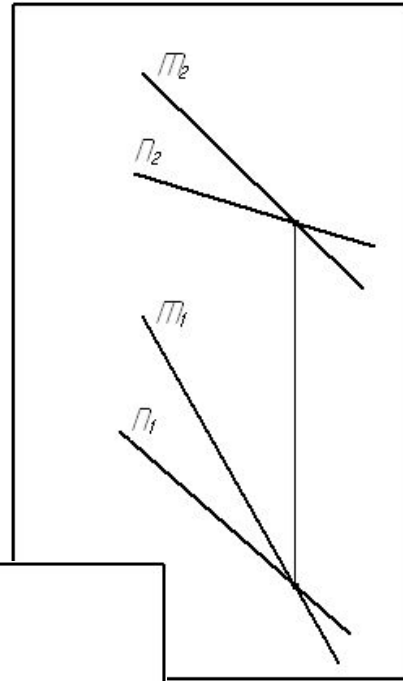
Плоскость это один из видов поверхности  
– плоская поверхность.

# Способы задания плоскости

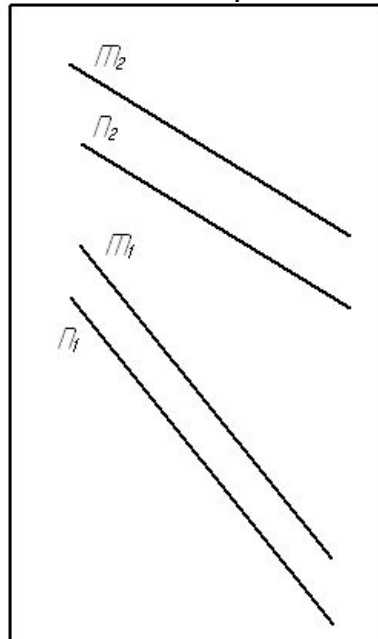


$\Gamma(A, B, C)$

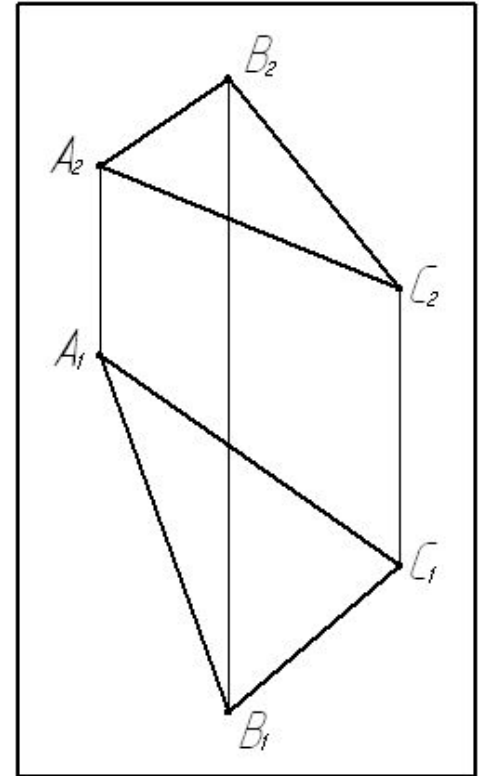
$\Sigma(m \cap n)$



$T(A, l)$

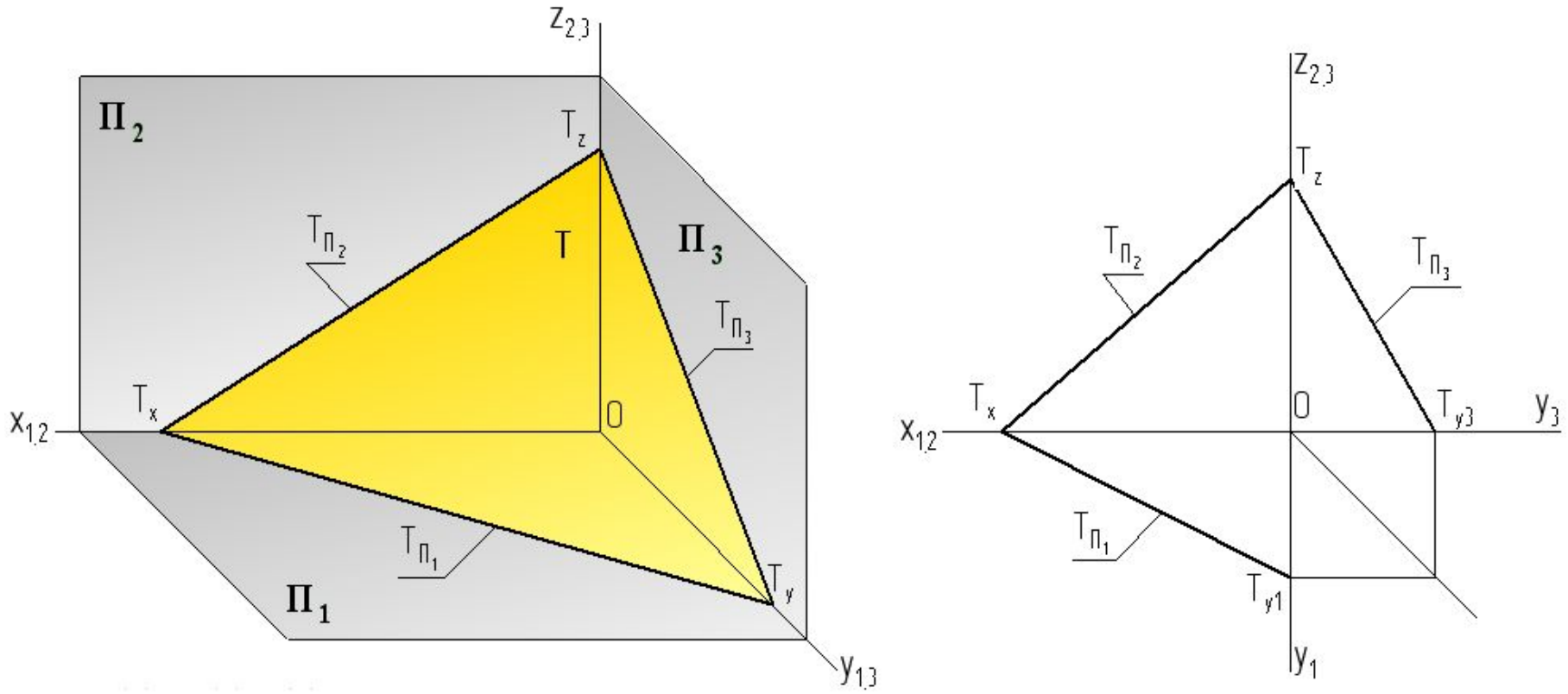


$\Omega(n \parallel m)$



$\Delta(\triangle ABC)$

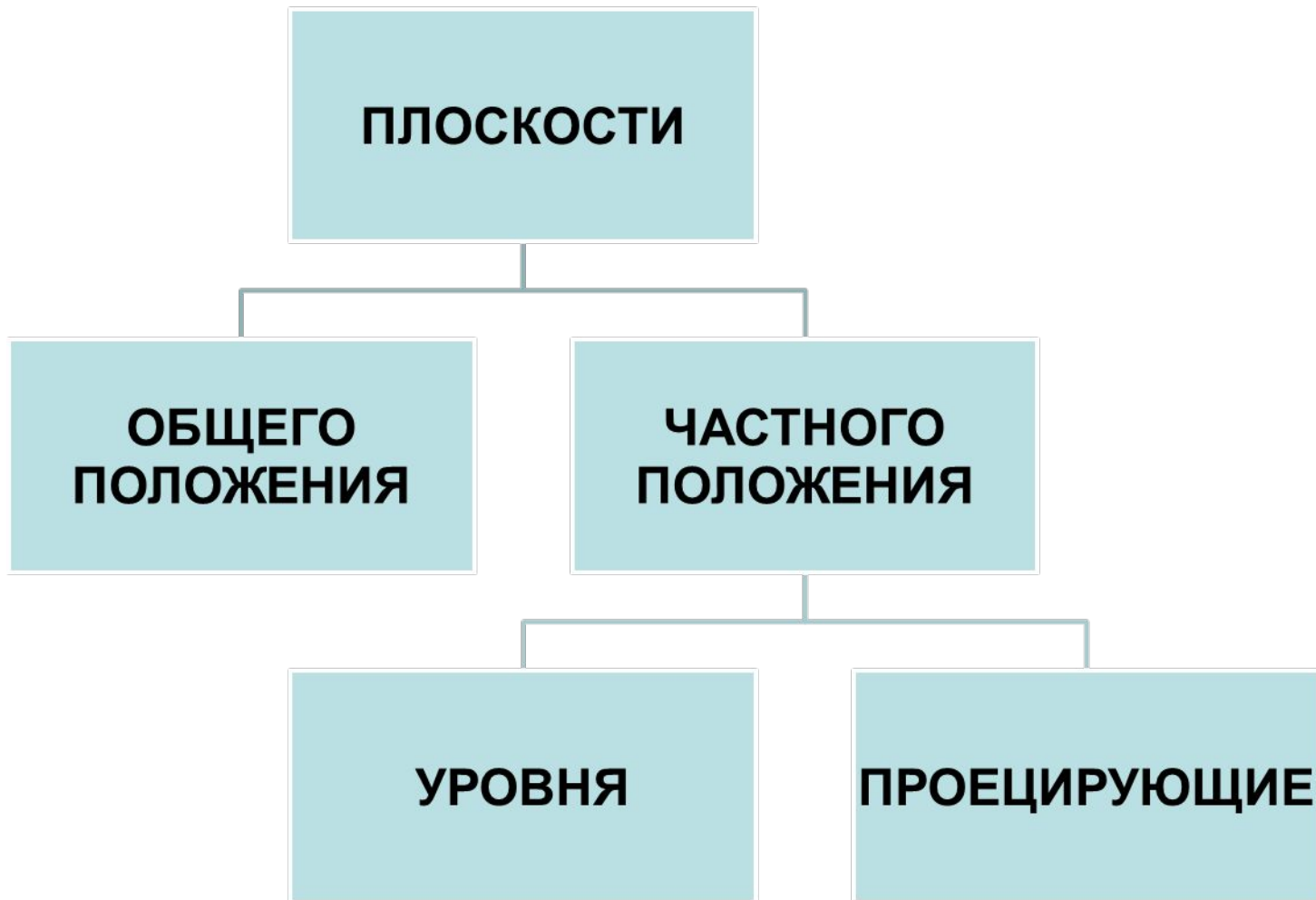
# Следы плоскости



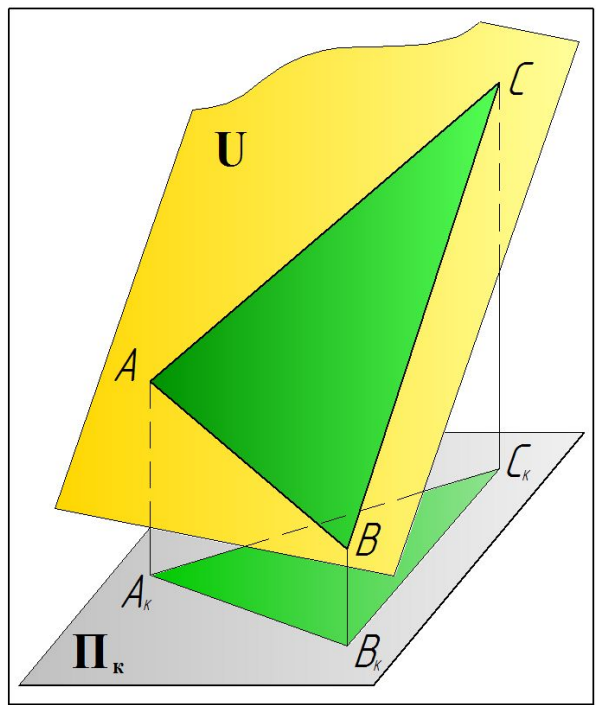
След плоскости – прямая, по которой плоскость пересекается с какой-либо плоскостью проекций -  $T_{\Pi_1}$ ,  $T_{\Pi_2}$ ,  $T_{\Pi_3}$ .

