

# Методы формирования уравнений электрического равновесия цепи

До сих пор рассмотрение ограничивалось только простыми, одноконтурными и двухузловыми цепями, а также цепями, которые приводятся к простым с помощью элементарных преобразований. Для анализа таких цепей использовалась основная система уравнений электрического равновесия, включающая в себя  $r$  компонентных и  $r$  топологических уравнений, составленных на основании законов Кирхгофа. С помощью основной системы уравнений электрического равновесия можно производить анализ и сложных цепей, однако с ростом числа ветвей он усложняется, так как для определения токов и напряжений цепи, содержащей  $r$  ветвей, приходится решать систему из  $r$  уравнений.

# Методы формирования уравнений электрического равновесия цепи

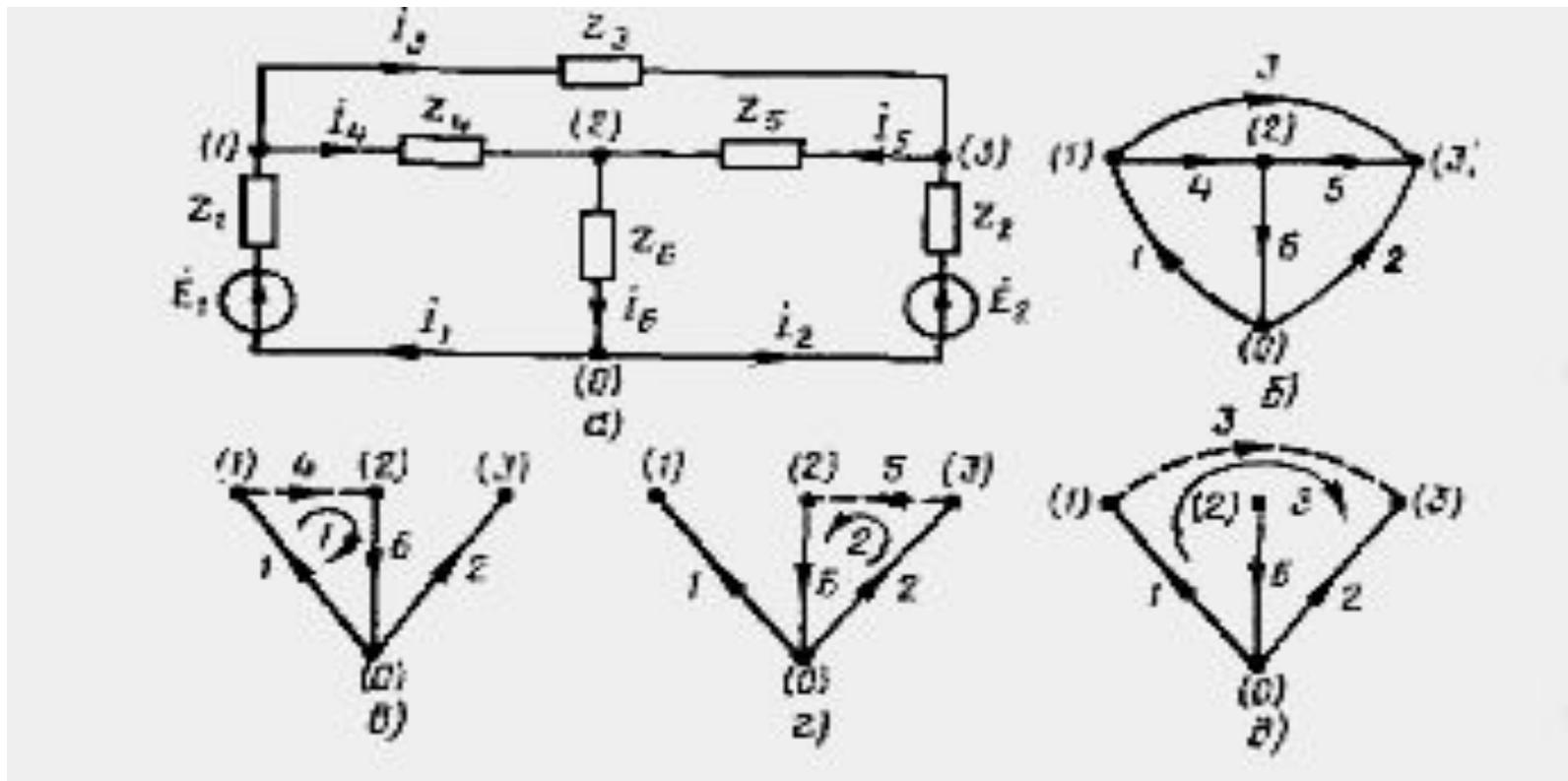
Число одновременно решаемых уравнений может быть сокращено путем исключения из основной системы уравнений (ОСУ) электрического равновесия части переменных, однако наименьшая трудоемкость анализа достигается, если вообще отказаться от составления ОСУ и формировать систему уравнений цепи сразу же в сокращенной форме относительно меньшего по сравнению с  $2p - p_{\text{ИН}} - p_{\text{ИТ}}$  числа переменных. В этом случае неизвестные токи и напряжения ветвей электрической цепи разбиваются на две группы: **независимые**, относительно которых составляется сокращенная система уравнений электрического равновесия цепи (ССУ), и **зависимые**, которые выражаются через независимые с помощью компонентных или топологических уравнений.

