



# Эконометрика-1

**Филатов Александр Юрьевич**

(Главный научный сотрудник, доцент ШЭМ ДВФУ)

[alexander.filatov@gmail.com](mailto:alexander.filatov@gmail.com)

<http://vk.com/alexander.filatov>, <http://vk.com/baikalreadings>

## Практика-6

**Анализ временных рядов.**

**Аналитические и алгоритмические  
тренды. Сезонность**

# Пример 1: курс доллара (3.04 – 16.05)

# 2

## критерии неизменности среднего

03.04.2018	57,29	24.04.2018	61,77
04.04.2018	57,54	25.04.2018	61,66
05.04.2018	57,76	26.04.2018	61,75
06.04.2018	57,58	27.04.2018	62,60
07.04.2018	57,83	28.04.2018	62,73
10.04.2018	58,57	29.04.2018	62,00
11.04.2018	62,37	04.05.2018	63,49
12.04.2018	64,06	05.05.2018	63,20
13.04.2018	62,07	08.05.2018	62,71
14.04.2018	61,43	09.05.2018	63,01
17.04.2018	62,28	11.05.2018	62,52
18.04.2018	61,15	12.05.2018	61,74
19.04.2018	61,55	15.05.2018	61,77
20.04.2018	60,86	16.05.2018	61,92
21.04.2018	61,32		



**Критерии:** медиана, восходящие / нисходящие, Аббе.

# Пример 1: курс доллара (3.04 – 16.05)

# 3

## критерии неизменности среднего

03.04.2018	57,29	-		24.04.2018	61,77	-	+
04.04.2018	57,54	-	+	25.04.2018	61,66	-	-
05.04.2018	57,76	-	+	26.04.2018	61,75	-	+
06.04.2018	57,58	-	-	27.04.2018	62,60	+	+
07.04.2018	57,83	-	+	28.04.2018	62,73	+	+
10.04.2018	58,57	-	+	29.04.2018	62,00	+	-
11.04.2018	62,37	+	+	04.05.2018	63,49	+	+
12.04.2018	64,06	+	+	05.05.2018	63,20	+	-
13.04.2018	62,07	+	-	08.05.2018	62,71	+	-
14.04.2018	61,43	-	-	09.05.2018	63,01	+	+
17.04.2018	62,28	+	+	11.05.2018	62,52	+	-
18.04.2018	61,15	-	-	12.05.2018	61,74	-	-
19.04.2018	61,55	-	+	15.05.2018	61,77	+	+
20.04.2018	60,86	-	-	16.05.2018	61,92	+	+
21.04.2018	61,32	-	+				

$$\gamma(T) \leq \left[ 0,5(T + 2 - 1,96\sqrt{T - 1}) \right]$$

$$\tau(T) \geq \left[ 1,43 \ln(T + 1) \right],$$

$$\gamma(T) \leq \left[ \frac{1}{3}(2T - 1) - 1,96\sqrt{\frac{16T - 29}{90}} \right]$$

$$\tau(T) \geq \tau_0(T) = \begin{cases} 5, & T \leq 26, \\ 6, & T \in [27; 153], \\ 7, & T \in [154; 1170], \\ 8, & T \geq 1171. \end{cases}$$