Точки пересечения плоскости с осями координат называются точками схода следов –  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ .

# Положение плоскости относительно плоскостей проекций



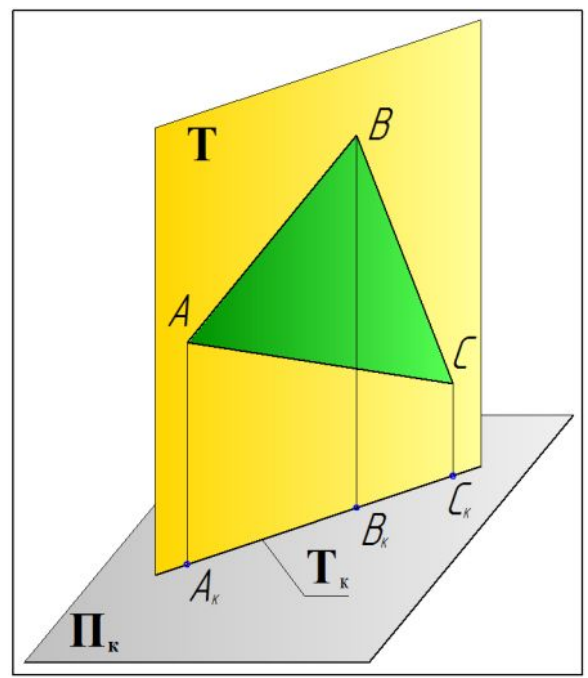
# Общее положение



$$U \not\parallel \Pi_K \wedge U \not\perp \Pi_K$$

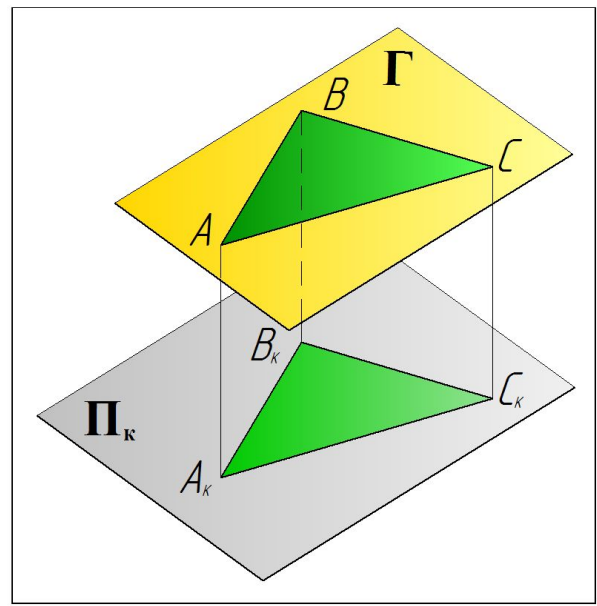
# Частное положение

## Проецирующая плоскость



$$T \perp \Pi_K$$

## Плоскость уровня

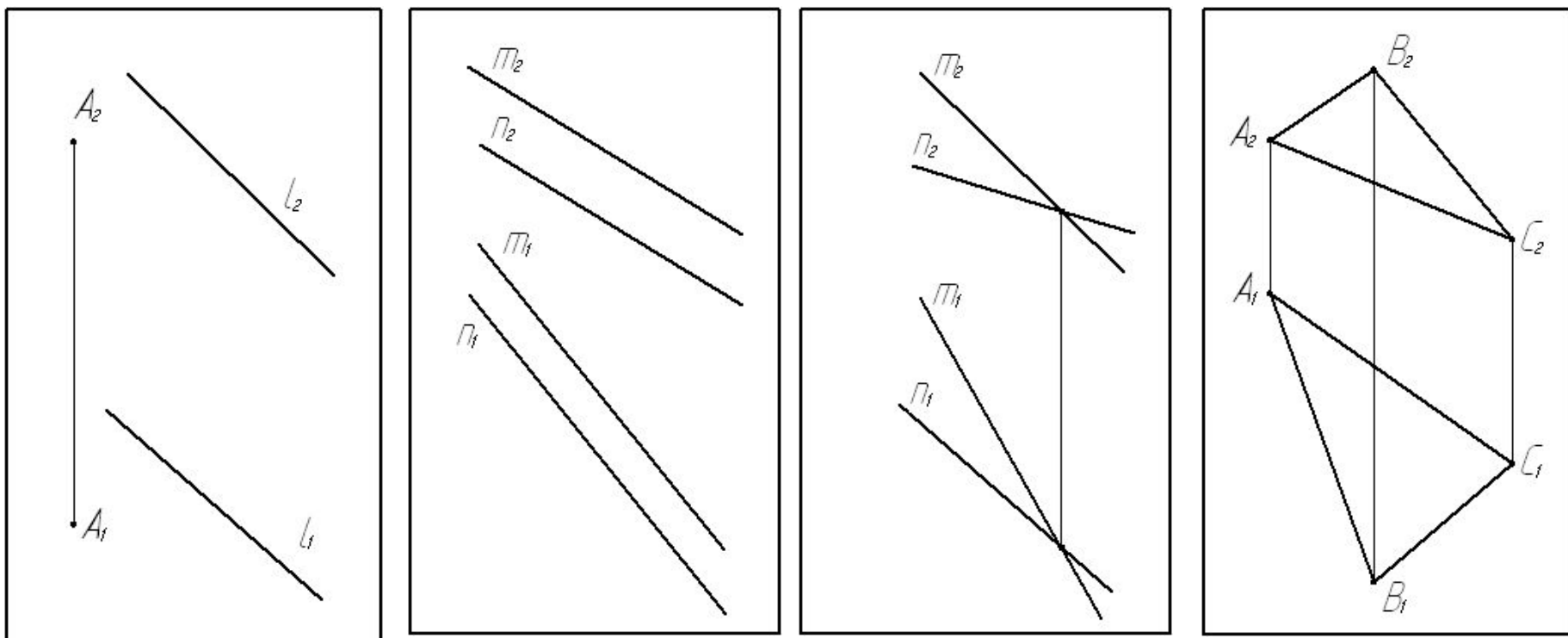


$$\Gamma \parallel \Pi_K$$



# Плоскость общего положения

Плоскость непараллельная и неперпендикулярная плоскостям проекций



Ни одна из проекций плоскости не имеет форму прямой линии

# Плоскости частного положения

# Проецирующие плоскости

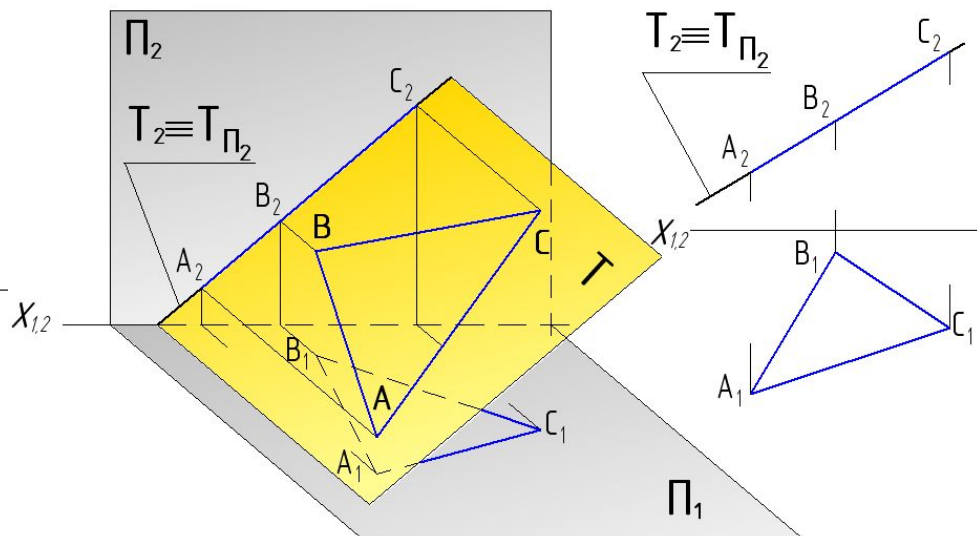
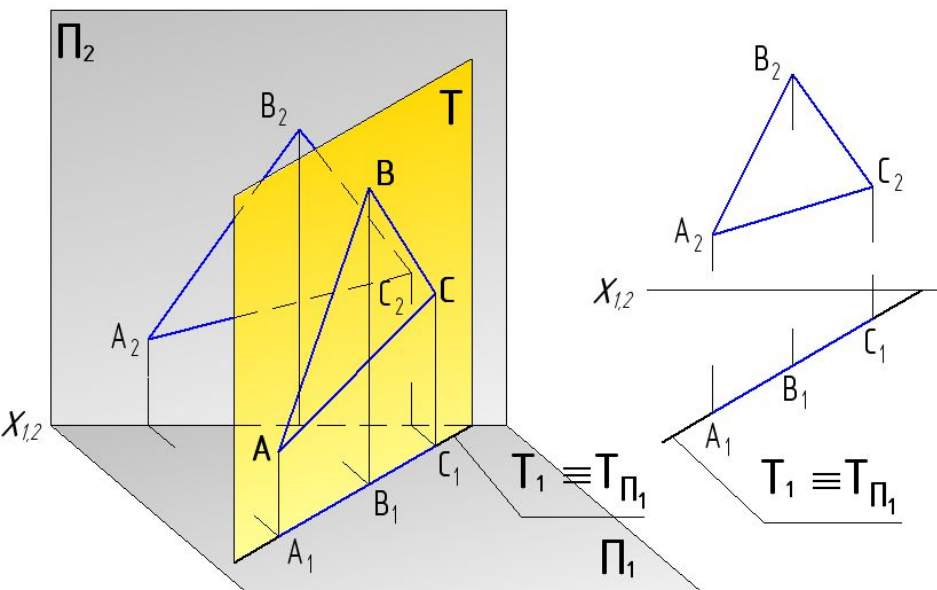
Это плоскости перпендикулярные одной из плоскостей проекций