# **Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа**

К методам формирования уравнений электрического равновесия цепей, основанным на непосредственном применении законов Кирхгофа, относятся **метод токов ветвей** и **метод напряжений ветвей**. В методе токов ветвей (ТВ) в качестве независимых переменных, относительно которых составляется сокращенная система уравнений электрического равновесия, используют неизвестные токи ветвей исследуемой цепи.

**Метод ТВ основан на том, что ток и напряжение каждой ветви, за исключением ветвей, содержащих идеализированные источники тока, а также ветвей, составленных только из идеализированных источников напряжения, связаны между собой однозначной зависимостью, которая определяется компонентным уравнением данной ветви.**

# Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа

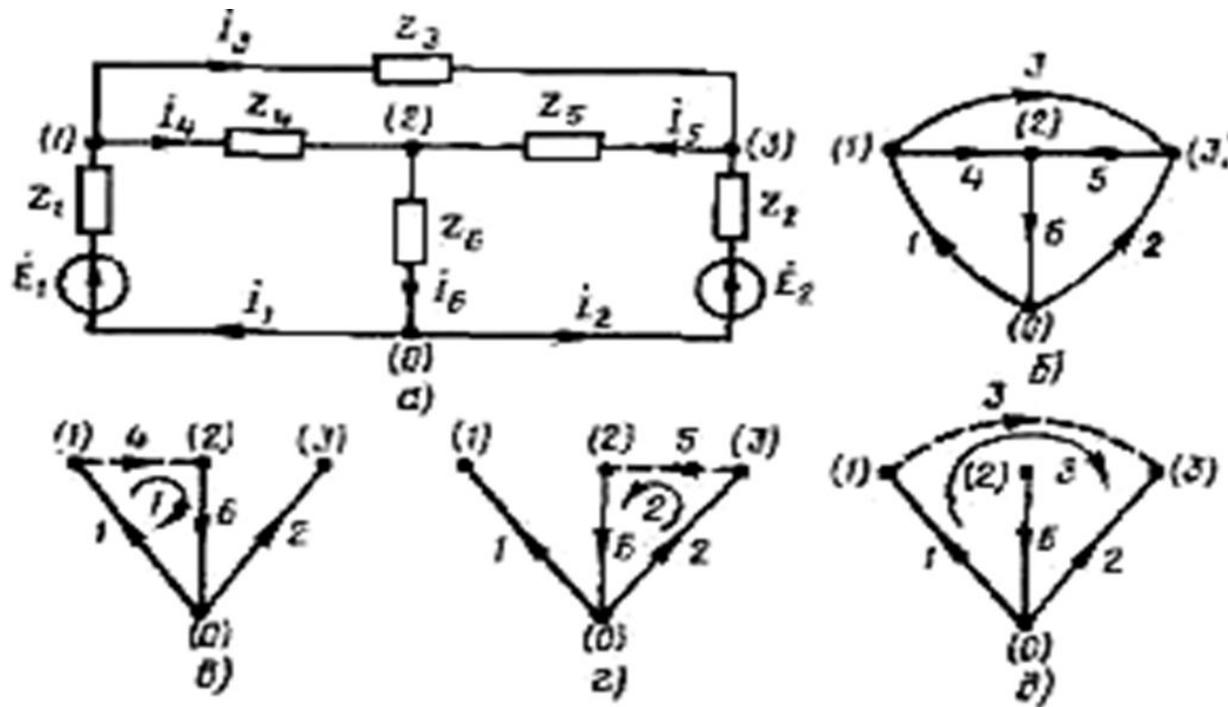


Составим систему уравнений электрического равновесия по методу ТВ для электрической цепи, схема которой, приведена на рис. **а**. Граф этой цепи, соответствующий сокращенному топологическому описанию, изображен на рис. **б**