**Медиана:**  $x_{med} = 61,77$ ,  $\gamma(29) = 8 < 10,31$ ,  $\tau(29) = 8 > 4,86$ , неслучайный.

**Восходящие / нисходящие:**  $\gamma(29) = 17 > 14,69$ ,  $\tau(29) = 4 < 6$ , случайный.

# Пример 1: курс доллара (3.04 – 16.05)

# 4

## критерии неизменности среднего

03.04.2018	57,29		24.04.2018	61,77	0,20
04.04.2018	57,54	0,06	25.04.2018	61,66	0,01
05.04.2018	57,76	0,05	26.04.2018	61,75	0,01
06.04.2018	57,58	0,03	27.04.2018	62,60	0,73
07.04.2018	57,83	0,06	28.04.2018	62,73	0,02
10.04.2018	58,57	0,54	29.04.2018	62,00	0,53
11.04.2018	62,37	14,43	04.05.2018	63,49	2,21
12.04.2018	64,06	2,87	05.05.2018	63,20	0,08
13.04.2018	62,07	3,99	08.05.2018	62,71	0,24
14.04.2018	61,43	0,40	09.05.2018	63,01	0,09
17.04.2018	62,28	0,72	11.05.2018	62,52	0,23
18.04.2018	61,15	1,29	12.05.2018	61,74	0,62
19.04.2018	61,55	0,17	15.05.2018	61,77	0,00
20.04.2018	60,86	0,48	16.05.2018	61,92	0,02
21.04.2018	61,32	0,22			

$$q^2 = \frac{1}{2(T-1)} \sum_{i=2}^T (y_t - y_{t-1})^2,$$

$$s^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{i=1}^T (y_t - \bar{y})^2,$$

$$\gamma(T) = \frac{q^2}{s^2}.$$

$$\gamma_\alpha(T) = 1 + \frac{u_\alpha}{\sqrt{T + 0,5(1 + u_\alpha^2)}},$$

$$u_\alpha = \text{НОРМСТОБР}(\alpha).$$

**Аббе:**  $\gamma(29) = 0,541/3,690 = 0,147 < 0,704$ , неслучайный.



# Пример 1: курс доллара (3.04 – 16.05)

# 5

## Полиномиальные тренды

03.04.2018	57,29	0	1	1	1
04.04.2018	57,54	0	2	4	8
05.04.2018	57,76	0	3	9	27
06.04.2018	57,58	0	4	16	64
07.04.2018	57,83	0	5	25	125
10.04.2018	58,57	0	6	36	216
11.04.2018	62,37	1	7	49	343
12.04.2018	64,06	1	8	64	512
13.04.2018	62,07	1	9	81	729
14.04.2018	61,43	1	10	100	1000

17.04.2018	62,28
18.04.2018	61,15
19.04.2018	61,55
20.04.2018	60,86
21.04.2018	61,32
24.04.2018	61,77
25.04.2018	61,66
26.04.2018	61,75
27.04.2018	62,60
28.04.2018	62,73

29.04.2018	62,00
04.05.2018	63,49
05.05.2018	63,20
08.05.2018	62,71
09.05.2018	63,01
11.05.2018	62,52
12.05.2018	61,74
15.05.2018	61,77
16.05.2018	61,92

$$\hat{y}_t = 58,87 + 0,160t, \quad R^2 = 0,483.$$

(0,55)    (0,032)

$$\hat{y}_t = 57,70 + 0,019t + 4,135z, \quad R^2 = 0,868.$$

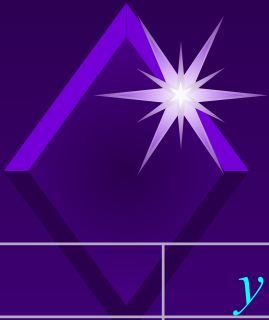
(0,31)    (0,023)    (0,474)

$$\hat{y}_t = 56,67 + 0,585t - 0,014t^2, \quad R^2 = 0,695.$$

(0,67)    (0,103)    (0,003)

$$\hat{y}_t = 55,86 + 0,885t - 0,039t^2 + 0,0005t^3, \quad R^2 = 0,712.$$

(0,67)    (0,268)    (0,021)    (0,0005)