Горизонтально-проецирующая

Фронтально-проецирующая

$T \perp$

$T \perp$



$T_1$  – прямая и  $T_1 \equiv T_{\Pi_1}$

$T_2$  – прямая и  $T_2 \equiv T_{\Pi_2}$

# Плоскости уровня

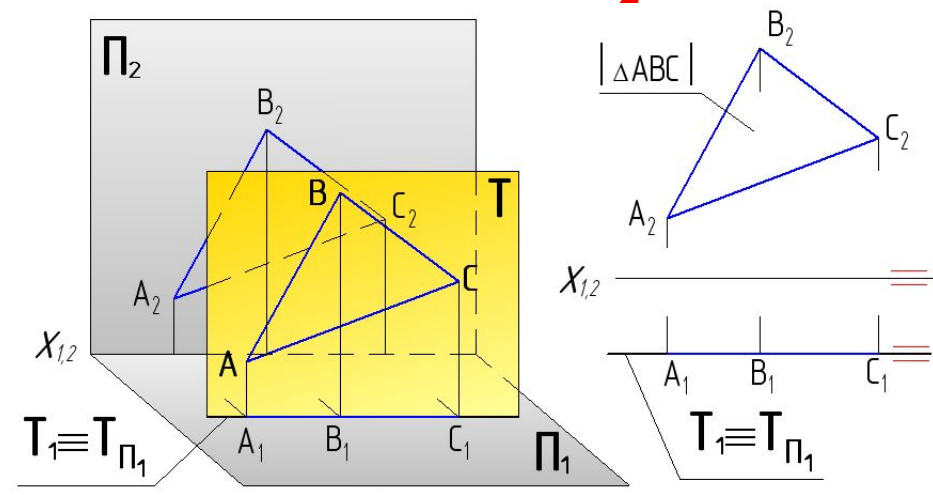
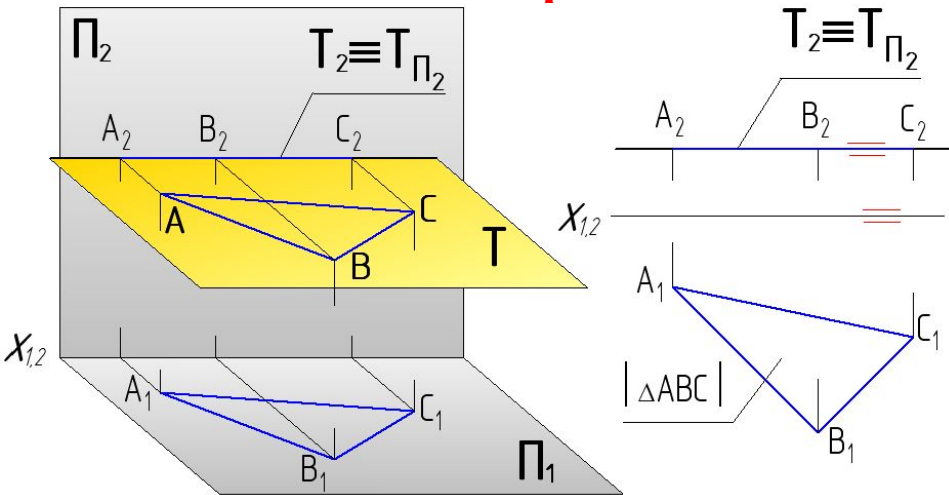
Это плоскости параллельные одной из плоскостей проекций

Горизонтальная плоскость

Фронтальная плоскость

$\Gamma \parallel \Pi_1$

$T \parallel \Pi_2$



$\Gamma_2$  — прямая и  $\Gamma_2 \equiv \Gamma_{\Pi_2}$   
и  $\Gamma_2 \parallel X_{1,2}$

$T_1$  — прямая и  $T_1 \equiv T_{\Pi_1}$   
и  $T_1 \parallel X_{1,2}$

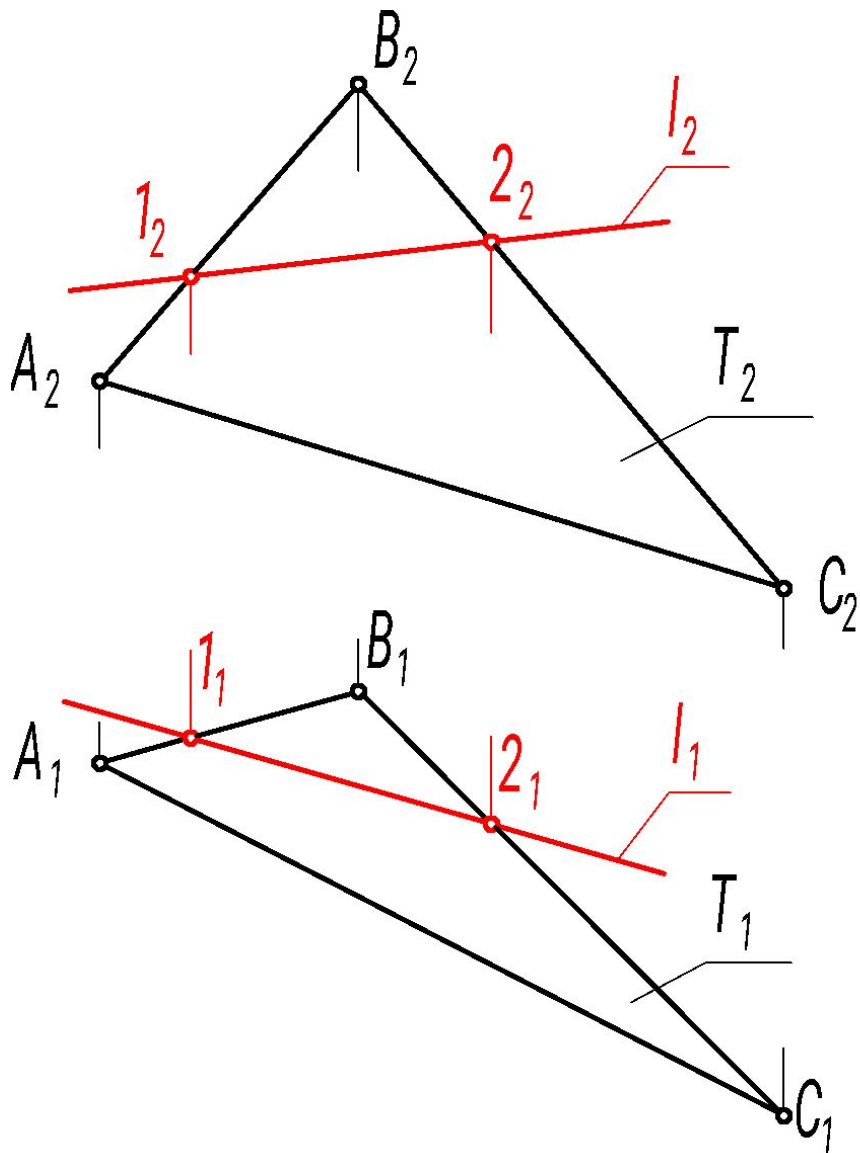
$\Delta ABC \subset T \Rightarrow \Delta ABC \parallel \Pi_1 \Rightarrow A_1 B_1 C_1 \cong ABC$

$\Delta ABC \subset T \Rightarrow \Delta ABC \parallel \Pi_2 \Rightarrow A_2 B_2 C_2 \cong ABC$

## **Вывод:**

У плоскости частного положения одна из проекций обязательно имеет форму прямой линии.

# Прямая на плоскости



Прямая принадлежит плоскости, если две точки прямой принадлежат этой плоскости.

$$l(1,2) \subset T \Leftrightarrow (1 \in T) \wedge (2 \in T)$$

Принимаем: плоскость  $T(\triangle ABC)$ .

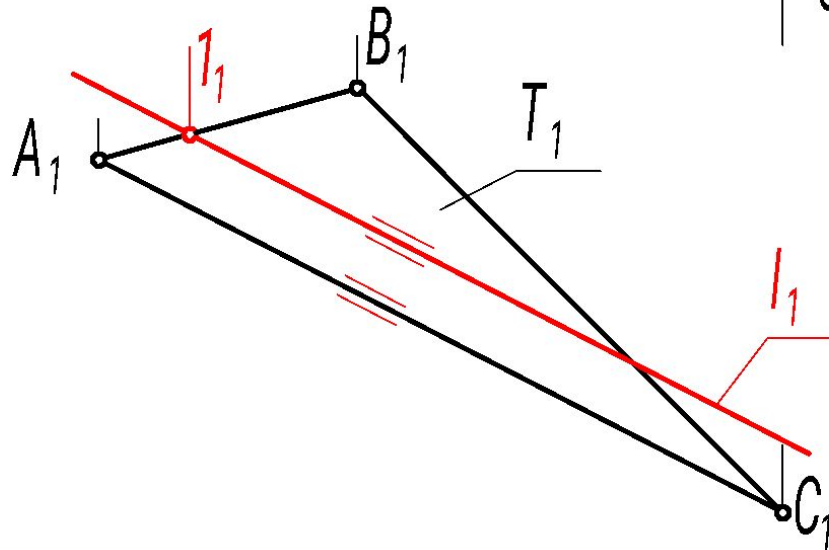
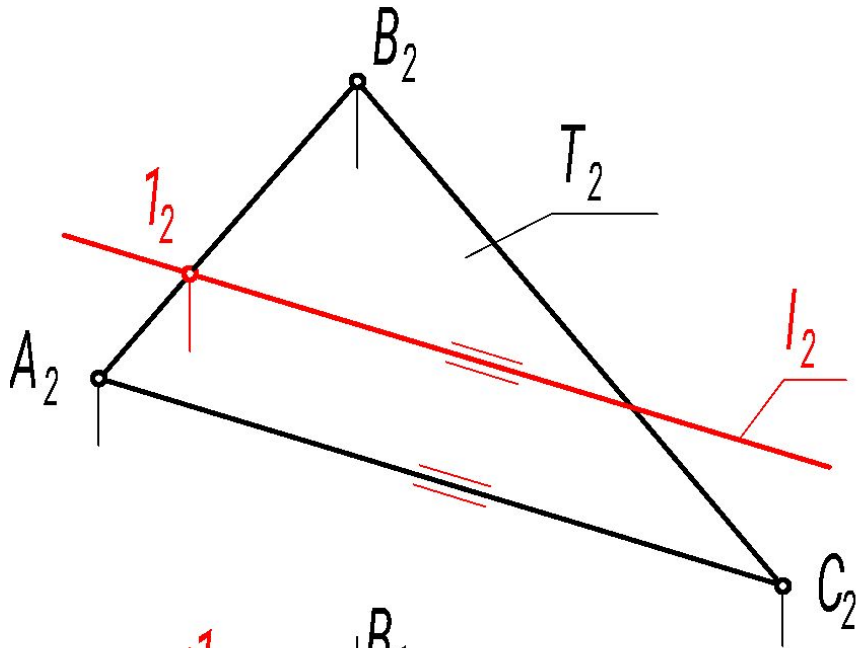
Построить  $l \subset T$ .

*Первый вариант*

**Задаем:**

точка 1 принадлежит стороне АВ,  
точка 2 принадлежит стороне ВС.

$$(1 \in AB) \wedge (2 \in BC)$$



## Второй вариант

**Задаем:** точка 1 принадлежит стороне АВ, а точка 2 принадлежит стороне АС, но является несобственной точкой.

$$(1 \in AB) ; (2 \in AC; 2 \equiv 2^\infty)$$

Следовательно, прямая  $l$  параллельна стороне АС. ( $l \parallel AC$ )

Т.е. прямая задается одной точкой и направлением

$$l(1, s) \Rightarrow 1 \in l \wedge l \parallel s$$

В качестве направления может быть выбрана любая прямая, принадлежащая плоскости.