## ***Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа***

Как видно из рисунка, для данного топологического описания число ветвей  $p=6$ , число узлов  $q=4$ , причем ни одна из ветвей не содержит источников тока и не составлена только из источников напряжения. Выбирая дерево графа и систему независимых контуров в соответствии с рис. **в - д**, составим основную систему уравнений электрического равновесия которая будет включать в себя 12 уравнений:

# Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа



$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0;$$

$$\dot{U}_1 + \dot{U}_4 + \dot{U}_6 = 0;$$

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 - \dot{E}_1;$$

$$\dot{U}_4 = Z_4 \dot{I}_4;$$

$$-\dot{I}_4 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = 0;$$

$$\dot{U}_2 + \dot{U}_5 + \dot{U}_6 = 0;$$

$$\dot{U}_2 = Z_2 \dot{I}_2 - \dot{E}_2;$$

$$\dot{U}_5 = Z_5 \dot{I}_5;$$

$$-\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 = 0,$$

$$\dot{U}_1 - \dot{U}_2 + \dot{U}_3 = 0$$

$$\dot{U}_3 = Z_3 \dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_6 = Z_6 \dot{I}_6.$$

# ***Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа***

Подставляя компонентные уравнения в уравнения баланса напряжений, получаем в сочетании с уравнениями баланса токов сокращенную систему уравнения электрического равновесия цепи:

$$-\dot{I}_1 + \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = 0;$$

$$-\dot{I}_4 - \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = 0;$$

$$-\dot{I}_2 - \dot{I}_3 + \dot{I}_5 = 0,$$

$$\dot{Z}_1 \dot{I}_1 + \dot{Z}_4 \dot{I}_4 + \dot{Z}_6 \dot{I}_6 = \dot{E}_1;$$

$$\dot{Z}_2 \dot{I}_2 + \dot{Z}_5 \dot{I}_5 + \dot{Z}_6 \dot{I}_6 = \dot{E}_2;$$

$$\dot{Z}_1 \dot{I}_1 - \dot{Z}_2 \dot{I}_2 + \dot{Z}_3 \dot{I}_3 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2.$$

Таким образом, число одновременно решаемых уравнений уменьшилось с 12 до 6.

## ***Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа***

Рассмотрим более общий случай, когда исследуемая цепь помимо указанных ранее элементов включает в себя ветвей, содержащих неуправляемые источники тока (токи этих ветвей заданы, а напряжения неизвестны и не могут быть выражены через токи соответствующих ветвей с помощью компонентных уравнений). Выберем дерево графа цепи таким образом, чтобы ветви, содержащие источники тока, ее входили в число ветвей дерева, т. е. являлись главными ветвями. Тогда напряжения этих ветвей будут фигурировать только в уравнениях баланса напряжений, составленных для главных контуров, замыкаемых ветвями, содержащими источники тока. Выражая в остальных уравнениях, составленных на основании второго закона Кирхгофа, напряжения ветвей через токи этих же ветвей, получим в сочетании с уравнениями, составленными на основании первого закона Кирхгофа, уравнений для определения, неизвестных токов ветвей.

## **Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа**

**При использовании метода ТВ сокращенная система уравнений электрического равновесия цепи включает в себя уравнений баланса токов  $1 - p_{ит}$ , уравнений баланса напряжений, составленных для главных контуров, не содержащих ветвей с источниками тока, причем все входящие в эти уравнения напряжения ветвей должны быть выражены через соответствующие токи.**

