ВоГТУ

Лекция 2

Динамика

Кузина Л.А.,

к.ф.-м.н.,

доцент

2015 г.

Содержание

11. Работа
12. Мощность
13. Энергия. Закон сохранения энергии
14. Кинетическая энергия
15. Потенциальная энергия в поле тяготения
16. Потенциальная энергия упругой деформации
17. Графическое представление энергии
18. Признак потенциальности поля. Консервативные силы. Диссипативные силы
19. Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

Законы Ньютона – **постулаты** являются обобщением большого количества опытных данных

Для случая для малых скоростей **(v << c)** ***и макротел***

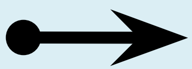
Первый закон Ньютона

Всякому телу свойственно сохранять состояние равномерного прямолинейного движения или покоя, пока и поскольку другие тела не вынудят его изменить это состояние

Второй закон Ньютона

m Масса - количественная мера инертности тела

$\vec{F}$ Сила – количественная мера воздействия одного тела на другое



$$\vec{a} = \frac{\sum_{k} \vec{F}_k}{m}$$

Ускорение тела прямо пропорционально равнодействующей всех сил, приложенных к телу, и обратно пропорционально массе тела

Второй закон Ньютона (в импульсной форме)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$m \cdot d\vec{v} = \vec{F} \cdot dt$$

$$d(m \cdot \vec{v}) = \vec{F} \cdot dt$$

$$d\vec{p} = \vec{F} \cdot dt$$

$$\Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

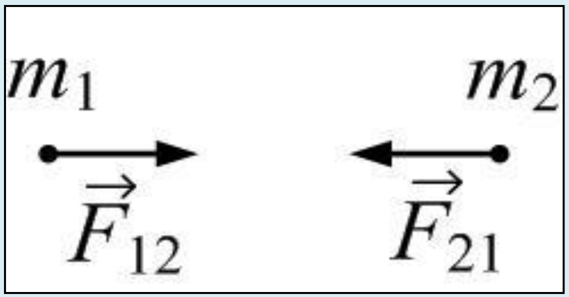
$\vec{F} \cdot \Delta t$ - импульс силы

$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ - импульс тела

Изменение импульса тела равно импульсу действовавшей на тело силы

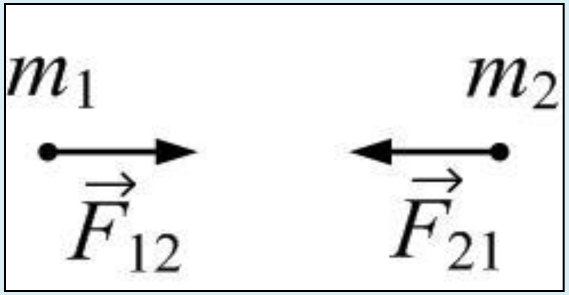
Третий закон Ньютона

Всякое действие тел друг на друга носит характер *ВЗАИМО*действия



$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}}$$

Силы, с которыми тела действуют друг на друга, равны по величине и противоположны по направлению



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

Если система двух тел замкнута, по второму закону Ньютона:

$$\begin{cases} d\vec{p}_1 = \vec{F}_{12} \cdot dt \\ d\vec{p}_2 = \vec{F}_{21} \cdot dt \end{cases} \Rightarrow \quad d\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \left(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21}\right) \cdot dt = 0$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = const$$

Закон сохранения импульса

В замкнутой системе полный импульс сохраняется

Полный импульс системы сохраняется, даже если есть внешние силы, но они скомпенсированы

$$\sum_k \vec{F}_k^{\,внеш.} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_i \vec{p}_i = const$$

В проекциях:

$$\sum_k F_{kx}^{внеш.} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sum_i p_{ix} = const$$

Центр масс

Центр масс системы – это точка, которая движется так, будто к ней приложены все внешние силы, и в ней сосредоточена вся масса системы

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \left(m_i \cdot \vec{r}_i\right)}{m}$$

$$\sum_i m_i = m$$

$$\vec{\mathrm{v}}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m}\sum_i \left(m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \frac{1}{m}\sum_i \left(m_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i\right)$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\mathrm{v}}_\mathrm{c} = \sum_i \left(m_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i\right)$$

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i \left(m_i \cdot \vec{r}_i\right)}{m}$$

$$\vec{p} = m \cdot \vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}} = \sum_i \left(m_i \cdot \vec{\mathrm{v}}_i\right)$$

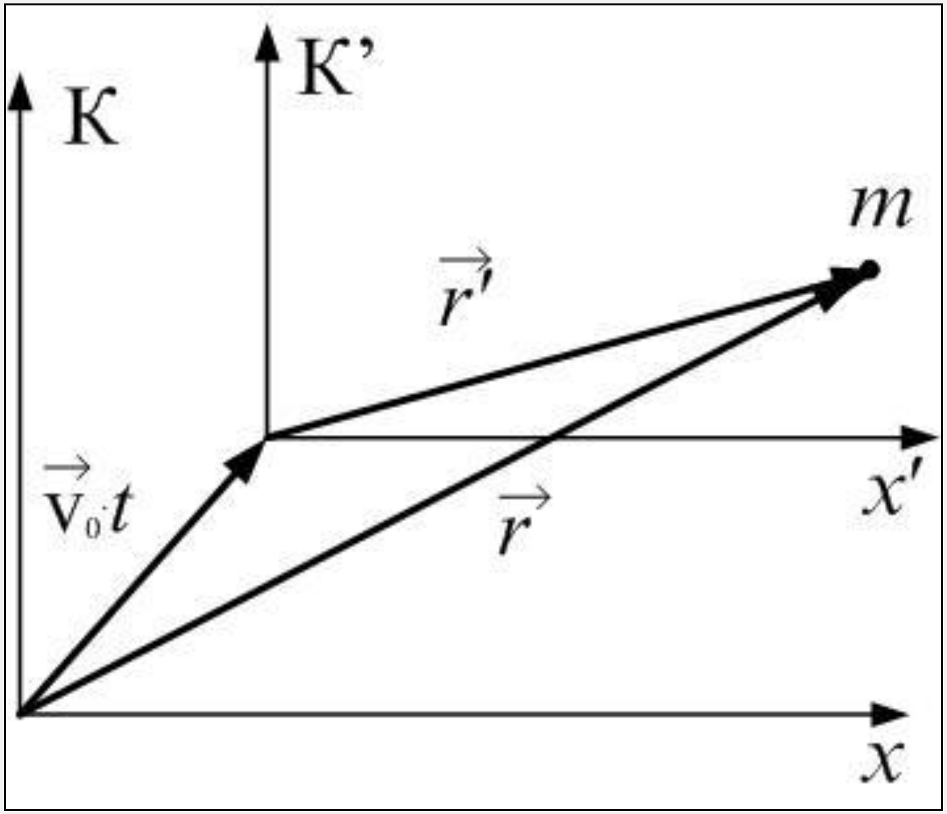
$$m \cdot \frac{d\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{c}}}{dt} = \sum_i \left(\frac{d\left(m_i \vec{\mathrm{v}}_i\right)}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{\mathrm{v}}_c}{dt} = \vec{a}_c$$