В нашем примере  $s \equiv AC$ , т.е.  $l \parallel AC$

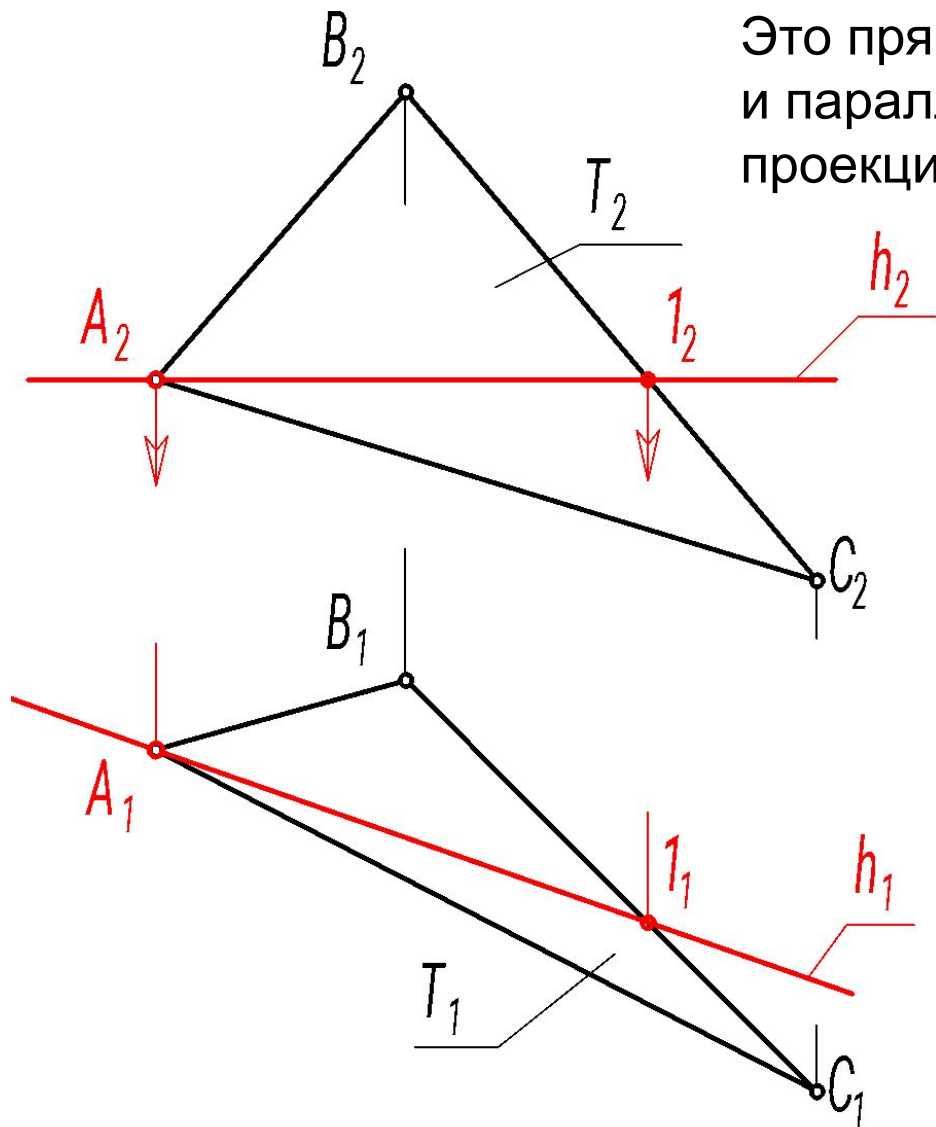
# Главные линии плоскости

К главным линиям плоскости относятся прямые уровня - горизонталь, фронталь, профильная прямая, и линии наибольшего наклона плоскости.



# Прямые уровня плоскости

# Горизонталь плоскости



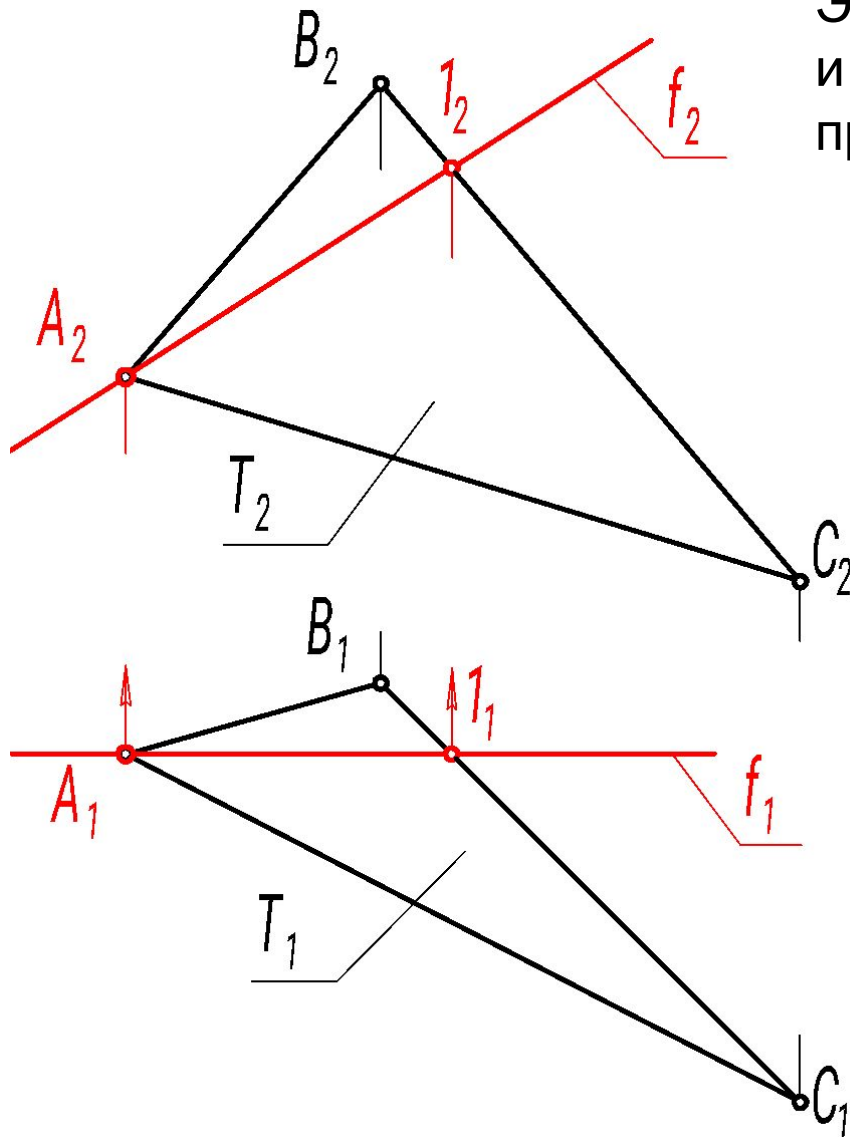
Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная горизонтальной плоскости проекций

Плоскость  $T(\triangle ABC)$   
Построить  $h \subset T$

$h \parallel \Pi_1 \Rightarrow h_2 \parallel x_{1,2}$   
Задаем  $h(A, I)$

# Фронталь плоскости

Это прямая, принадлежащая плоскости, и параллельная фронтальной плоскости проекций



Плоскость  $T(\triangle ABC)$   
Построить  $f \subset T$

$f \parallel \Pi_2 \Rightarrow f_1 \parallel x_{1,2}$   
Задаем  $f(A, I)$

# Линии наибольшего наклона плоскости

Данные линии применяются для определения величины угла наклона плоскости к какой-либо плоскости проекций.

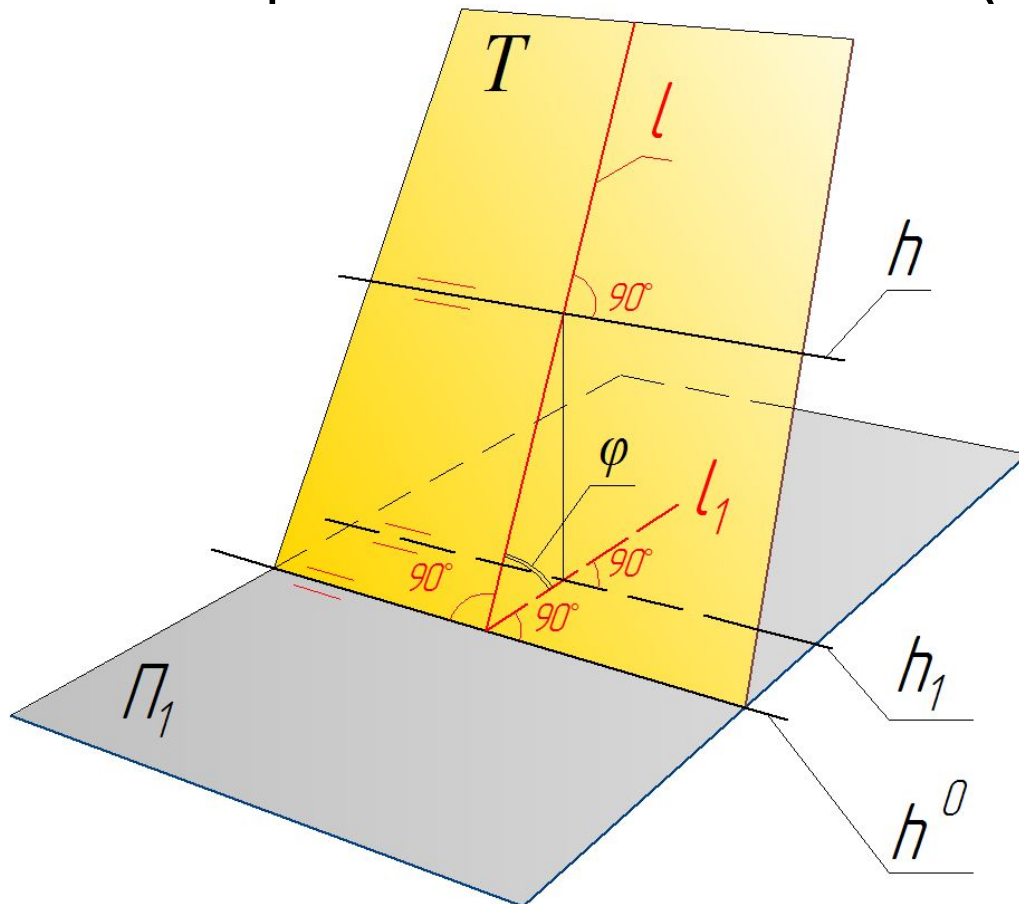
В частности, линия наибольшего наклона плоскости, используемая для определения угла наклона к горизонтальной плоскости проекций, получила название линии наибольшего ската плоскости.