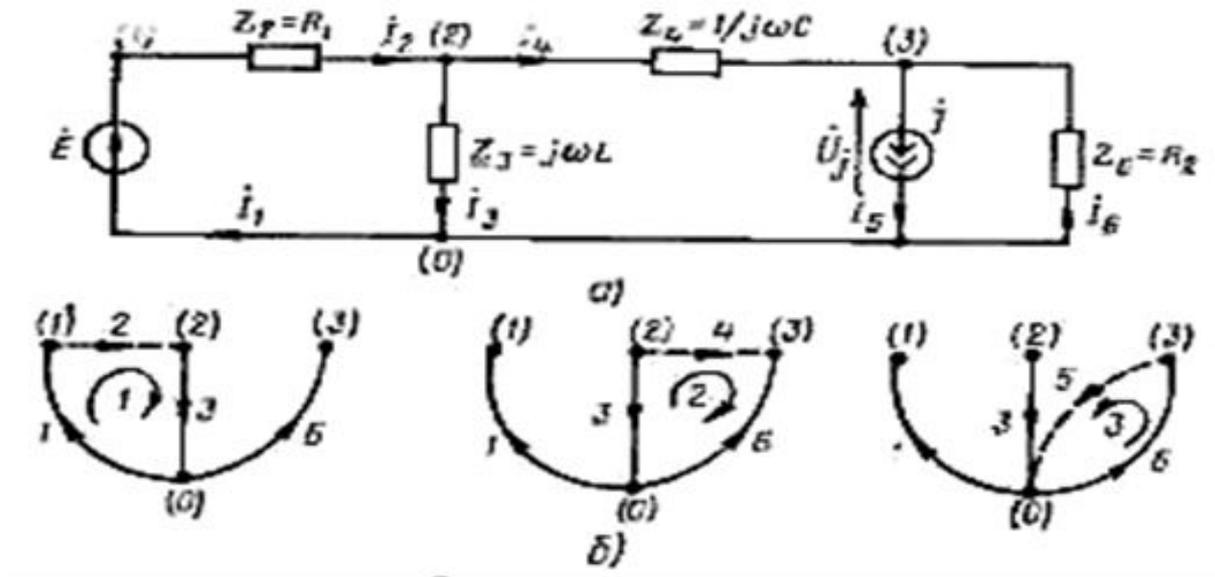
## ***Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа***

Дуальным по отношению к методу ТВ является ***метод напряжений ветвей*** (НВ). При составлении системы уравнений электрического равновесия цепи с помощью этого метода в качестве независимых переменных используют неизвестные напряжения ветвей.

# **Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа**

Система уравнений электрического равновесия в этом случае включает в себя уравнений баланса напряжений и уравнений баланса токов, составленных для главных сечений, не содержащих ветвей, состоящих только из источников напряжения, причем неизвестные токи ветвей, входящие в эти уравнения, должны быть выражены через напряжения этих же ветвей. Число ветвей, напряжения которых могут быть заданы независимо, не может превышать числа независимых узлов. Когда число ветвей, состоящих только из независимых источников напряжения, равно числу независимых узлов, число неизвестных напряжений ветвей равно числу независимых контуров и напряжения всех ветвей могут быть определены из уравнений баланса напряжений.

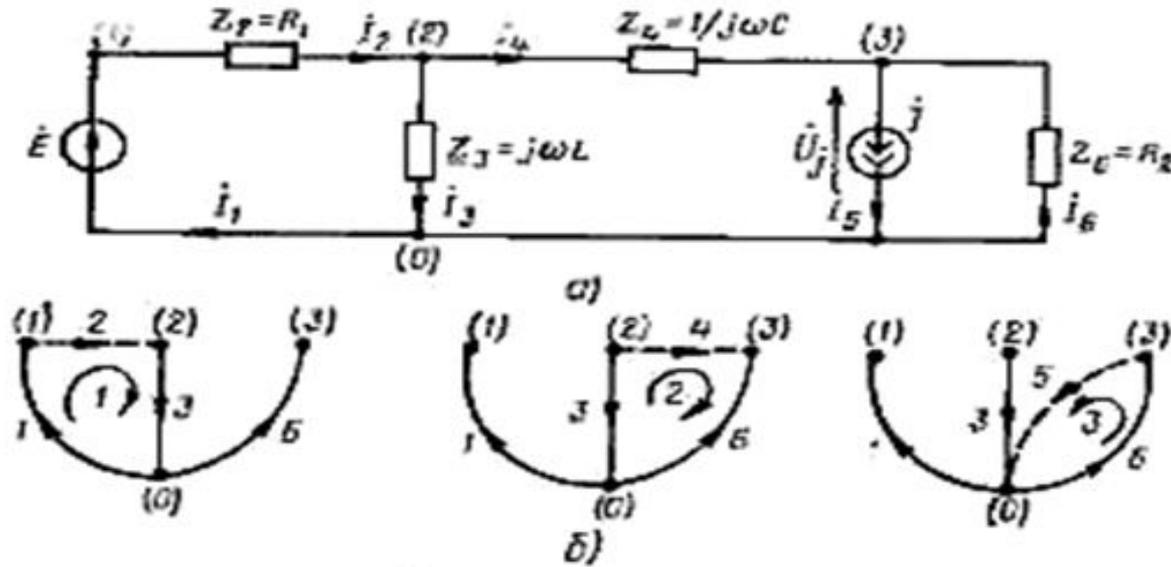
# Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа



Составим уравнения электрического равновесия по методу НВ.  $p = 6$   $q = 4$

Число ветвей цепи , число узлов , причем одна ветвь составлена только из источников напряжения .

# Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа



Для определения  $p - p_{\text{ИН}}$  неизвестных напряжений ветвей составим  $p - q + 1 = 3$  уравнения баланса напряжений и  $q - p_{\text{ИН}} = 2$  уравнения баланса токов для главных сечений, соответствующих третьей и шестой ветвям дерева:

$$\dot{U}_2 + \dot{U}_3 = \dot{E};$$

$$-\dot{U}_3 + \dot{U}_4 - \dot{U}_6 = 0;$$

$$\dot{U}_6 - \dot{U}_j = 0$$

$$\dot{U}_2 / Z_2 + \dot{U}_3 / Z_3 + \dot{U}_4 / Z_4 = 0;$$

$$\dot{U}_4 / Z_3 + \dot{U}_6 / Z_6 - \dot{J} = 0$$

# **Методы, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа**

**Метод НВ в общем случае нельзя использовать для формирования уравнений электрического равновесия цепей со связанными индуктивностями, так как токи таких индуктивностей могут быть выражены через соответствующие напряжения только при коэффициенте связи между индуктивностями, меньшем единицы.**

**Таким образом, методы формирования уравнений электрического равновесия цепи, основанные на непосредственном применении законов Кирхгофа, позволяют уменьшить  $p - r_{ин}$  число одновременно решаемых уравнений от  $p$  до  $r_{ин}$  или  $r_{ин} - 1$ .**

## ***Метод контурных токов***

Метод контурных токов (КТ) основан на важной топологической особенности электрических цепей, заключающейся в том, что токи всех ветвей цепи связаны между собой  $q$  – уравнением баланса токов, и, следовательно, из  $p$  токов ветвей только  $p - q + 1$  ток может быть задан независимо.

Такое число токов в точности равно числу главных контуров рассматриваемой цепи, поэтому с каждым главным контуром можно связать некоторый ток (его называют ***контурным током***), который может быть задан независимо.

## ***Метод контурных токов***

Если токи главных ветвей цепи каким-либо способом определены или заданы, то, используя  $q - 1$  уравнение баланса токов, можно найти  $q - 1$  неизвестных токов ветвей дерева и далее, применяя компонентные уравнения и уравнения баланса напряжений, составленные для главных контуров, содержащих ветви с источниками тока, найти неизвестные напряжения всех ветвей.

Сокращенная система уравнений электрического равновесия цепи, составленная относительно неизвестных контурных токов, называется ***системой контурных уравнений цепи***.

## ***Метод контурных токов***

Система контурных уравнений цепи может быть сформирована двумя способами:

– получена из основной системы уравнений электрического равновесия цепи или из уравнений, составленных по методу ТВ путем исключения всех неизвестных, кроме токов главных ветвей. Этот способ является трудоемким и на практике почти не используется;

– составлена непосредственно по схеме цепи, минуя этап составления ОСУ. При этом запись уравнений осуществляют с помощью простого алгоритма, который можно сформулировать, если проанализировать системы контурных уравнений полученных первым способом, и привести их к некоторой стандартной (канонической) форме введя ряд новых понятий и обозначений.

## **Метод контурных токов**

**Собственным сопротивлением**  $Z_{(ii)}$   $i$ -го контура назовем сумму сопротивлений всех ветвей, входящих в этот контур.