# Пример 2: динамика ВВП США

## Экспоненциальный тренд

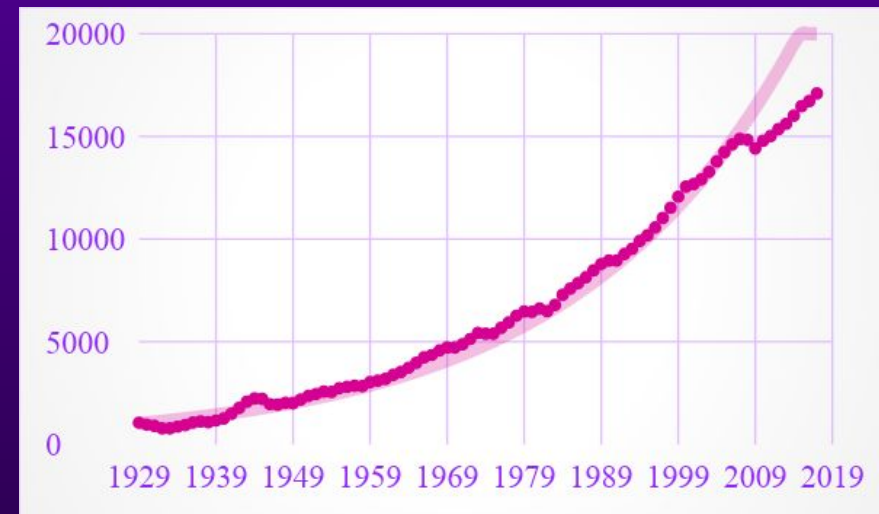
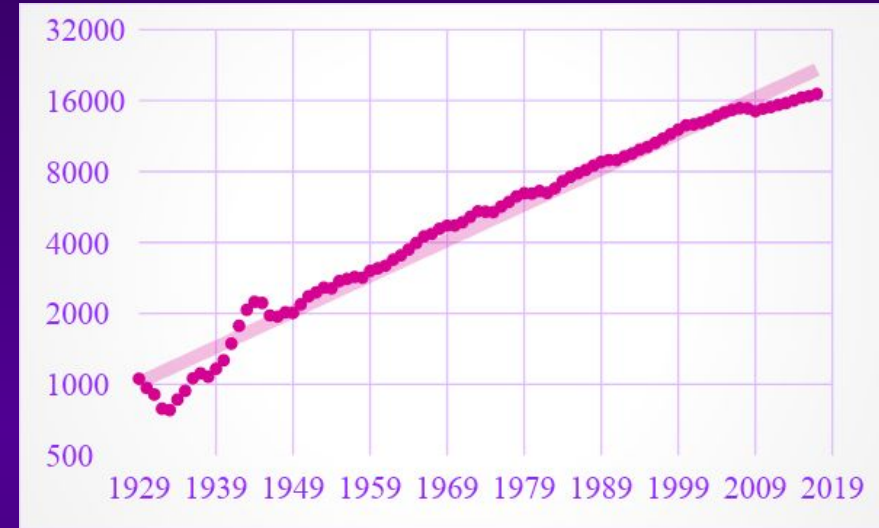
6

	$y$	$\ln y$	$t$	$y^{\wedge}$	$eps$
1929	1 057	6,96	0	1016	41
1930	967	6,87	1	1052	-85
1931	905	6,81	2	1089	-184
1932	788	6,67	3	1128	-340
1933	778	6,66	4	1168	-389
1934	862	6,76	5	1209	-347
1935	939	6,84	6	1252	-313
1936	1 061	6,97	7	1296	-236
1937	1 115	7,02	8	1342	-227
1938	1 078	6,98	9	1390	-312
...	...	...	...	...	...
2017	17 096	9,75	88	21676	-4580

$\hat{y}(t) = 1016^{0,035t}$ , рост 3,5% в год.