$$\sum_i \left(\frac{d\left(m_i \vec{\mathrm{v}}_i\right)}{dt}\right) = \sum_i \left(\frac{d\vec{p}_i}{dt}\right) = \sum_i \vec{F}_i^{\,внеш}$$

$$m \cdot \vec{a}_c = \sum_i \vec{F}_i^{\,внеш.}$$

Принцип относительности Галилея



$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 \cdot t$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} + \vec{v}_0 \cdot \frac{dt}{dt}$$

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{v}_0$$

$$\vec{v}_{абс.} = \vec{v}_{отн.} + \vec{v}_{пер.}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}\,'}{dt} + 0$$

$$\vec{a} = \vec{a}\,'$$

Все инерциальные системы отсчёта эквивалентны.
Законы динамики инвариантны относительно преобразований Галилея

Принцип относительности Галилея

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}_0 \cdot t$$

$$\begin{cases} x = x' + v_0 \cdot t \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Преобразования Галилея

*Второй закон Ньютона для **не**инерциальных систем отсчёта:*

В системе К:

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i^{\,внеш.}$$

В системе К', движущейся с ускорением $\vec{a}_0 = const$ *, вводится сила инерции*

$$\boxed{\vec{F}_u = -m\vec{a}_0}$$

Уравнение движения:

$$\boxed{m\vec{a}\,' = \sum_i \vec{F}_i^{\,внеш.} + \vec{F}_u = \sum_i \vec{F}_i^{\,внеш.} - m\vec{a}_0}$$

Виды сил

В природе существует 4 вида фундаментальных взаимодействий:

- ***Гравитационное***
- ***Электромагнитное***
- ***Сильное*** (ядерные силы)
- ***Слабое*** (превращения элементарных частиц)

Все виды сил (трения, упругости, вязкости, поверхностного натяжения и т.д.) – это проявления фундаментальных взаимодействий