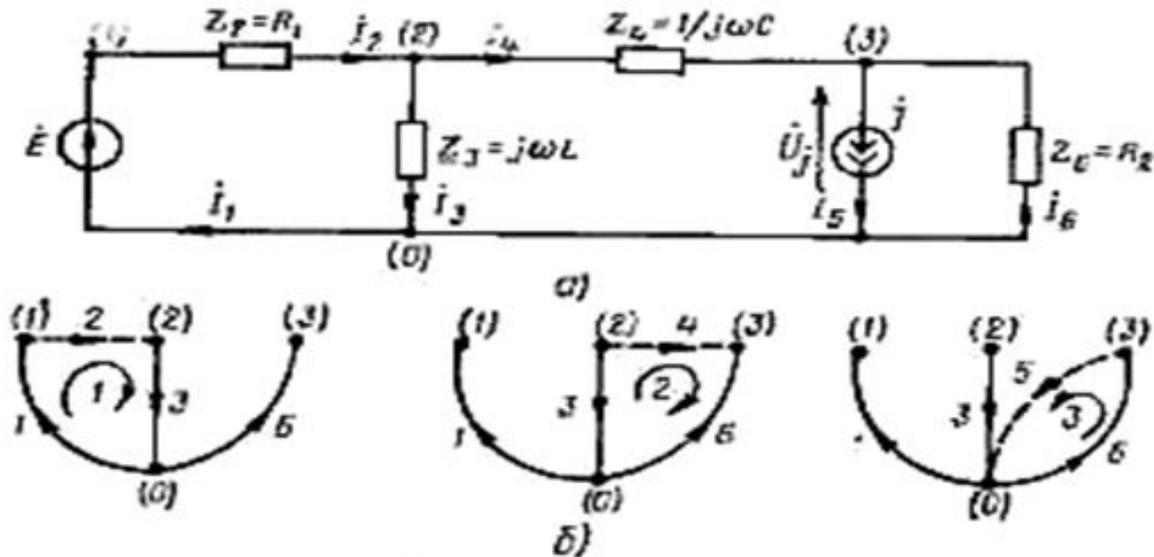
**Общим, или взаимным сопротивлением**  $Z_{(ij)}$   $i$ -го и  $j$ -го контуров назовем сопротивление, равное сумме сопротивлений ветвей, общих для этих контуров.

**Контурная ЭДС**  $E_{ii}$   $i$ -го контура — алгебраическая сумма ЭДС всех идеализированных источников напряжения, входящих в данный контур.

## **Метод контурных токов**

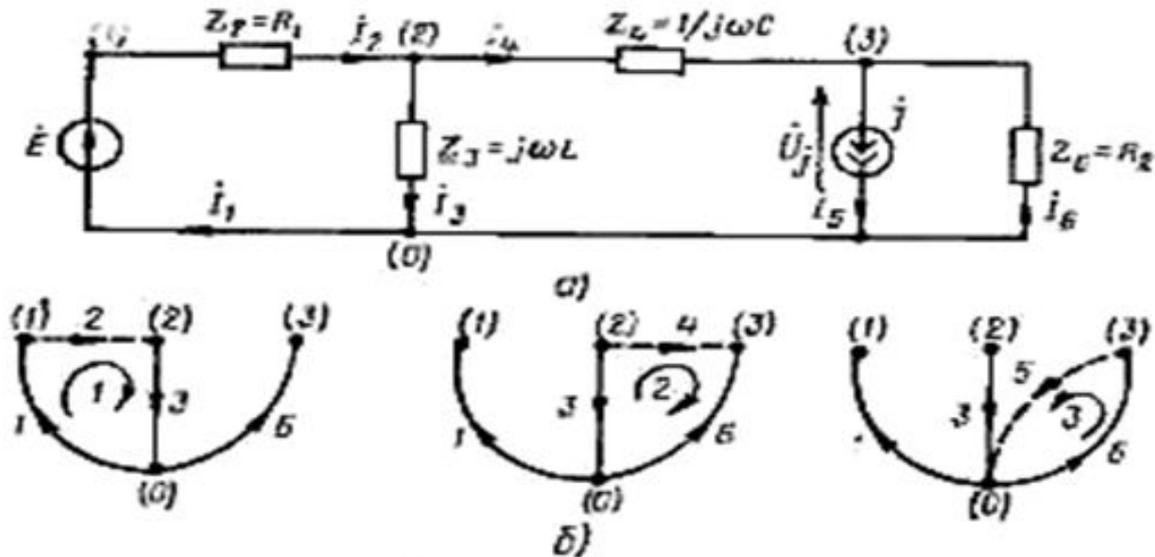
**Все контурные уравнения имеют одинаковую структуру: левая часть уравнения, составленного для  $i$ -го контура, представляет собой сумму членов, одни из которых равен произведению контурного тока  $i$ -го контура на его собственное сопротивление, а остальные — произведениям контурных токов других контуров на общие сопротивления  $i$ -го контура в этих контурах; правая часть уравнения  $i$ -го контура содержит только один член — контурную ЭДС этого контура.**