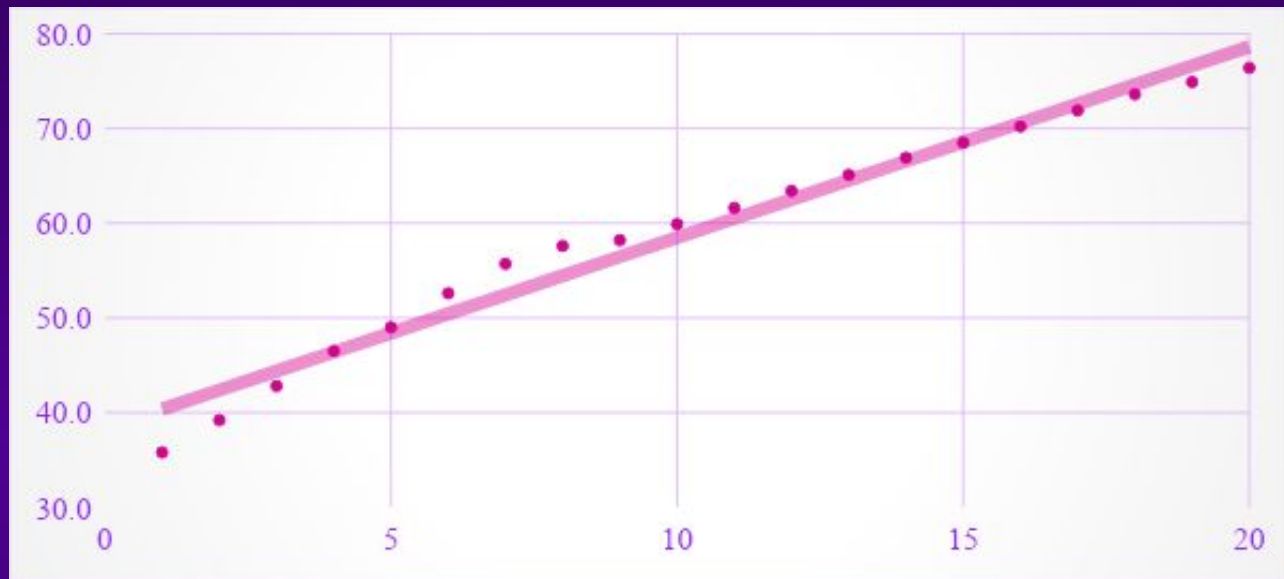
Рост 2,6%, 2,9%, 1,5% и 2,3% в 2014-2017

Ниже среднего за 1929-2017.



# Пример 3: поквартальная динамика числа владельцев смартфонов в России

	$y$	$t$	$t^2$
2013.1	35,8	1	1
2013.2	39,2	2	4
2013.3	42,8	3	9
2013.4	46,5	4	16
2014.1	49,0	5	25
2014.2	52,6	6	36
2014.3	55,7	7	49
2014.4	57,6	8	64
2015.1	58,2	9	81
2015.2	59,9	10	100
2015.3	61,6	11	121
2015.4	63,4	12	144
2016.1	65,1	13	169
2016.2	66,9	14	196
2016.3	68,5	15	225
2016.4	70,2	16	256
2017.1	71,9	17	289
2017.2	73,6	18	324
2017.3	74,9	19	361
2017.4	76,4	20	400



## Линейный тренд:

постоянный

абсолютный

$$\hat{y}(t) = 38,33 + 2,102t, \quad \hat{R}^2 = 0,973.$$

## Квадратичный тренд:

немонотонная зависимость.

