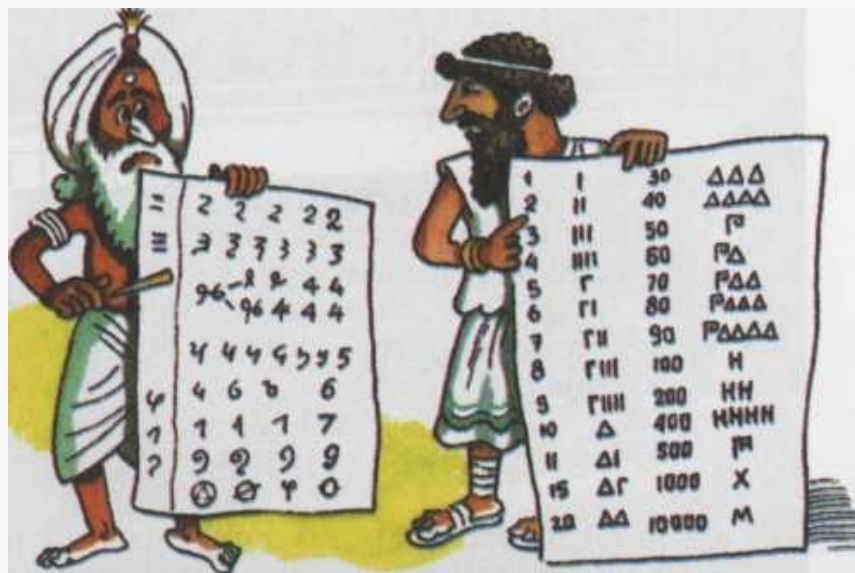


Системы счисления



учитель информатики
МБОУ «СОШ № 128»
И.А. Мерс

Содержание:

- Двоичное кодирование в ПК
- Что такое система счисления?
- Непозиционные системы счисления
- Позиционные системы счисления
- Перевод в 10-тичную СС
- Перевод из 10-тичной СС
- Перевод из 2-ной в 8-ную и обратно
- Перевод из 2-ной в 16-ную и обратно
- Опрос
- Арифметические операции в позиционных СС
- Сложение и вычитание в 2-ой СС
- Умножение в 2-ой СС
- Сложение и вычитание в 8-ой СС
- Решение примеров

Двоичное кодирование в компьютере

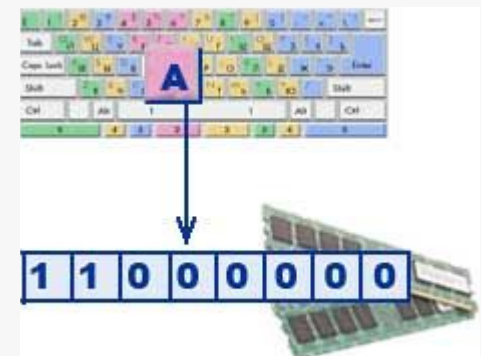
Вся информация, которую обрабатывает компьютер должна быть представлена двоичным кодом с помощью двух цифр: **0** и **1**. Эти два символа принято называть *двоичными цифрами* или *битами*, или *двоичным кодом*.

С точки зрения технической реализации использование двоичной системы счисления для кодирования информации оказалось намного более простым, чем применение других способов.

Недостаток двоичного кодирования – *длинные коды*. Но в технике легче иметь дело с большим количеством простых элементов, чем с небольшим числом сложных.

0 – отсутствие электрического сигнала;

1 – наличие электрического сигнала.



С помощью двух цифр 0 и 1 можно закодировать любое сообщение. Это явилось причиной того, что в компьютере обязательно должно быть организовано два важных процесса: кодирование и декодирование.

Кодирование – преобразование входной информации в форму, воспринимаемую компьютером, т.е. двоичный код.

Декодирование – преобразование данных из двоичного кода в форму, понятную человеку.

Способы кодирования и декодирования информации в компьютере, в первую очередь, зависит от вида информации, а именно, что должно кодироваться: числа, текст, графические изображения или звук.