# Метод контурных токов



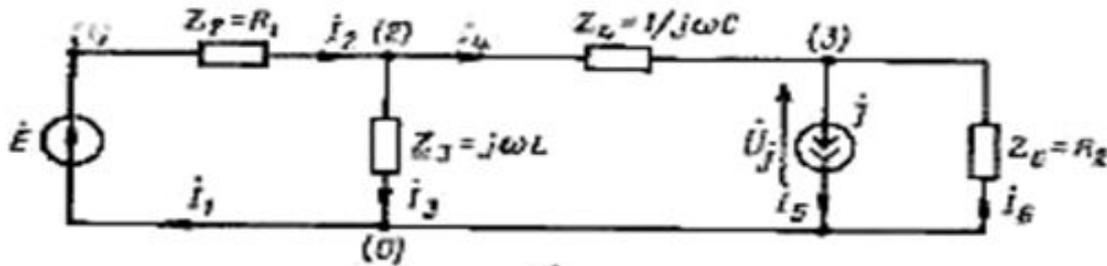
Составим систему контурных уравнений для цепи, схема которой приведена на рис. а. Число ветвей этой цепи  $n = 6$ , число узлов  $q = 4$ , число ветвей, содержащих источники тока,  $r = 1$ .

# Метод контурных токов



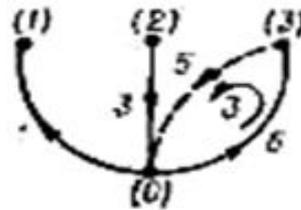
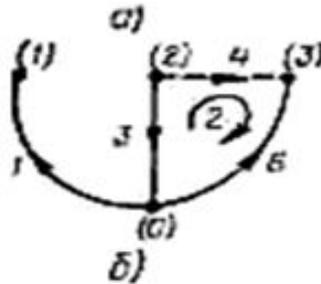
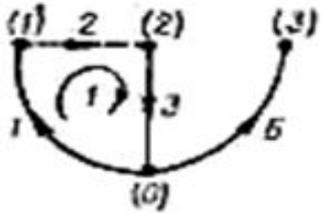
Выберем дерево графа цепи таким образом, чтобы ветвь с источником тока вошла в число главных ветвей. Соответствующая выбранному дереву система независимых контуров цепи равно  $n - r_{IT} + 1 = 2$ , а число неизвестных контурных токов  $r_{IT} - 1 = 1$ , система контурных уравнений имеет вид

# Метод контурных токов



$$Z_{(11)} \dot{I}_{11} + Z_{(12)} \dot{I}_{22} + Z_{(13)} \dot{I}_{33} = \dot{E}_{11};$$

$$Z_{(21)} \dot{I}_{11} + Z_{(22)} \dot{I}_{22} + Z_{(23)} \dot{I}_{33} = \dot{E}_{22},$$



где

$\dot{I}_{11} = \dot{I}_2$ ;  $\dot{I}_{22}$  — неизвестные контурные токи первого и второго контуров;

$\dot{I}_{33} = \dot{I}_5$  — известный контурный ток третьего контура;

$Z_{(11)} = Z_2 + Z_3$ ;  $Z_{(22)}$  — собственные сопротивления первого и второго контуров;

$Z_{(12)} = Z_{(21)} = -Z_3$ ;  $Z_{(23)}$  — общие сопротивления;