Закон всемирного тяготения

$$F_{тяг.} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

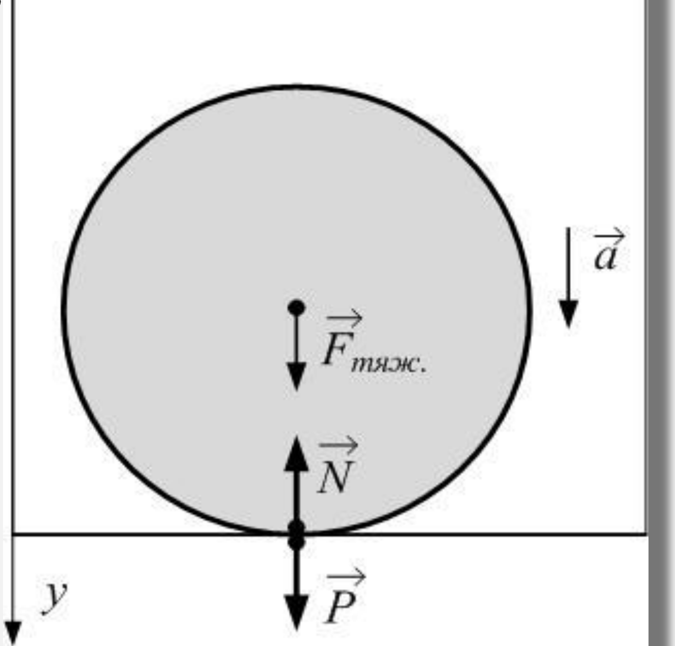
Сила тяжести

$$F_{тяж.} = mg = \gamma \frac{M \cdot m}{(R+h)^2}$$

Вес тела

$$\vec{P} = -\vec{N} = -(m\vec{a} - m\vec{g}) = m(\vec{g} - \vec{a})$$

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$



$$P = m(g - a)$$ $\downarrow \vec{a}$

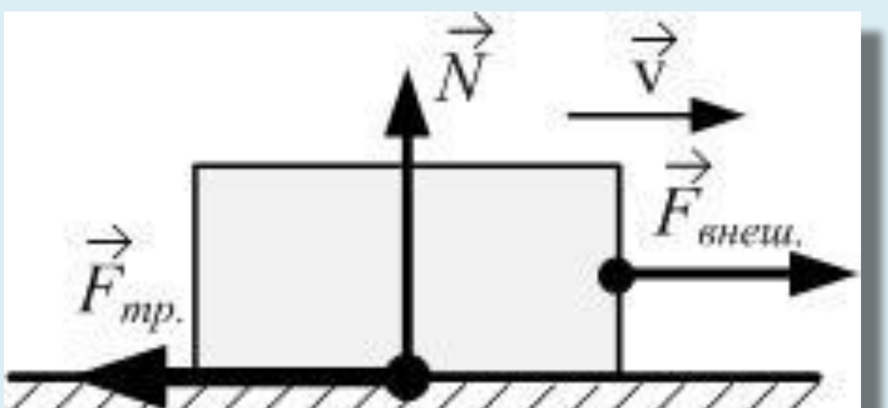
$$P = m(g + a)$$ $\uparrow \vec{a}$

Сила трения

Трение
- Сухое
  - Покоя
  - Скольжения
  - Качения
- Вязкое

$$0 \le F_{тр.покоя} \le \mu N$$

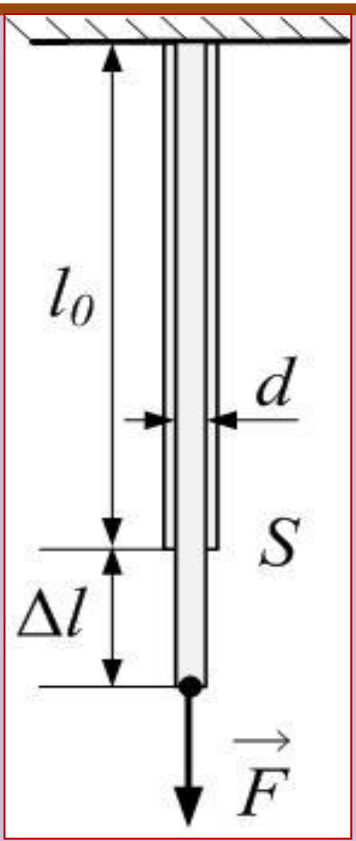
$$F_{тр.} = \mu N$$



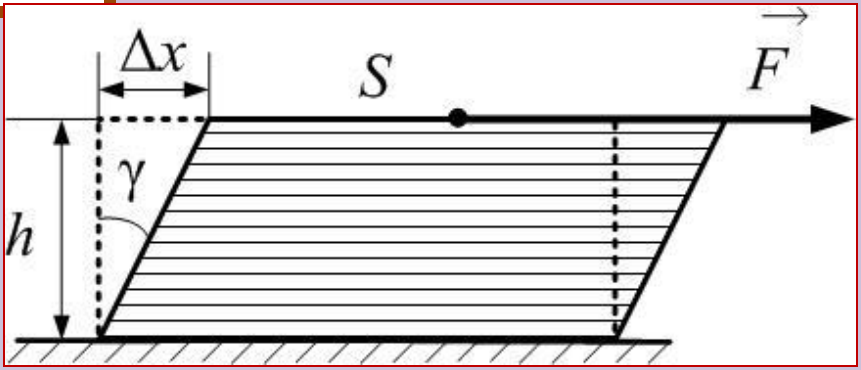
Сила упругости

Деформация

Сжатия-растяжения



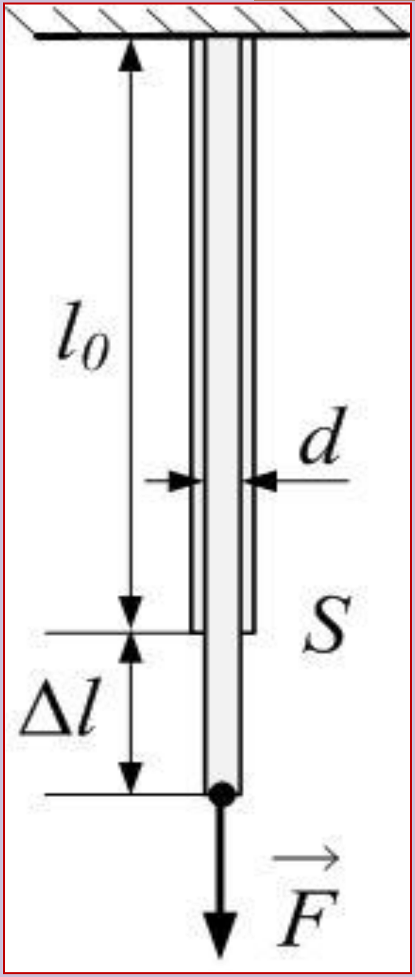
Сдвига



Деформация тела называется <u>упругой</u>, если после снятия нагрузки тело возвращается к первоначальным размерам и форме

При <u>неупругой</u> деформации происходит разрыв некоторых межмолекулярных связей и образование связей между другими молекулами, в результате чего изменённая форма тела сохраняется и после снятия нагрузки

Деформация сжатия-растяжения



$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$\sigma = \frac{dF}{dS}$$

Нормальное механическое напряжение

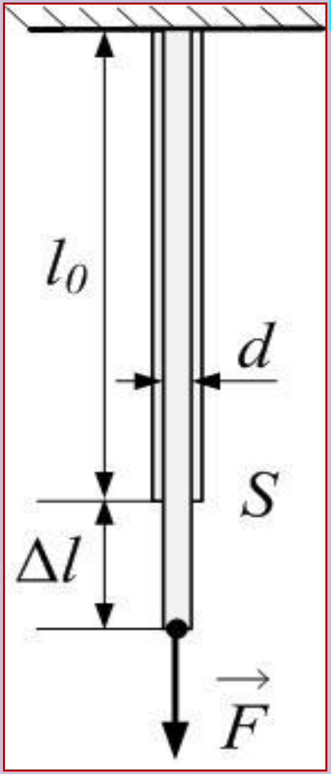
$$[\sigma] = \frac{Н}{м^2} = Па$$

$$\varepsilon_{\parallel} = \frac{\Delta l}{l}$$

Относительная продольная деформация

$$[\varepsilon] = 1$$

Закон Гука в локальной форме



$$\sigma = E \cdot \varepsilon_{\|}$$

E - **модуль Юнга** $[E] = \frac{Н}{м^2} = Па$

$$\varepsilon_{\|} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

$$F = \sigma \cdot S = E \cdot \varepsilon_{\|} \cdot S$$

$$F = E \cdot \frac{\Delta l}{l} \cdot S$$

$$F = \frac{ES}{l} \Delta l = k \cdot \Delta l \quad \Rightarrow \quad k = \frac{ES}{l}$$

Экспериментальная зависимость механического напряжения от относительной продольной деформации

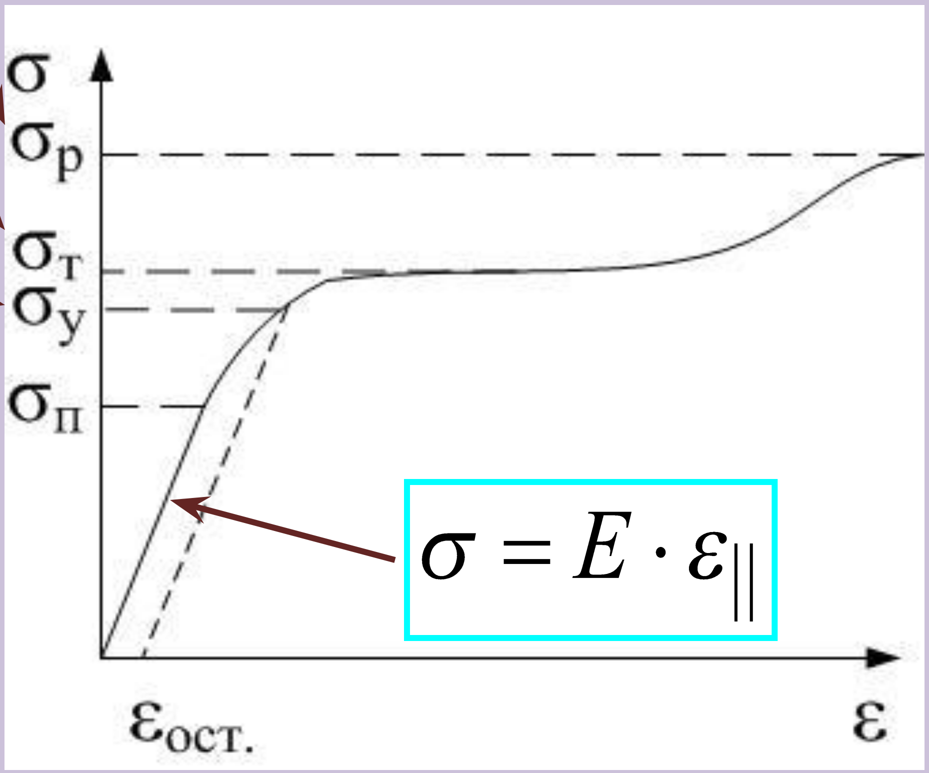
Пределы
:

Прочност
и

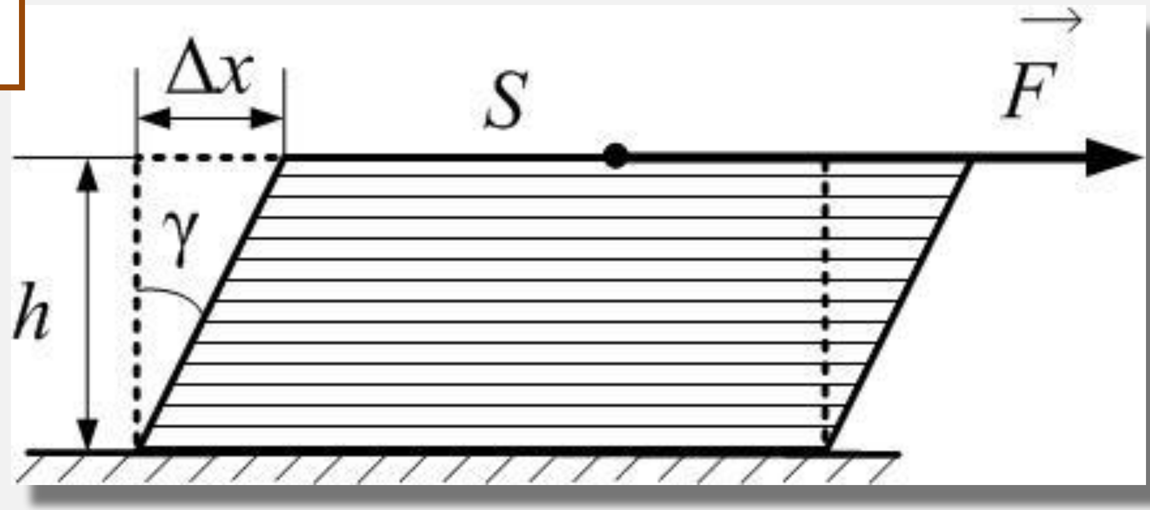
Текучести

Упругост
и

Пропорциональнос
ти



Деформация сдвига



Тангенциальное (касательное) механическое напряжение

$$\tau = \frac{dF}{dS}$$

Относительный сдвиг

$$\gamma = \frac{\Delta x}{h}$$

<u>Закон Гука для деформации сдвига</u>

$$\tau = G \cdot \gamma$$

G – модуль сдвига

Закон Гука для деформации сдвига $\tau = G \cdot \gamma$

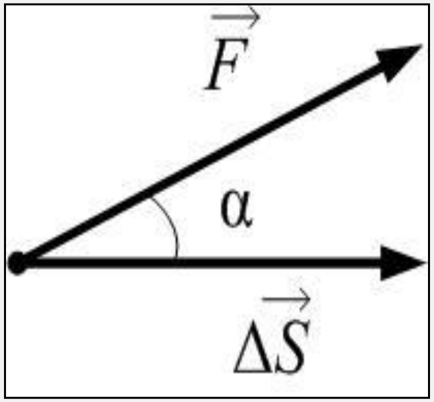
Закон Гука в локальной форме $\sigma = E \cdot \varepsilon_{\parallel}$

Связь между модулем Юнга и модулем сдвига $G = \dfrac{E}{2(1 + K_{\Pi})}$

Коэффициент Пуассона $K_{\Pi} = -\dfrac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_{\parallel}}$

Относительное поперечное сжатие $\varepsilon_{\perp} = \dfrac{\Delta d}{d}$

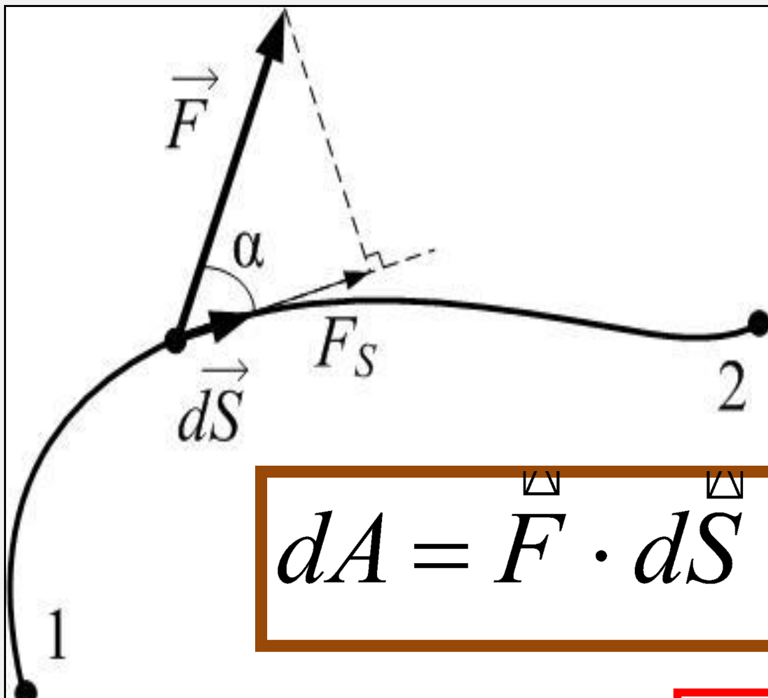
Работа



$$\vec{F} = const$$

$$\Delta A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{S} = F \cdot \Delta S \cdot \cos\alpha$$