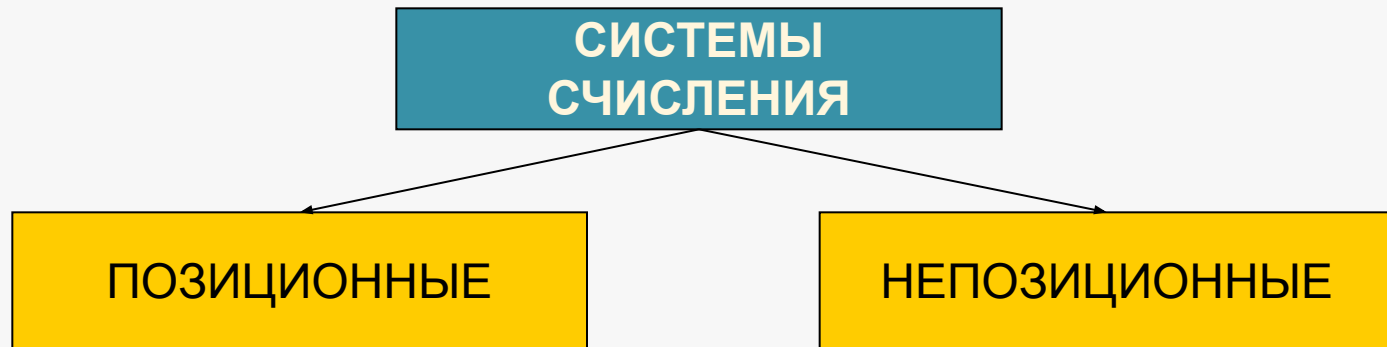
Система счисления

Почему мы используем цифры от 0 до 9? А как можно считать еще? Оказывается, существует множество вариантов! И это зависит от такого понятия, как *система счисления*.

Система счисления (СС) — способ записи чисел с помощью набора специальных знаков, называемых цифрами.



Виды систем счисления



В *позиционных* системах счисления *величина*, обозначаемая цифрой в записи числа, *зависит* от её *положения* в числе (*позиции*).

211

В *непозиционных* системах счисления *величина*, которую обозначает цифра, *не зависит* от *положения* в числе.

XXI

Непозиционные системы счисления

Ярким примером фактически *непозиционной системы* счисления является *римская*, в которой в качестве цифр используются латинские буквы:

I обозначает 1, V - 5, X - 10, L - 50, C - 100, D - 500, M -1000.

Натуральные числа записываются при помощи повторения этих цифр. Например, II = 1 + 1 = 2, здесь символ I обозначает 1 независимо от места в числе.

Для правильной записи больших чисел римскими цифрами необходимо сначала записать число тысяч, затем сотен, затем десятков и, наконец, единиц.

Пример: число 1789. Одна тысяча M, семь сотен DCC, восемьдесят LXXX, девять IX. Запишем их вместе: MDCCLXXXIX.

$$\text{MDCCLXXXIX} = 1000 + (500 + 100 + 100) + (50 + 10 + 10 + 10) + (10 - 1) = 1789$$

Для изображения чисел в непозиционной системе счисления нельзя ограничиться конечным набором цифр. Кроме того, выполнение арифметических действий в них крайне неудобно.



Первые позиционные системы счисления

Самой первой такой системой, когда счетным "прибором" служили пальцы рук, была *пятеричная*.


Следующей возникла *двенадцатеричная* система счисления. Возникла она в древнем Шумере. Возможно, что она возникала у них из подсчёта фаланг на руке большим пальцем.

На ее широкое использование в прошлом указывает сохранившиеся в ряде стран способы отсчета времени, денег и соотношения между некоторыми единицами измерения. Год состоит из 12 месяцев, а половина суток состоит из 12 часов.

Элементом двенадцатеричной системы в современности может служить счёт дюжинами.

Английский фунт состоит из 12 шиллингов.





Следующая позиционная система счисления была придумана еще в Древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была *шестидесятеричная*, т.е. в ней использовалось шестьдесят цифр!

В более позднее время использовалась арабами, а также древними и средневековыми астрономами. Шестидесятеричная система счисления, как считают исследователи, является синтезом уже вышеупомянутых пятеричной и двенадцатеричной систем.

В настоящее время наиболее распространены *десятичная*, *двоичная*, *восьмеричная* и *шестнадцатеричная* системы счисления.

Десятичная система счисления

Десятичная система счисления

— позиционная система счисления по основанию 10.

Предполагается, что основание 10 связано с количеством пальцев на руках у человека.

Наиболее распространённая система счисления в мире.

Для записи чисел используются символы **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9**, называемые арабскими цифрами.