# Линия наибольшего ската плоскости

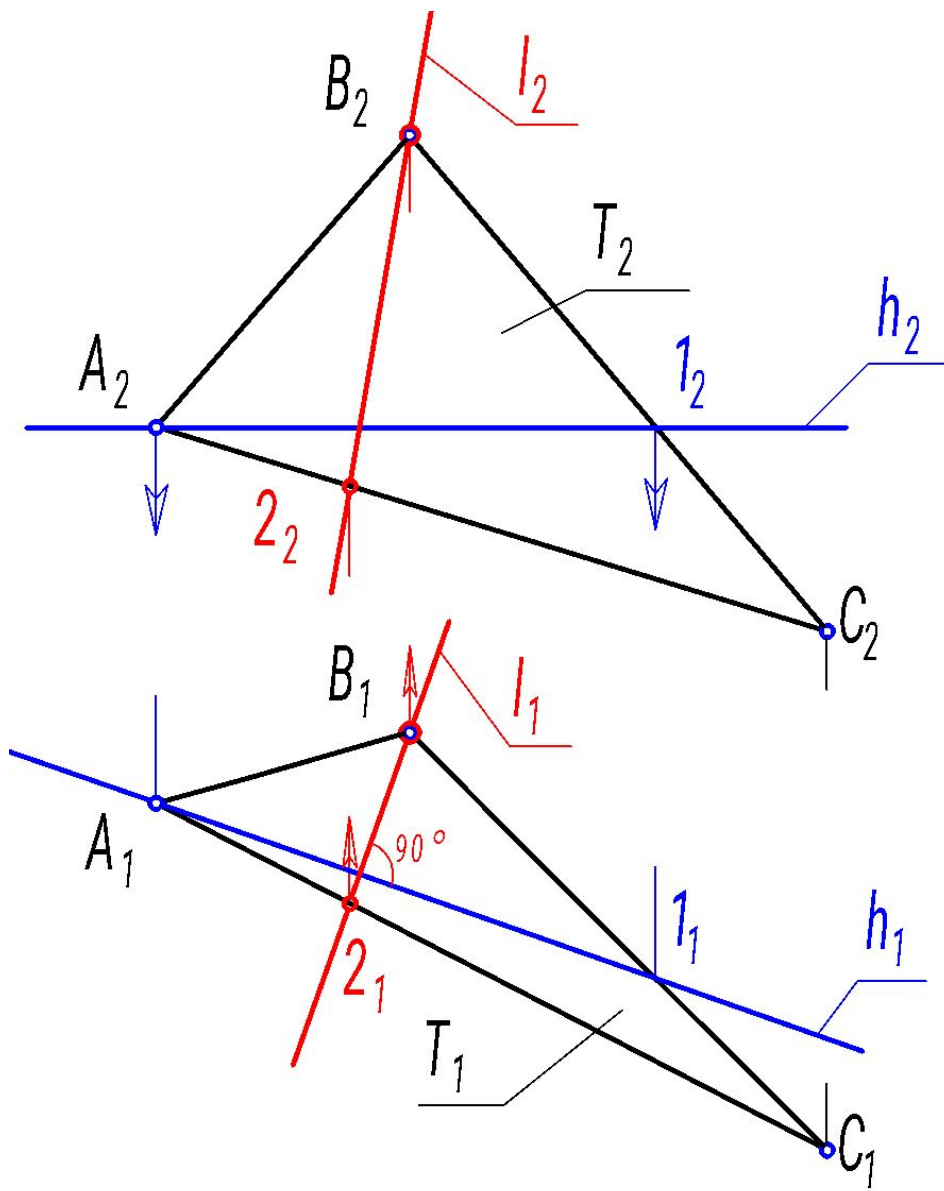
$T$  – плоскость общего положения.

$l$  – линия наибольшего ската плоскости  $T$ , прямая общего положения ( $l \subset T$ ;  $l \perp \Pi_1$ ;  $l \perp \Pi_2$ ).

$h$  – горизонталь плоскости  $T$  ( $h \subset T$ ).



$$\left. \begin{array}{l} l \perp h \\ h \parallel \Pi_1 \\ l \perp \Pi_2 \\ \Pi_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} l_1 \perp \\ h_1 \end{array}$$



Плоскость  $T(\triangle ABC)$   
 Построить проекции  
 линии наибольшего  
 ската  $l$  плоскости  $T$ .

Так как  $l \subset T$ , то задаем

$$l(B, 2) ; 2 \in AC$$

Строим  $l_1 \perp h_1$

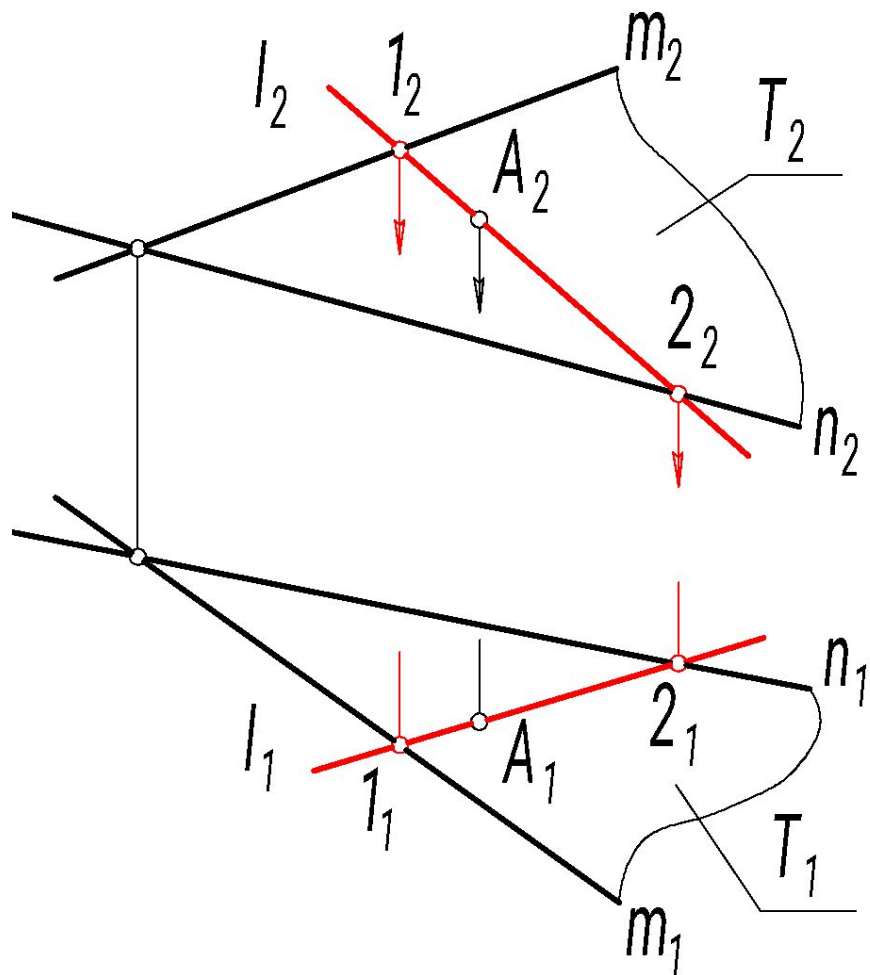
# Точка на плоскости

Точка принадлежит плоскости,  
если она принадлежит прямой,  
принадлежащей этой плоскости

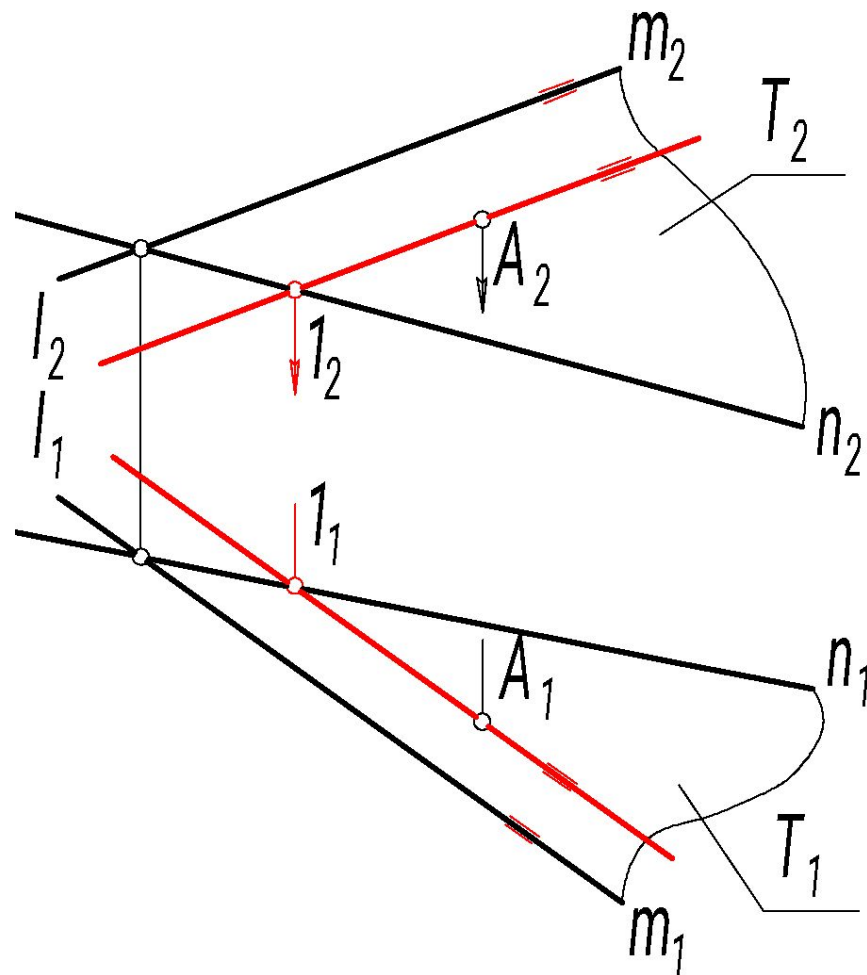
$$A \in \Phi \Leftrightarrow A \in l, l \subset \Phi$$



$A \in l; l(1,2) \subset T$ ; задаем  $(1 \in m)$ ;  
 $(2 \in n)$

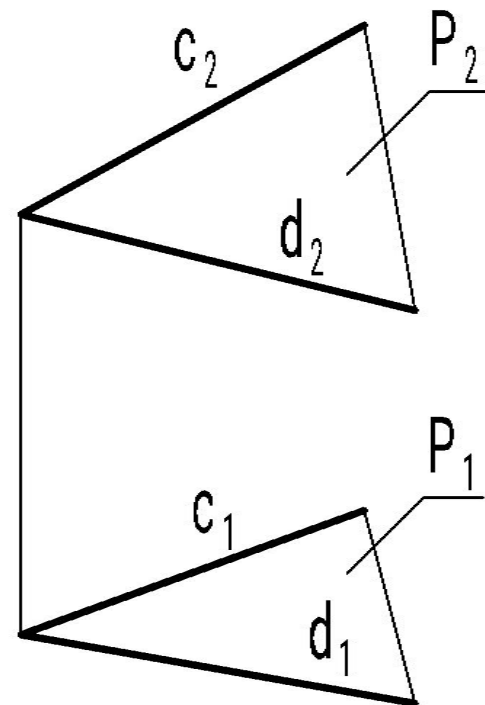
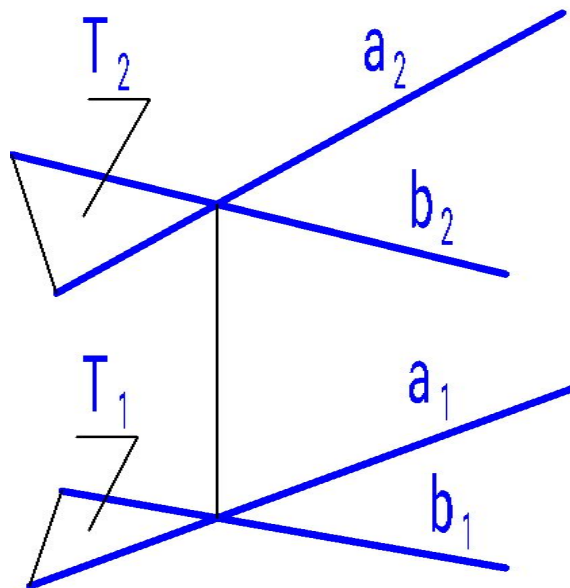