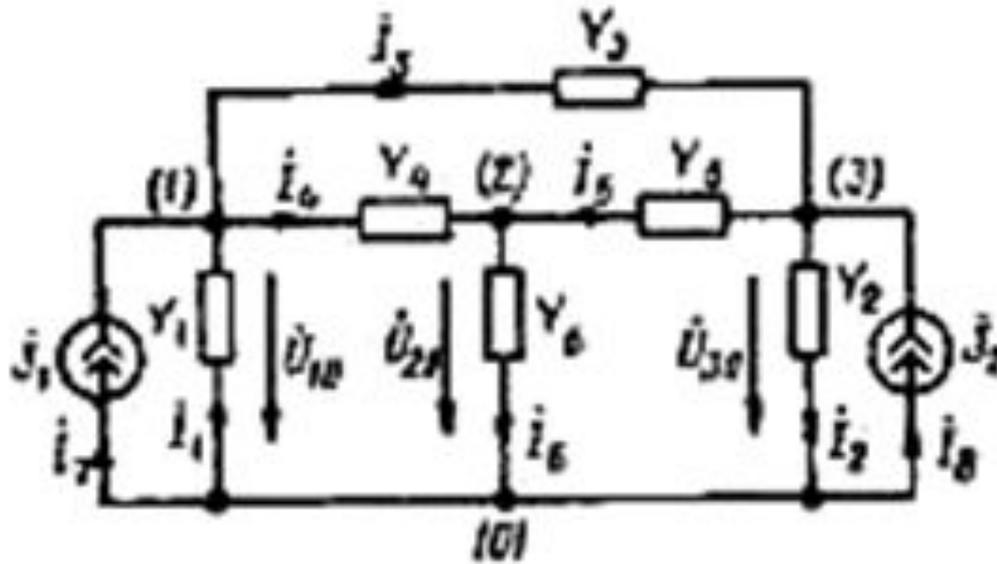
$E_{11} = E$ ,  $E_{22} = 0$  — контурные ЭДС первого и второго контуров.

## ***Метод узловых напряжений***

В качестве независимых переменных, относительно которых формируют уравнения электрического равновесия цепи, можно использовать также так называемые ***узловые напряжения***, т. е. напряжения независимых узлов цепи относительно базисного. Нетрудно показать, что ***напряжения всех ветвей электрической цепи могут быть выражены через ее узловые напряжения.***

Метод формирования уравнений электрического равновесия цепи, в котором в качестве независимых переменных используются неизвестные напряжения независимых узлов относительно базисного, называется ***методом узловых напряжений (УН).***

# Метод узловых напряжений



# Метод узловых напряжений

**Собственной проводимостью**  $Y_{(ii)}$   $i$ -го узла назовем сумму проводимостей всех ветвей, подключенных к данному узлу. Для рассматриваемой цепи

$$Y_{(11)} = Y_1 + Y_3 + Y_4; \quad Y_{(22)} = Y_4 + Y_5 + Y_6; \quad Y_{(33)} = Y_2 + Y_3 + Y_5$$

**Общая (взаимная) проводимость**  $i$ -го и  $j$ -го узлов — это сумма проводимостей всех ветвей, включенных непосредственно между этими узлами, взятая с противоположным знаком. Если в цепи отсутствуют ветви, включенные непосредственно между  $i$ -м и  $j$ -м узлами, то  $Y_{(ij)} = Y_{(ji)} = -Y_k$ ;  $Y_{(23)} = Y_{(32)} = -Y_5$ ;  $Y_{(13)} = Y_{(31)} = -Y_3$

**Узловым током**  $J_{i0}$   $i$ -го узла называется алгебраическая сумма токов всех источников тока, подключенных к данному узлу. Если ток какого-либо источника тока направлен к  $i$ -му узлу, то он входит в выражение для  $J_{i0}$  со знаком плюс, если ток направлен от  $i$ -го узла, то - со знаком минус. Для рассматриваемой цепи

$$J_{10} = J_1; \quad J_{20} = 0; \quad J_{30} = J_2$$

## ***Метод узловых напряжений***

$$Y_{(11)} \dot{U}_{10} + Y_{(12)} \dot{U}_{20} + Y_{(13)} \dot{U}_{30} = \dot{J}_{10};$$

$$Y_{(21)} \dot{U}_{10} + Y_{(22)} \dot{U}_{20} + Y_{(23)} \dot{U}_{30} = \dot{J}_{20};$$

$$Y_{(31)} \dot{U}_{10} + Y_{(32)} \dot{U}_{20} + Y_{(33)} \dot{U}_{30} = \dot{J}_{30}.$$

Таким образом, левая часть узлового уравнения, составленного для  $i$ -го независимого узла, есть сумма членов один из которых равен произведению узлового напряжения  $i$ -го узла на его собственную проводимость, а остальные — произведениям узловых напряжений других независимых узлов на взаимные проводимости  $i$ -го узла и этих узлов. Правая часть каждого уравнения равна узловому току соответствующего узла.