$$\hat{y}(t) = 33,90 + 3,22t - 0,058t^2, \quad \hat{R}^2 = 0,994,$$

$$t_{\max} = 28 \text{ (2019.4)}, \quad y_{\max} = 79,0.$$

# Пример 3: поквартальная динамика числа владельцев смартфонов в России

	$y$	$t$	$\ln y$	$1/(t-t_0)$	$\ln(t-t_0)$
2013.1	35,8	1	3,58	0,043	2,079
2013.2	39,2	2	3,67	0,042	2,197
2013.3	42,8	3	3,76	0,040	2,303
2013.4	46,5	4	3,84	0,038	2,398
2014.1	49,0	5	3,89	0,037	2,485
2014.2	52,6	6	3,96	0,036	2,565
2014.3	55,7	7	4,02	0,034	2,639
2014.4	57,6	8	4,05	0,033	2,708
2015.1	58,2	9	4,06	0,032	2,773
2015.2	59,9	10	4,09	0,031	2,833
2015.3	61,6	11	4,12	0,030	2,890
2015.4	63,4	12	4,15	0,029	2,944
2016.1	65,1	13	4,18	0,029	2,996
2016.2	66,9	14	4,20	0,028	3,045
2016.3	68,5	15	4,23	0,027	3,091
2016.4	70,2	16	4,25	0,026	3,135
2017.1	71,9	17	4,28	0,026	3,178
2017.2	73,6	18	4,30	0,025	3,219
2017.3	74,9	19	4,32	0,024	3,258
2017.4	76,4	20	4,34	0,024	3,296

## Гиперболический тренд:

насыщение, положительные  $t$ .

$$\hat{y}(t) = 67,23 - 43,05/t, \quad \hat{R}^2 = 0,634.$$

## Гиперболический тренд: модиф.

$$\hat{y}(t) = 123 - 2004/(t + 22), \quad \hat{R}^2 = 0,996.$$

## Логарифмический тренд:

медленный неограниченный рост.

$$\hat{y}(t) = 28,80 + 14,50 \ln t, \quad \hat{R}^2 = 0,950.$$

## Логарифмический тренд: модиф.

$$\hat{y}(t) = -32,25 + 32,75 \ln(t - 7), \quad \hat{R}^2 = 0,997.$$

## Экспоненциальный тренд:

постоянный относительный прирост.

$$\hat{y}(t) = 39,94 e^{0,036t}, \quad \hat{R}^2 = 0,929.$$

## Степенной тренд:

постоянная эластичность.

$$\hat{y}(t) = 11,05 t^{0,59}, \quad \hat{R}^2 = 0,881.$$

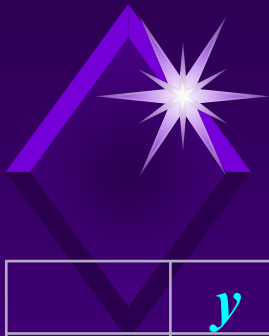




# Пример 3: прогноз

9

	<i>y</i>	<i>t</i>	лин	квад	гип	лог	эксп	степ	лин	квад	гип	лог	эксп	степ
2013.1	35,8	1	40,3	37,1	36,1	35,8	41,4	11,0	-4,5	-1,3	-0,3	0,0	-5,6	24,8
2013.2	39,2	2	42,4	40,1	39,7	39,7	42,9	16,7	-3,2	-0,9	-0,5	-0,5	-3,7	22,5
2013.3	42,8	3	44,4	43,1	43,0	43,1	44,5	21,2	-1,6	-0,3	-0,2	-0,3	-1,7	21,6
2013.4	46,5	4	46,4	45,9	46,1	46,3	46,1	25,1	0,1	0,6	0,4	0,2	0,4	21,4
2014.1	49,0	5	48,4	48,6	49,0	49,1	47,8	28,7	0,6	0,4	0,0	-0,1	1,2	20,3
2014.2	52,6	6	50,4	51,2	51,6	51,7	49,5	32,0	2,2	1,4	1,0	0,9	3,1	20,6
2014.3	55,7	7	52,4	53,6	54,1	54,2	51,3	35,0	3,3	2,1	1,6	1,5	4,4	20,7
2014.4	57,6	8	54,5	56,0	56,4	56,4	53,2	37,9	3,1	1,6	1,2	1,2	4,4	19,7
2015.1	58,2	9	56,5	58,3	58,6	58,5	55,2	40,7	1,7	-0,1	-0,4	-0,3	3,0	17,5
2015.2	59,9	10	58,5	60,4	60,6	60,5	57,2	43,3	1,4	-0,5	-0,7	-0,6	2,7	16,6
2015.3	61,6	11	60,5	62,4	62,5	62,4	59,3	45,8	1,1	-0,8	-0,9	-0,8	2,3	15,8
2015.4	63,4	12	62,5	64,3	64,3	64,2	61,4	48,2	0,9	-0,9	-0,9	-0,8	2,0	15,2
2016.1	65,1	13	64,5	66,1	66,0	65,8	63,7	50,6	0,6	-1,0	-0,9	-0,7	1,4	14,5
2016.2	66,9	14	66,5	67,8	67,5	67,4	66,0	52,9	0,4	-0,9	-0,6	-0,5	0,9	14,0
2016.3	68,5	15	68,6	69,3	69,0	69,0	68,4	55,1	-0,1	-0,8	-0,5	-0,5	0,1	13,4
2016.4	70,2	16	70,6	70,7	70,5	70,4	70,9	57,2	-0,4	-0,5	-0,3	-0,2	-0,7	13,0
2017.1	71,9	17	72,6	72,1	71,8	71,8	73,5	59,3	-0,7	-0,2	0,1	0,1	-1,6	12,6
2017.2	73,6	18	74,6	73,3	73,1	73,2	76,2	61,4	-1,0	0,3	0,5	0,4	-2,6	12,2
2017.3	74,9	19	76,6	74,4	74,3	74,4	79,0	63,4	-1,7	0,5	0,6	0,5	-4,1	11,5
2017.4	76,4	20	78,6	75,4	75,5	75,7	81,8	65,3	-2,2	1,0	0,9	0,7	-5,4	11,1
		21	80,6	76,2	76,6	76,9	84,8	67,2						
		28	94,8	79,0	83,1	84,2	109,1	79,7						
		40	118,9	70,8	90,9	93,8	167,7	98,5						
		120	280,1	-408	109,1	126,4	2959	189,1						