Современные цифры	Арабские цифры	Индийские цифры
0	٠	०
1	١	१
2	٢	२
3	٣	३
4	٤	४
5	٥	५
6	٦	६
7	٧	७
8	٨	८
9	٩	९

Двоичная система счисления

Двоичная система счисления — позиционная система счисления с основанием 2.

Используются цифры 0 и 1.

Двоичная система используется в цифровых устройствах, поскольку является наиболее простой и удовлетворяет требованиям:

- Чем меньше значений существует в системе, тем проще изготовить отдельные элементы.
- Чем меньше количество состояний у элемента, тем выше помехоустойчивость и тем быстрее он может работать.
- Простота создания таблиц сложения и умножения — основных действий над числами

Алфавит двоичной, восьмеричной, десятичной и шестнадцатеричной систем счисления

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Количество используемых цифр называется **основанием системы счисления**.

Соответствие десятичной, двоичной, восьмеричной и шестнадцатеричной систем счисления

p=10	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
p=2	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
p=8	0	1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	13	14	15	16	17	20
p=16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F	10

При одновременной работе с несколькими системами счисления для их различия основание системы обычно указывается в виде нижнего индекса, который записывается в десятичной системе:

321_{10} — это число 321 в десятичной системе счисления;

101000001_2 — то же число, но в двоичной системе.

Двоичное число 101000001_2 можно расписать в виде:

$$101000001_2 = 1*2^8 + 0*2^7 + 1*2^6 + 0*2^5 + 0*2^4 + 0*2^3 + 0*2^2 + 0*2^1 + 1*2^0.$$

Перевод чисел из любой позиционной системы счисления в десятичную

Чтобы перевести целое число из позиционной системы счисления с основанием p в десятичную, нужно справа налево, начиная с 0, расставить разряды, потом каждую цифру умножить на основание системы счисления из которой переводим в степени этого разряда.

Например, переведем число 11001_2 в десятичную систему счисления. Для этого представим это число в виде степеней двойки и произведем вычисления в десятичной системе счисления.

$$11001_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 16 + 8 + 0 + 0 + 1 = 25_{10}$$

Рассмотрим еще один пример. Переведем число $12,34_8$ в десятичную систему счисления.

$$12,34_8 = 1 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^{-1} + 4 \cdot 8^{-2} = 1 \cdot 8 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1/8 + 4 \cdot 1/64 = 10 + 0,375 + 0,0625 = 10,4375_{10}$$

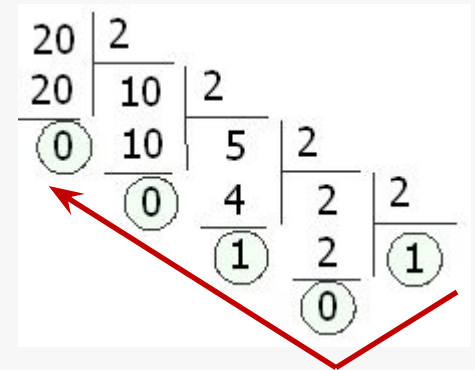


Перевод целых десятичных чисел в 2, 8, 16-ую системы счисления

Перевод чисел из десятичной системы счисления в любую другую

Перевод из десятичной системы счисления в систему счисления с основанием p осуществляется последовательным делением десятичного числа и его десятичных частных на p , а затем выписыванием последнего частного и остатков в обратном порядке.

Переведем десятичное число 20_{10} в двоичную систему счисления (основание системы счисления $p=2$). В итоге получили $20_{10} = 10100_2$.



ПЕРЕВОД ЦЕЛОГО ДЕСЯТИЧНОГО ЧИСЛА МЕТОДОМ ПОЭТАПНОГО ДЕЛЕНИЯ

Перевести десятичное число 26 в двоичную, троичную, шестнадцатеричную системы

$$26_{10} \rightarrow X_2$$

26		0	↑
13		1	
6		0	
3		1	
1		1	

$$26_{10} = 11010_2$$

$$26_{10} \rightarrow X_3$$

26		2	↑
8		2	
2		2	

$$26_{10} = 222_3$$

$$26_{10} \rightarrow X_{16}$$

26		10	↑
1		1	

$$26_{10} = 1A_{16}$$

Перевести десятичную дробь 0,375

0		375
*		2
0		750
		2
1		500
		2
1		000

0		375
*		3
1		125
		3
0		375
		3
1		125

0		375
•		16
2		250
+3		75
6		000

$$0,375_{10} = 0,011_2 \quad 0,375_{10} = 0,101_3 \quad 0,375_{10} = 0,6_{16}$$

Переведи в 2-ую СС

$$26,375_{10} \rightarrow X_2$$

$$26_{10} = 11010_2$$

$$0,375_{10} = 0,011_2$$

$$26,375_{10} = 11010,011_2$$

Прочитайте стихотворение. Переведите встречающиеся в нем числительные из двоичной системы счисления в десятичную.