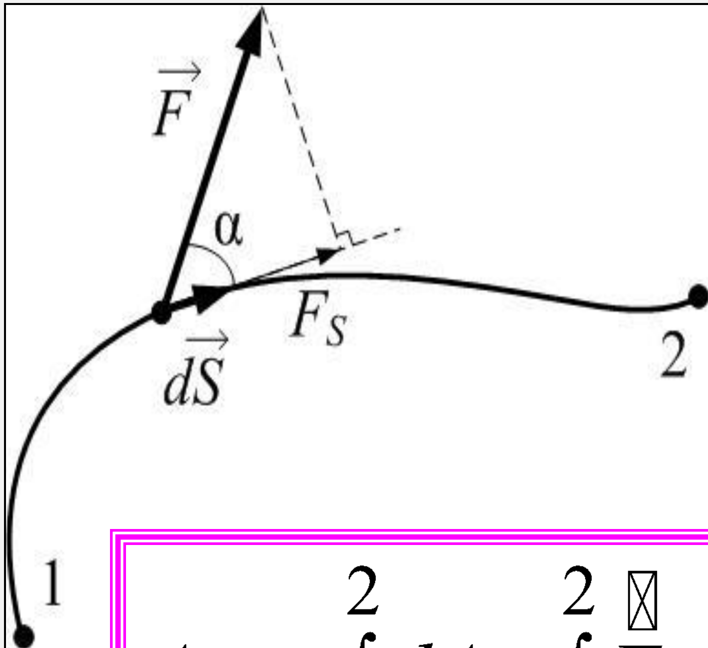
$$[A] = Н \cdot м = Дж$$



$$\vec{F} \neq const$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cdot dS \cdot \cos\alpha = F_S \cdot dS$$

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$



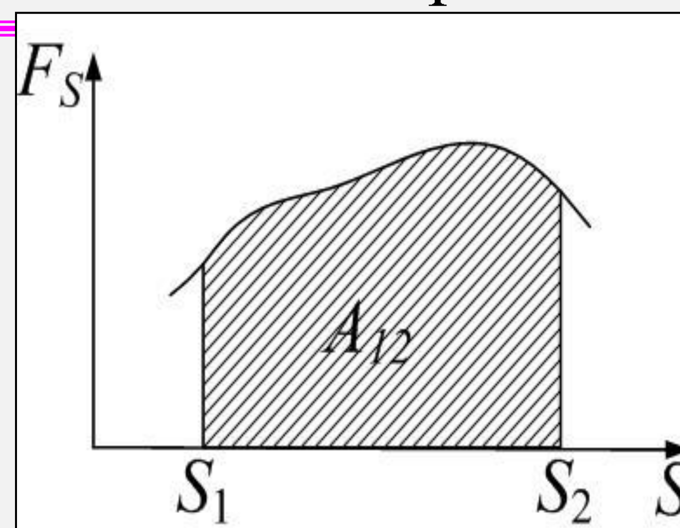
Работа

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$\Downarrow$$

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 F \cdot \cos\alpha \cdot dS = \int_1^2 F_S \cdot dS$$

$$\boxed{A_{12} = \int_1^2 F_S \cdot dS}$$



Мощность – быстрота совершения работы

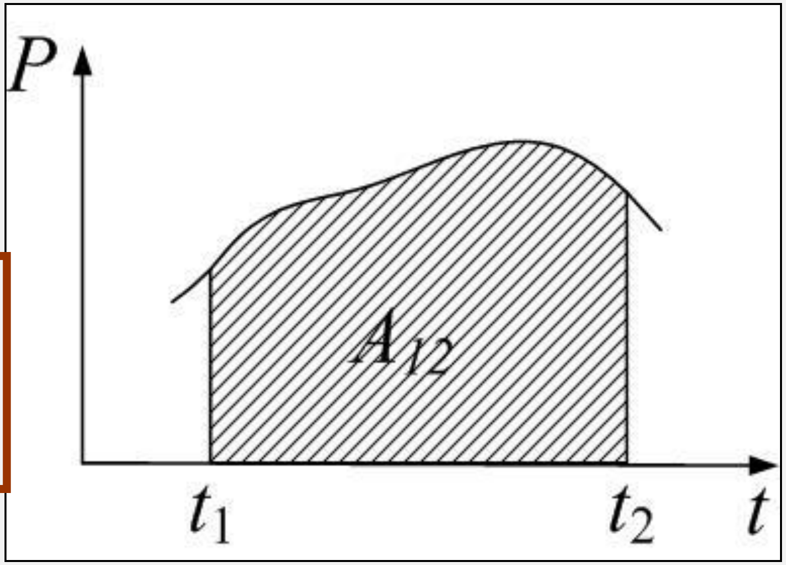
Средняя мощность $\boxed{P_{ср.} = \frac{\Delta A}{\Delta t}}$

$$[P] = \frac{Дж}{с} = Вт$$

Мгновенная мощность $\boxed{P = \frac{dA}{dt}}$

$$dA = P \cdot dt \quad \Rightarrow \quad A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{t_1}^{t_2} P \cdot dt$$

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$



Энергия

Энергия – мера взаимодействия и движения всех видов материи

Энергия – функция состояния, однозначно определяется состоянием системы

Изменить энергию системы можно, совершив над системой работу

Изменение энергии системы равно работе внешних сил

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил}$$

$$[W] = [A] = Дж$$

Изменение энергии системы равно работе внешних сил

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил}$$

$$\Downarrow \qquad \boxed{A = -A_{внешн.сил}}$$

$$\boxed{W_1 = W_2 + A}$$

Если $\sum_i \vec{F}_i^{внеш.} = 0 \quad \Rightarrow \quad W_{полная} = const$

Полная энергия замкнутой системы сохраняется

Механическая энергия

Кинетическая
(энергия движения)

Потенциальная
(энергия взаимодействия; положения, поскольку величина взаимодействия зависит от положения тел)

Кинетическая энергия

Пусть под действием внешней силы скорость тела изменяется:
изменение энергии равно работе внешних сил