# Пример 4: продажи мороженого.

## Аддитивная сезонность

# 10

	$y$	$MA$	$y-MA$	$S$	$y-S$	$T$	$T+S$	$\varepsilon$
весна13	1,5			-0,280	1,780	1,741	1,462	0,038
лето13	2,6			0,780	1,820	1,803	2,582	0,018
осень13	1,7	1,663	0,037	0,183	1,517	1,864	2,047	-0,347
зима13	0,9	1,700	-0,800	-0,683	1,583	1,926	1,243	-0,343
весна14	1,4	1,888	-0,488	-0,280	1,680	1,987	1,707	-0,307
лето14	3	2,113	0,888	0,780	2,220	2,048	2,828	0,172
осень14	2,8	2,263	0,538	0,183	2,617	2,110	2,293	0,507
зима14	1,6	2,350	-0,750	-0,683	2,283	2,171	1,489	0,111
весна15	1,9	2,363	-0,463	-0,280	2,180	2,233	1,953	-0,053
лето15	3,2	2,400	0,800	0,780	2,420	2,294	3,074	0,126
осень15	2,7	2,488	0,213	0,183	2,517	2,356	2,539	0,161
зима15	2	2,550	-0,550	-0,683	2,683	2,417	1,734	0,266
весна16	2,2	2,563	-0,363	-0,280	2,480	2,479	2,199	0,001
лето16	3,4	2,563	0,838	0,780	2,620	2,540	3,320	0,080
осень16	2,6	2,663	-0,062	0,183	2,417	2,602	2,784	-0,184
зима16	2,1	2,738	-0,638	-0,683	2,783	2,663	1,980	0,120
весна17	2,9	2,713	0,188	-0,280	3,180	2,724	2,445	0,455
лето17	3,3	2,713	0,588	0,780	2,520	2,786	3,566	-0,266
осень17	2,5			0,183	2,317	2,847	3,030	-0,530
зима17	2,2			-0,683	2,883	2,909	2,226	-0,026