$A \in l; l(1,s)$ ; задаем  $(1 \in n)$ ;  $(l \parallel m)$



# Взаимное положение двух плоскостей

# Параллельные плоскости

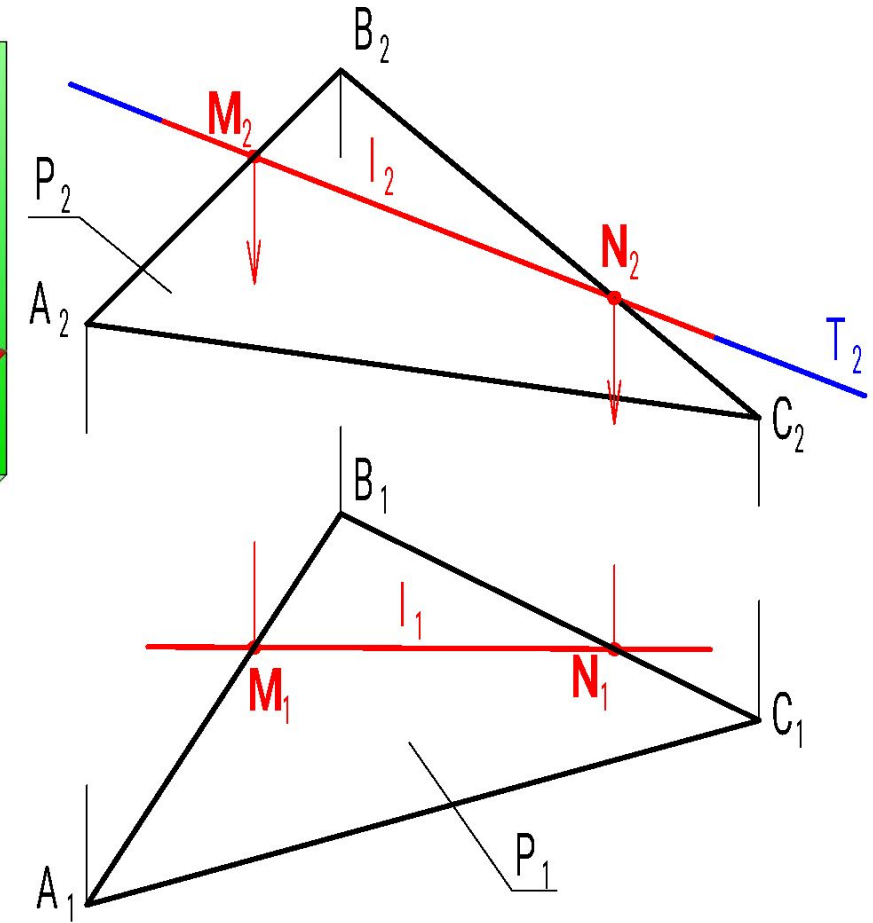
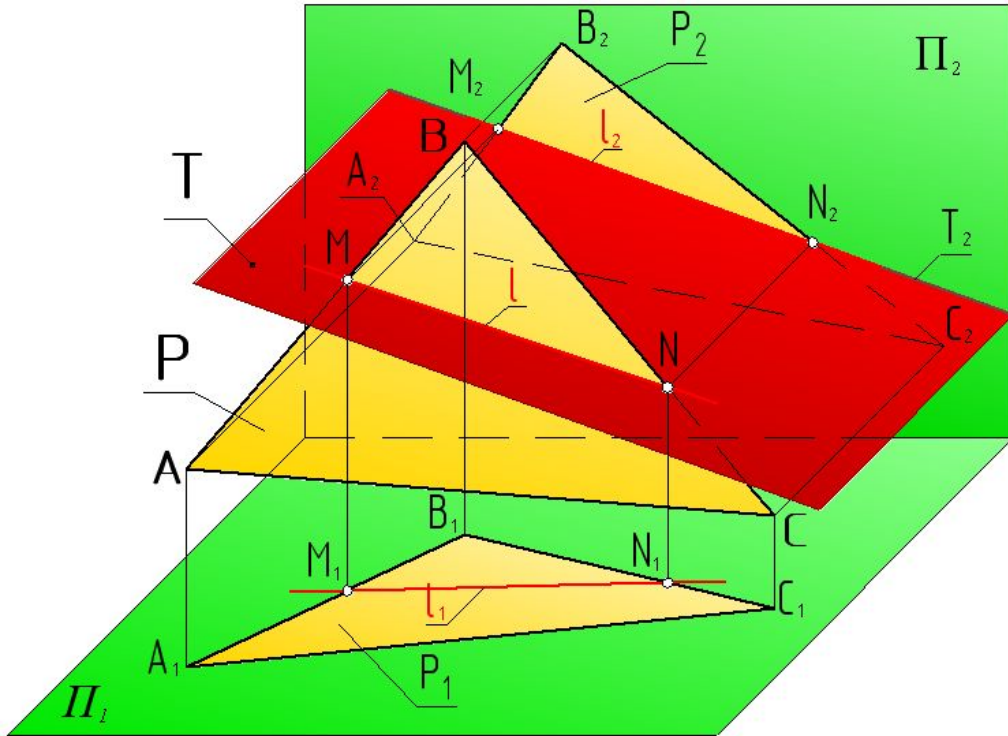


Две плоскости  
параллельны, если две  
пересекающиеся прямые  
одной плоскости  
соответственно  
параллельны двум  
пересекающимся прямым  
другой плоскости.

$$\begin{aligned}
 &T(a \cap b); \\
 &P(c \cap d); \\
 &a \parallel c; b \parallel d; \\
 &\Rightarrow T \parallel P
 \end{aligned}$$

# Пересекающиеся плоскости

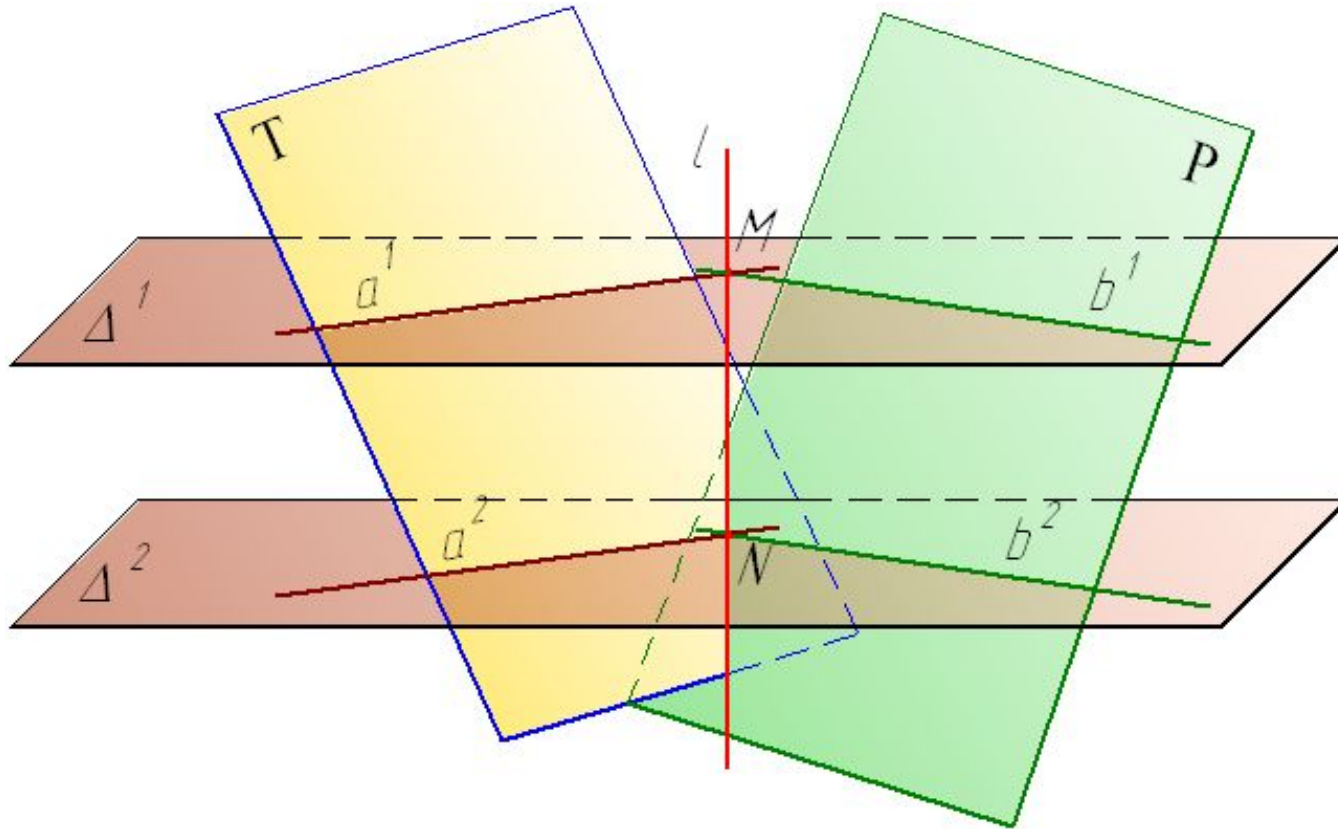
Частный случай: одна из двух пересекающихся плоскостей плоскость частного положения – **T** фронтально-проецирующая.



$$\begin{aligned}
 & T \cap P(\triangle ABC) = l \\
 & \Rightarrow l \subset T \text{ и } l \subset P(\triangle ABC) \\
 & \quad l(M, N) \\
 & M = T \cap AB; N = T \cap BC
 \end{aligned}$$

$$T \perp \Pi_2 \Rightarrow T_2 - \text{прямая} \Rightarrow (M_2 N_2 \equiv T_2)$$

Общий случай: Заданы две плоскости  $T$  и  $P$  общего положения.



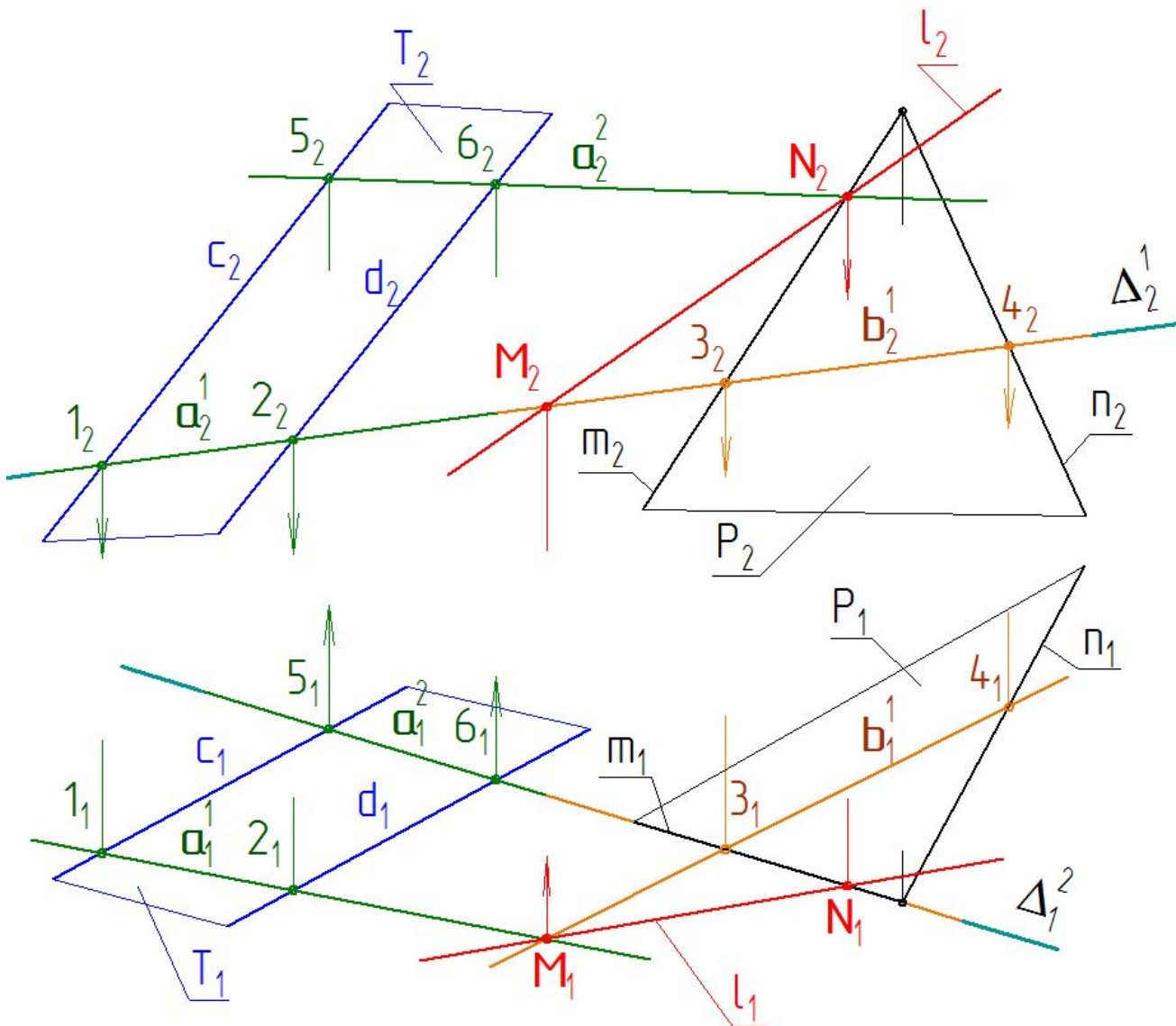
$$T \cap P = l(M, N)$$

Точки  $M$  и  $N$  могут быть определены как точки пересечения трех плоскостей

$$M = T \cap P \cap \Delta^1; \quad N = T \cap P \cap \Delta^2$$

$\Delta^1$  и  $\Delta^2$  – **вспомогательные секущие плоскости** - **проецирующие**.