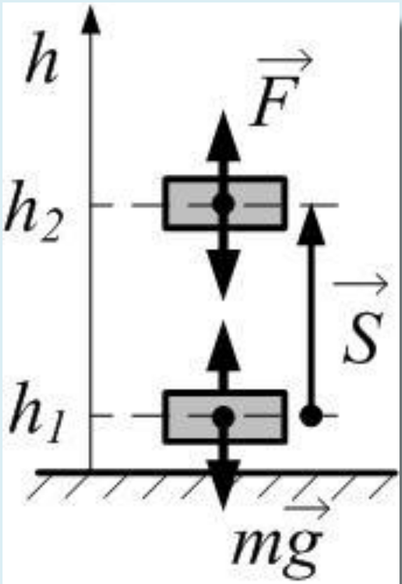
$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 m\vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 m \frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

$$W_2 - W_1 = \int_1^2 m \frac{d\vec{S}}{dt} \cdot d\vec{\mathrm{v}}$$

$$W_2 - W_1 = \int_{\mathrm{v}_1}^{\mathrm{v}_2} m\vec{\mathrm{v}} \cdot d\vec{\mathrm{v}} = \frac{m \cdot \mathrm{v}_2^2}{2} - \frac{m \cdot \mathrm{v}_1^2}{2} \Longrightarrow \boxed{W_{кин.} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}}$$

Потенциальная энергия в однородном поле тяготения



Внешняя сила сила совершает работу, равную приращению потенциальной энергии:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 F \cdot dS =$$

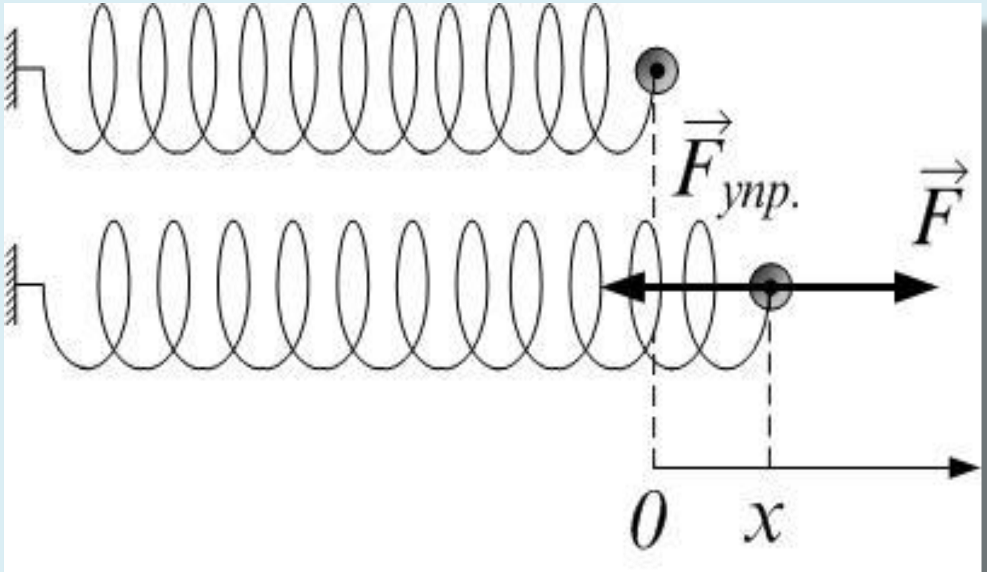
$$= F \int_1^2 dS = mg \cdot \int_{h_1}^{h_2} dh = mg \cdot (h_2 - h_1)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{пот.} = mgh}$$

Начало отсчёта энергии можно задавать произвольно

Потенциальная энергия упругой деформации



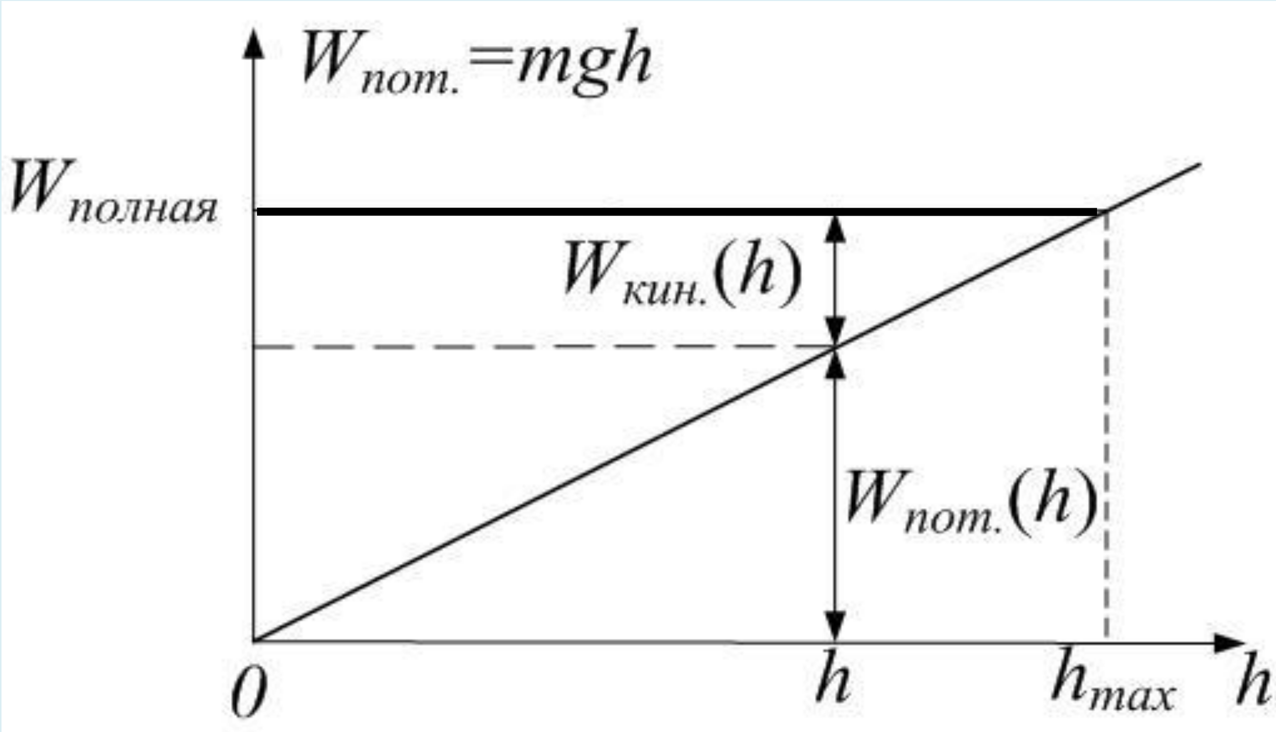
Внешняя сила сила совершает работу, равную приращению потенциальной энергии:

$$A_{внешн.сил} = \int_0^x F_{внеш.} dx = \int_0^x kx \cdot dx = \frac{kx^2}{2} - 0 = \Delta W_{пот.} = W_{пот.} - 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{пот.} = \frac{kx^2}{2}}$$