**Сезонность:**

$$\tilde{S}_1 = \left( \begin{matrix} -0,488 - 0,463 \\ -0,363 + 0,188 \end{matrix} \right) / 4,$$

$$\tilde{S}_1 = -0,281, \quad \tilde{S}_2 = 0,778,$$

$$\tilde{S}_3 = 0,181, \quad \tilde{S}_4 = -0,684.$$

**Корректировка:**

$$(\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_4) / 4 = -0,015,$$

$$S_1 = -0,280, \quad S_2 = 0,780,$$

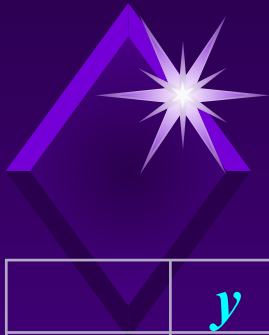
$$S_3 = 0,183, \quad S_4 = -0,683.$$

**Тренд:**

$$\hat{T}_t = 1,680 + 0,061t.$$

**Точность модели:**

$$\hat{K}_d = 1 - \frac{D\varepsilon}{Dy} = 0,850.$$



# Пример 4: продажи мороженого. Мультипликативная сезонность

# 11

	$y$	$MA$	$y/MA$	$S$	$y/S$	$T$	$T \cdot S$	$\varepsilon$
весна13	1,5			0,876	1,712	1,675	1,468	0,032
лето13	2,6			1,336	1,946	1,745	2,332	0,268
осень13	1,7	1,663	1,023	1,090	1,559	1,815	1,979	-0,279
зима13	0,9	1,700	0,529	0,697	1,292	1,885	1,313	-0,413
весна14	1,4	1,888	0,742	0,876	1,597	1,955	1,713	-0,313
лето14	3	2,113	1,420	1,336	2,245	2,025	2,706	0,294
осень14	2,8	2,263	1,238	1,090	2,568	2,095	2,284	0,516
зима14	1,6	2,350	0,681	0,697	2,296	2,165	1,509	0,091
весна15	1,9	2,363	0,804	0,876	2,168	2,235	1,959	-0,059
лето15	3,2	2,400	1,333	1,336	2,395	2,305	3,081	0,119
осень15	2,7	2,488	1,085	1,090	2,476	2,375	2,590	0,110
зима15	2	2,550	0,784	0,697	2,870	2,445	1,704	0,296
весна16	2,2	2,563	0,859	0,876	2,510	2,515	2,204	-0,004
лето16	3,4	2,563	1,327	1,336	2,544	2,585	3,455	-0,055
осень16	2,6	2,663	0,977	1,090	2,384	2,655	2,896	-0,296
зима16	2,1	2,738	0,767	0,697	3,014	2,726	1,899	0,201
весна17	2,9	2,713	1,069	0,876	3,309	2,796	2,450	0,450
лето17	3,3	2,713	1,217	1,336	2,469	2,866	3,830	-0,530
осень17	2,5			1,090	2,293	2,936	3,201	-0,701
зима17	2,2			0,697	3,157	3,006	2,094	0,106

**Сезонность:**

$$S_1 = \left( \begin{matrix} 0,742 + 0,804 \\ + 0,859 + 1,069 \end{matrix} \right) / 4,$$

$$\tilde{S}_1 = 0,868, \quad \tilde{S}_2 = 1,324,$$

$$\tilde{S}_3 = 1,081, \quad \tilde{S}_4 = 0,690.$$

**Корректировка:**

$$(\tilde{S}_1 + \dots + \tilde{S}_4) / 4 = 0,991,$$

$$S_1 = 0,876, \quad S_2 = 1,336,$$

$$S_3 = 1,090, \quad S_4 = 0,697.$$

**Тренд:**

$$\hat{T}_t = 1,680 + 0,061t.$$

**Точность модели:**

$$\hat{K}_d = 1 - \frac{D\varepsilon}{Dy} = 0,778.$$



*Спасибо  
за внимание!*

[alexander.filatov@gmail.com](mailto:alexander.filatov@gmail.com)

<http://vk.com/alexander.filatov>, <http://vk.com/baikalreadings>