$$\Delta^1 \cap T = a^1 \text{ и } \Delta^1 \cap P = b^1 \Rightarrow a^1 \cap b^1 = M \quad \Delta^2 \cap T = a^2 \text{ и } \Delta^2 \cap P = b^2 \Rightarrow a^2 \cap b^2 = N$$



$$\Delta^1 \perp \Pi_2$$

$$\Delta^2 \perp \Pi_1, m \subset \Delta^2 \Rightarrow m_1 \equiv \Delta^2_1$$

$$\Rightarrow \Delta^2 \cap P = m$$

$$\Delta^2 \cap T = a^2$$

$$\Rightarrow N = m \cap a^2$$



# **Взаимное положение прямой линии и плоскости**

Прямая по отношению к плоскости может занимать следующие положения:

- Принадлежать;
- Быть параллельной;
- Пересекать;
- Быть перпендикулярной.



# Последовательность действий при определении взаимного положения прямой линии и плоскости

Пример. Заданы прямая  $l$  и плоскость  $\Phi(\triangle ABC)$ .

1. Одну из проекций заданной прямой  $l$ , которую условно будем называть первой, совместить с одноименной проекцией вспомогательной прямой, например  $m$ . Прямую  $m$  нужно рассматривать как принадлежащую заданной плоскости  $\Phi(\triangle ABC)$ .

$$l_k \equiv m_k; k=1, 2; m \subset \Phi(\triangle ABC)$$

На рисунке  $l_1 \equiv m_1$

2. Построить недостающую (условно вторую) проекцию вспомогательной прямой  $m$ .

если  $(m_1 \equiv l_1)$  то строиться  $m_2$ ;

если  $(m_2 \equiv l_2)$  то строиться  $m_1$ .

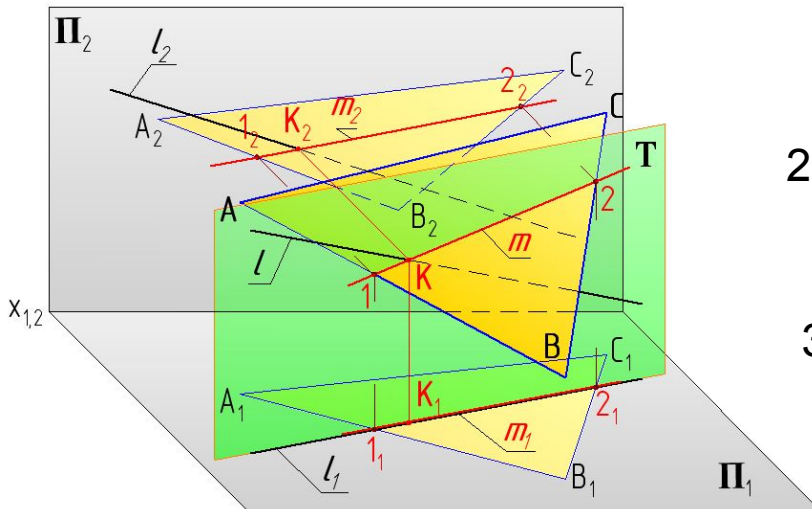
3. На построенной (условно второй) проекции определить взаимное положение прямой  $l$  и вспомогательной прямой  $m$ .

если  $(m \equiv l)$ , то  $l \subset \Phi$ ,

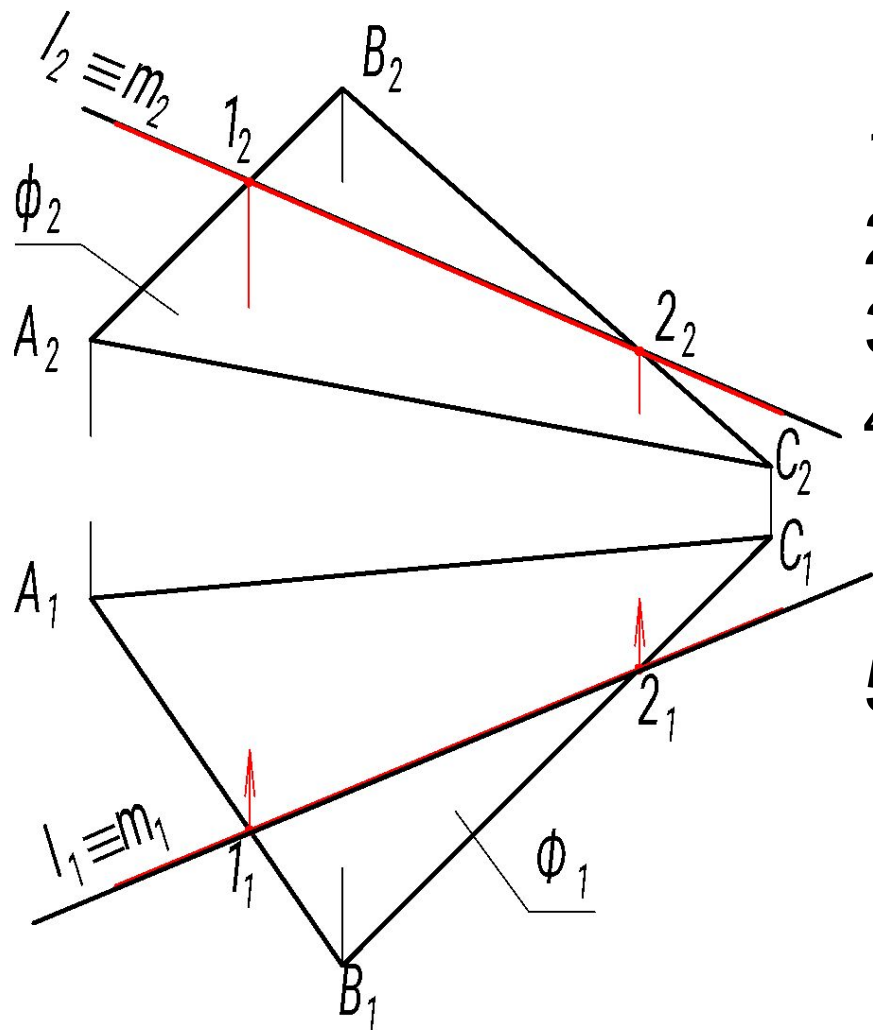
если  $(m \parallel l)$ , то  $l \parallel \Phi$ ,

если  $(m \cap l)$ , то  $l \cap \Phi$

На примере  $(l \cap m = K, K = l \cap \Phi)$ .