Графическое представление энергии

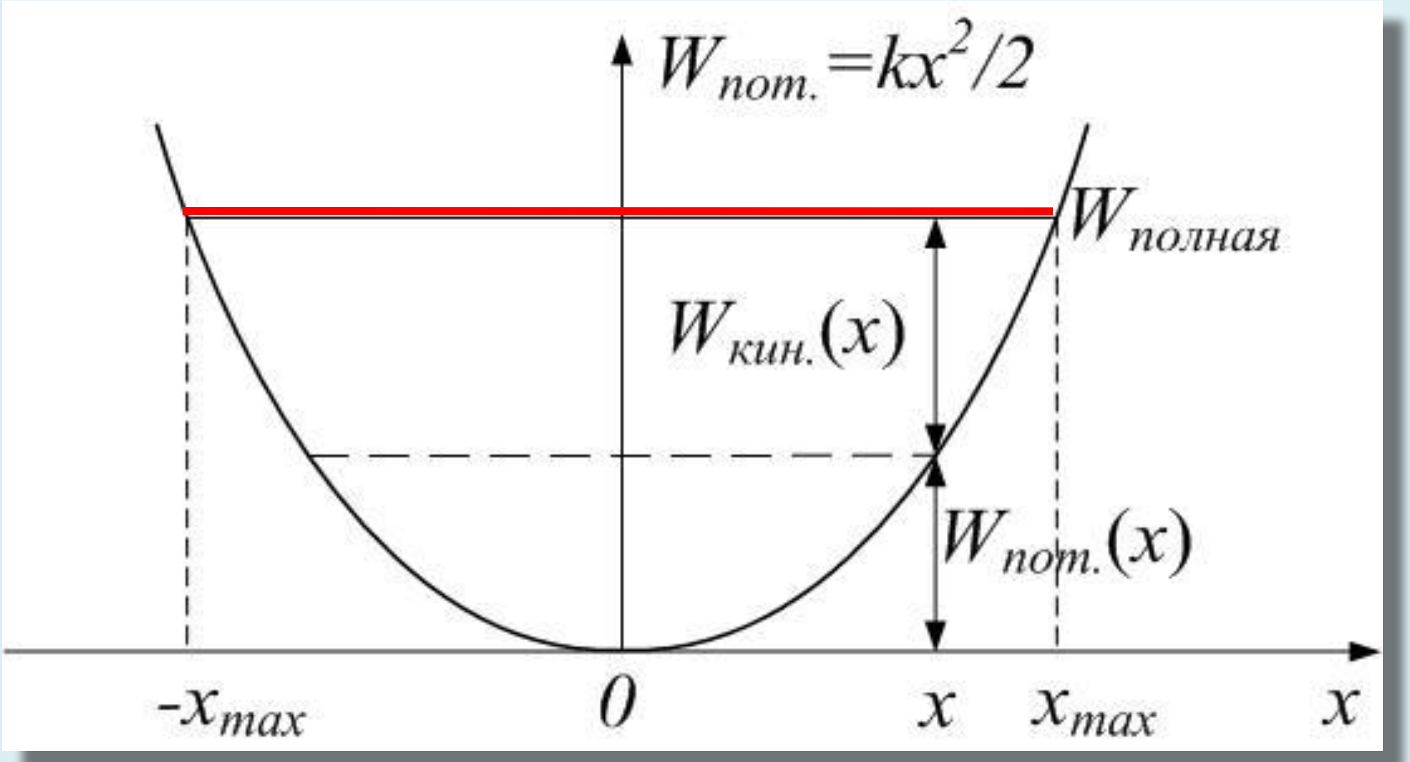


$$W_{полная} = W_{пот.} + W_{кин.}$$

$$\Downarrow$$

$$mgh_{\max} = mgh + W_{кин.}$$

Графическое представление энергии

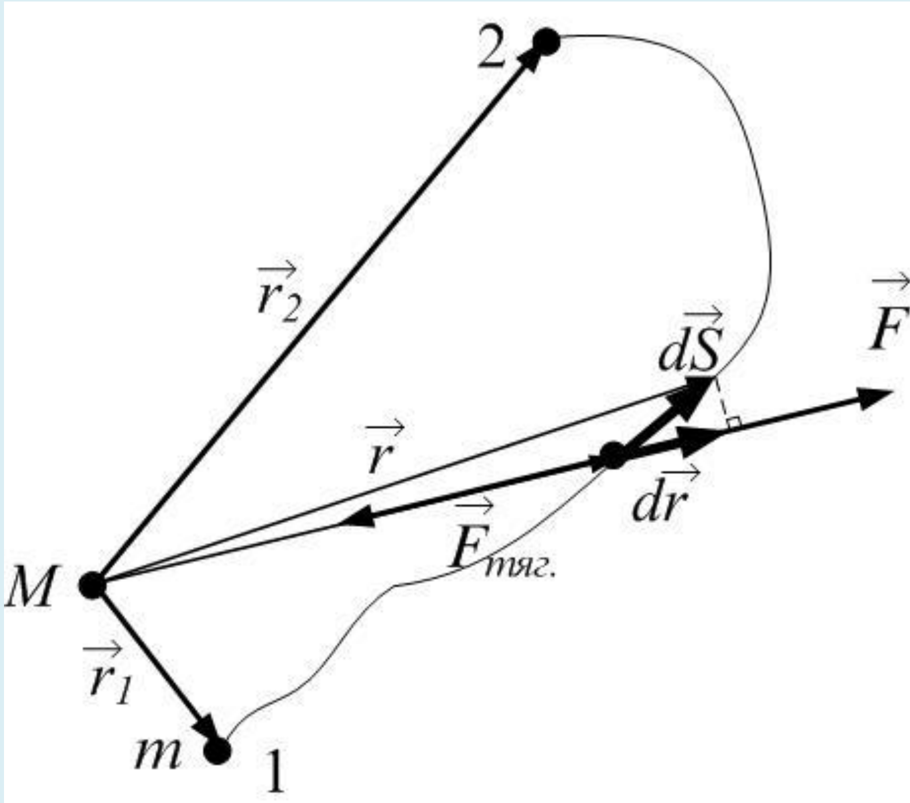


$$\boxed{W_{полная} = W_{пот.} + W_{кин.}}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boxed{\frac{kx_{\max}^2}{2} = \frac{kx^2}{2} + W_{кин.}}$$

Работа в центральном поле тяготения



$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил} =$$

$$= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot dr =$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot dr = -\gamma \frac{M \cdot m}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2} =$$

$$= \left(-\gamma \frac{M \cdot m}{r_2} \right) - \left(-\gamma \frac{M \cdot m}{r_1} \right)$$

$$\boxed{W_{пот.} = -\gamma \frac{M \cdot m}{r}} \Leftarrow$$

Работа в центральном поле тяготения

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{внешн.сил} = -A_{грав.сил} = \left(-\gamma\frac{M\cdot m}{r_2}\right) - \left(-\gamma\frac{M\cdot m}{r_1}\right)$$

Выводы:

1. Потенциальная энергия взаимодействия точечных масс

$$W_{пот.} = -\gamma\frac{M\cdot m}{r}$$ (при $r\to\infty$ $W\to 0$)

2. Работа сил гравитационного поля не зависит от траектории, а только от начального и конечного положения точки. Такие поля называются ***потенциальными***

3. Потенциал гравитационного поля:

$$\varphi = \frac{W_{пот.}}{m} \qquad [\varphi] = \frac{Дж}{кг}$$

Признак потенциальности поля
Консервативные силы
Диссипативные силы

Сила называется **<u>консервативной</u>**, если её работа не зависит от траектории, а только от начального и конечного положения тела
Поле таких сил называется **<u>потенциальным</u>**
Примеры: гравитационное поле; поле упругих сил

Если работа силы зависит от траектории, то силы называются **<u>диссипативными</u>**
Поле таких сил – **<u>непотенциальное</u>**
Примеры: силы трения; силы вязкости; силы неупругой деформации

При наличии диссипативных сил механическая энергия необратимо превращается в другие виды, например, в тепловую

Закон сохранения механической энергии

<u>При наличии диссипативных сил</u> закон сохранения (изменения) <u>**механической**</u> энергии системы при её переходе из состояния 1 в состояние 2:

$$W_{1мех.} = W_{2мех.} + A_{\text{против диссипативных сил}} + A_{\text{против внешних сил}}$$

В замкнутой системе механическая энергия сохраняется, если <u>нет диссипативных</u> сил, а есть только <u>консервативные</u>

Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

Система совершает работу за счёт уменьшения своей потенциальной энергии:

$$dA = -dW_{nom.}$$

Работа силы по определению:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -dW_{nom.} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = -grad W_{nom.}$$

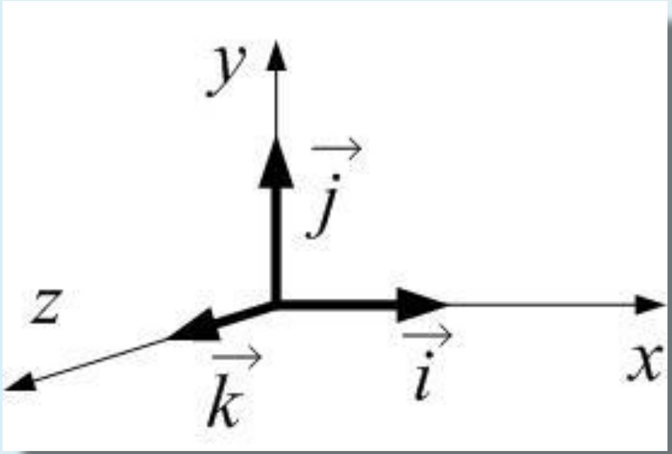
$$\vec{F} = -gradW_{пот.}$$

$$gradW_{пот.} \equiv \frac{\partial W_{пот.}}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial W_{пот.}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial W_{пот.}}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

<u>Градиент</u> – это вектор, компоненты которого равны производным по соответствующим координатам

$$F_x = -\frac{\partial W_{пот.}}{\partial x}$$



Градиент показывает быстроту изменения величины в пространстве, направлен в сторону наибольшего возрастания величины

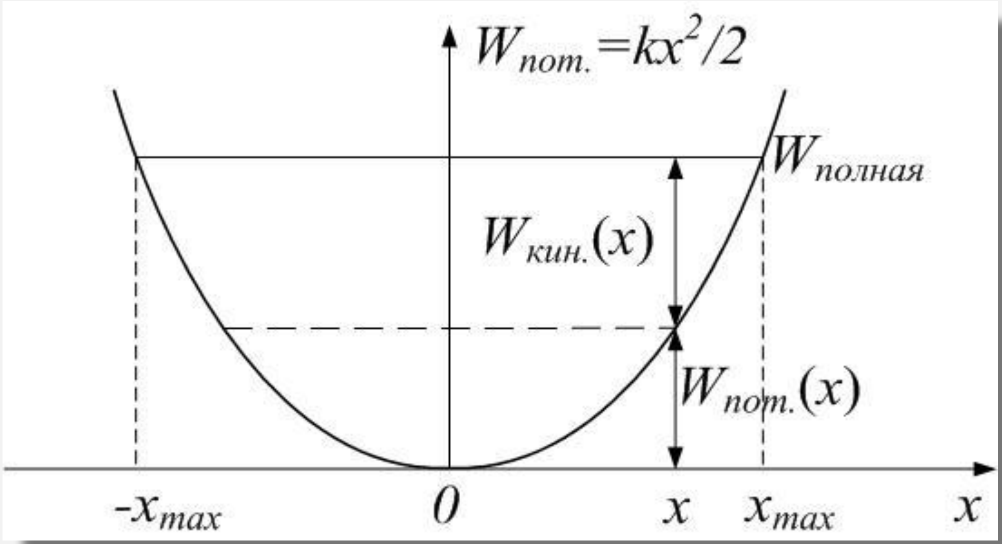
$$\vec{F} = -gradW_{пот.}$$

$$gradW_{пот.} \equiv \frac{\partial W_{пот.}}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial W_{пот.}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial W_{пот.}}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

Сила направлена в сторону максимального убывания потенциальной энергии

Пример: одномерный случай

$$F_x = -\frac{dW_{пот.}}{dx}$$



$$W_{пот.} = \frac{kx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad F_{упр.} = -\frac{dW_{пот.}}{dx} = -kx$$

Условие равновесия

$$F_x = -\frac{dW_{пот.}}{dx}$$

В равновесном положении сила равна нулю

$$F = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dW_{пот.}}{dx} = 0$$

Энергия экстремальна