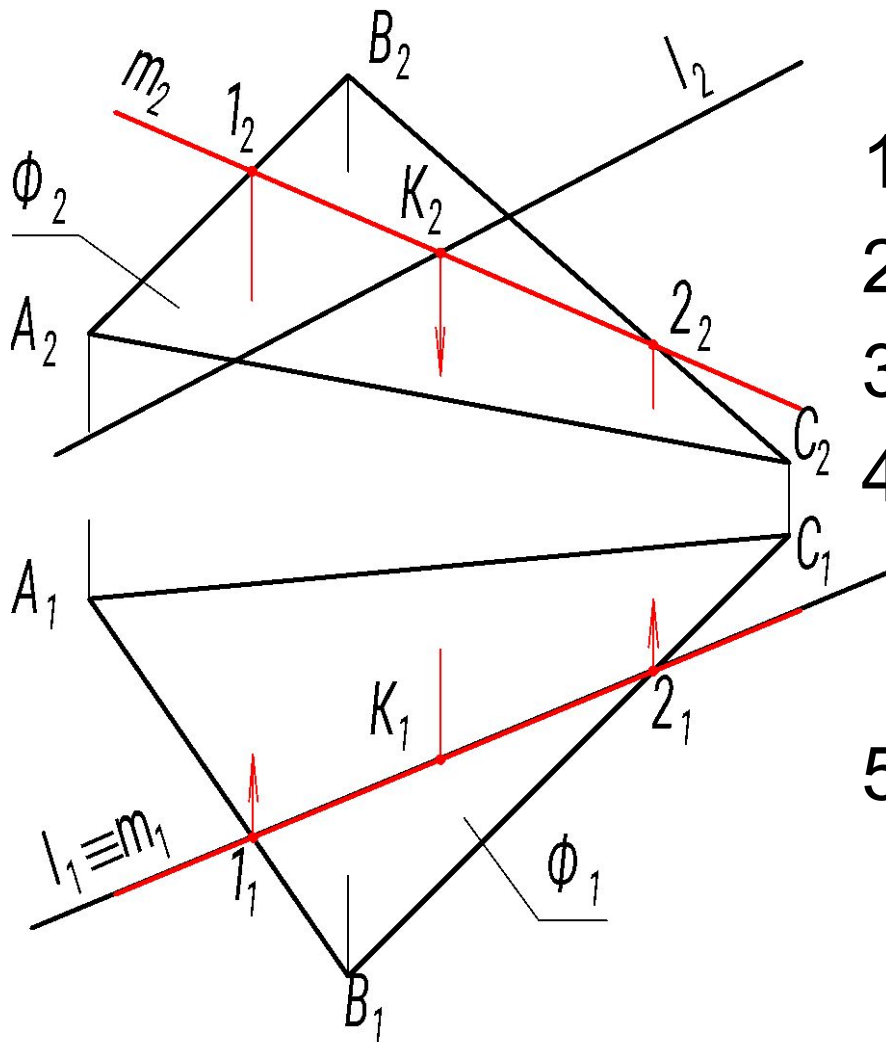


# Пример 1



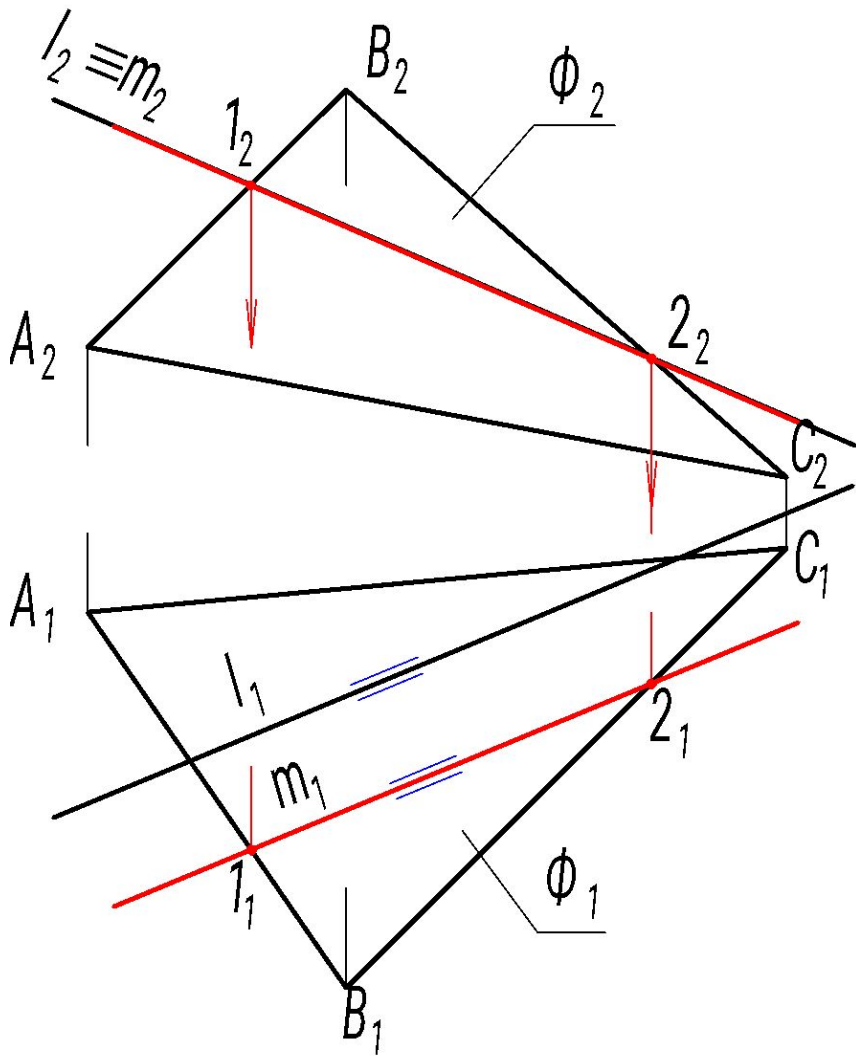
1. Выбрано  $l_1 \equiv m_1$
2.  $m(1,2)$ ;  $1 = m \cap AB$ ;  $2 = m \cap BC$ ;
3. Строим  $m_2$ .
4. Определяем взаимное положение прямых  $m_2$  и  $l_2$   
 $m_2 \equiv l_2$
5. Следовательно,  $l \subset \Phi$

## Пример 2



1. Выбрано  $l_1 \equiv m_1$
  2.  $m(1,2)$ ;  $1 = m \cap AB$ ;  $2 = m \cap BC$ ;
  3. Строим  $m_2$ .
  4. Определяем взаимное положение прямых  $m_2$  и  $l_2$
- $$m_2 \cap l_2 = K_2$$
5. Следовательно,  $l \cap \Phi = K$

# Пример 3

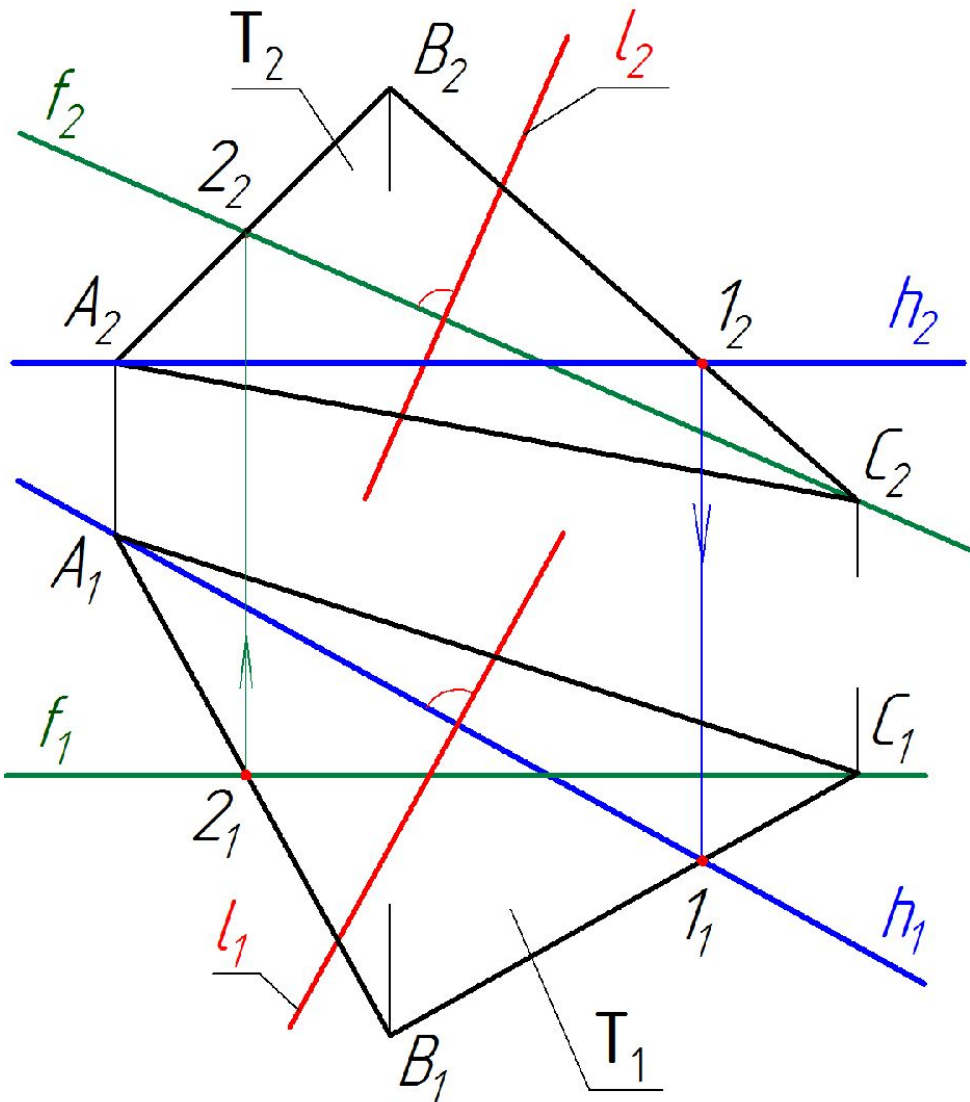


1. Выбрано  $l_2 \equiv m_2$
2.  $m(1,2)$ ;  $1 = m \cap AB$ ;  $2 = m \cap BC$ ;
3. Строим  $m_1$ .
4. Определяем взаимное положение прямых  $m_1$  и  $l_1$   

$$m_1 \parallel l_1$$
5. Следовательно,  $l \parallel \Phi$

# Прямая перпендикулярная плоскости





Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости.

В качестве прямых, лежащих в плоскости, должны быть использованы только прямые уровня – горизонталь и фронталь.

$$l \perp T \Rightarrow l \perp h \wedge l \perp f;$$

$T$  – плоскость общего положения

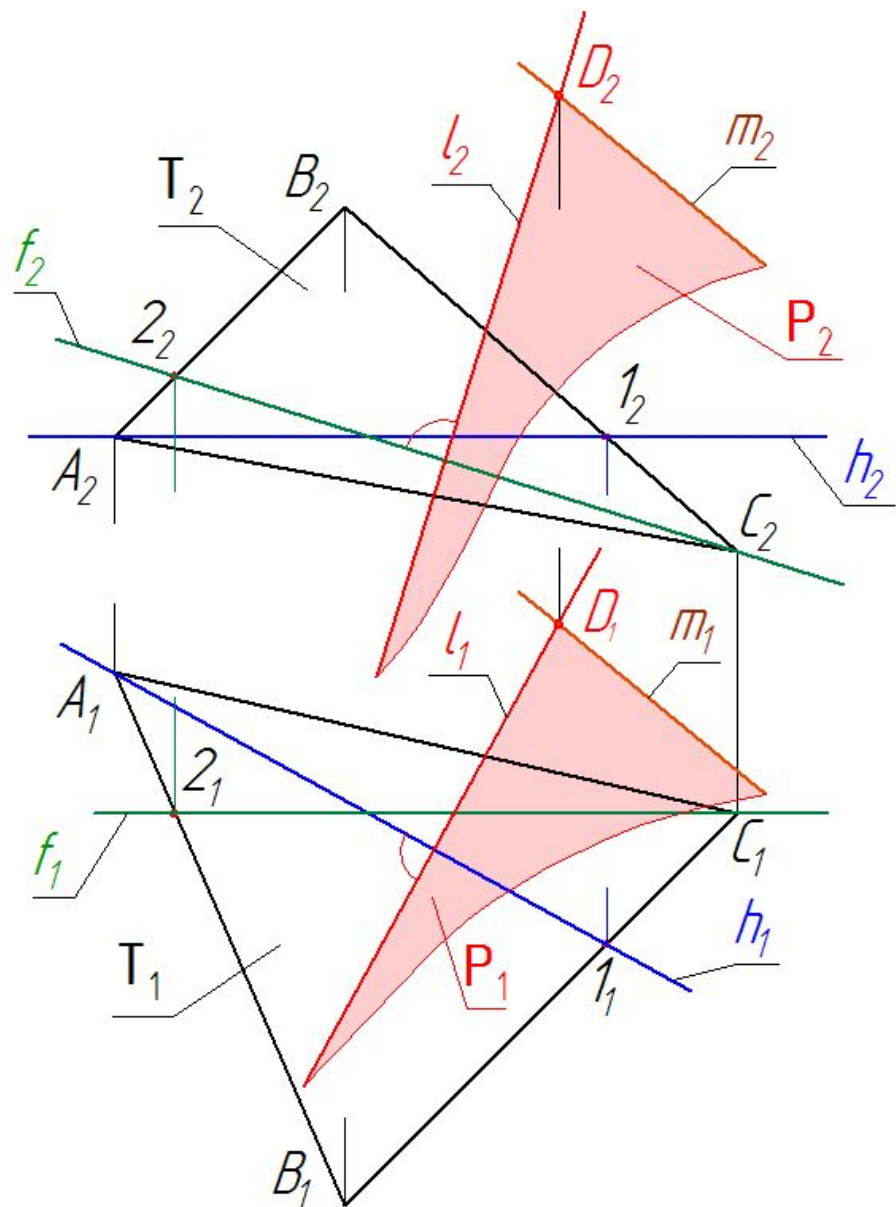
$\Rightarrow l$  – прямая общего положения

$$l \perp h; h \parallel \Pi_1; l \perp \Pi_1 \Rightarrow l_1 \perp h_1$$

$$l \perp f; f \parallel \Pi_2; l \perp \Pi_2 \Rightarrow l_2 \perp f_2$$

2

# **Взаимно перпендикулярные плоскости**



Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из плоскостей содержит (проходит через) прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Через точку  $D$  провести плоскость  $P$  перпендикулярную плоскости  $T(\triangle ABC)$ .

Задаем  $P(l \cap m); l \cap m = D$

Строим  $l \perp T (D \in l; l_1 \perp h_1; l_2 \perp f_2)$

Строим прямую  $m (D \in m)$ .