Необыкновенная девчонка

(А. Н. Стариков)

Ей было тысяча сто лет,
Она в 101-ый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила –
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно,...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Задания:

- Запишите число в римской системе счисления:
2013=
- Запишите в развернутом виде числа:
 $1234_{10} =$
 $345_8 =$
 $11010_2 =$
- Переведите числа в десятичную систему счисления:
 $274_8 =$
 $BE_{16} =$
 $110,101_2 =$
- Как будет записываться число 24_{10} в двоичной системе счисления? 123_{10} в восьмеричной?



Перевод $2 \leftrightarrow 8$ СС

Очень просто! Направо и налево от точки откладываем **триады** - группы по три цифры, после чего записываем их в соответствующем 8-ном виде. Неполные триады дополняются нулями.

Пример:

$$\underline{1011010}, \underline{01101}_2 = 001\ 011\ 010, 011\ 010_2 = 132,32_8$$

Обратно - с точностью до наоборот:

$$257,31_8 = 010\ 101\ 111, 011\ 001_2 = 10101111,011001_2$$

Системы счисления, используемые в ЭВМ
(с основанием 2^n)

Перевести число 1100101001101010111_2
в восьмеричную систему счисления

001	100	101	001	101	010	111
1	4	5	1	5	2	7

Получаем 1451527_8



Перевод $2 \leftrightarrow 16$ СС

Очень просто! Направо и налево от точки откладываем **тетрады** - группы по четыре цифры, после чего записываем их в соответствующем 16-ном виде. Неполные тетрады дополняются нулями.

Пример:

$$\underline{1011010110,011001}_2 = 0010\ 11\ 01\ 0110,011\ 010_2 = 132,32_8$$

Обратно - с точностью до наоборот:

$$257,31_8 = 010\ 101\ 111,011\ 001_2 = 10101111,011001_2$$

Перевести число 1100101001101010111_2
в шестнадцатеричную систему счисления

0110	0101	0011	0101	0111
6	5	3	5	7

Получаем 65357_{16}

Перевести число из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную

$$1451527_8 \longrightarrow X_{16}$$




Согласны ли Вы с утверждениями...?

№	Согласны ли вы с утверждением	Да	Нет
1	Система счисления – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.		
2	Все системы счисления делятся на три большие группы: позиционные, непозиционные и полупозиционные.		
3	В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее позиции в числе.		
4	Основанием двоичной системы счисления является число 4		
5	Число A21CFD4 записано в шестнадцатеричной системе счисления.		
6	Число 156_7 записано с ошибкой.		
7	Число 10, записанное в десятичной системе счисления, в двоичной системе счисления записывается как 1011		
8	Число 10, записанное в десятичной системе счисления, меньше числа 10, записанного в восьмеричной системе счисления.		
9	Число $3005,23_4$ записано с ошибкой.		
10	Число 6398 записано в восьмеричной системе счисления.		

Проверь себя

№	Согласны ли вы с утверждением	Да	Нет
1	Система счисления – это знаковая система, в которой числа записываются по определенным правилам с помощью символов некоторого алфавита, называемых цифрами.	+	
2	Все системы счисления делятся на три большие группы: позиционные, непозиционные и полупозиционные.		+
3	В позиционных системах счисления количественное значение цифры зависит от ее позиции в числе.	+	
4	Основанием двоичной системы счисления является число 4		+
5	Число A21CFD4 записано в шестнадцатеричной системе счисления.	+	
6	Число 156_7 записано с ошибкой.		+
7	Число 10, записанное в десятичной системе счисления, в двоичной системе счисления записывается как 1011		+
8	Число 10, записанное в десятичной системе счисления, меньше числа 10, записанного в восьмеричной системе счисления.		+
9	Число $3005,23_4$ записано с ошибкой.	+	
10	Число 6398 записано в восьмеричной системе счисления.		+



**«Арифметические
операции в
ПОЗИЦИОННЫХ
СИСТЕМАХ СЧИСЛЕНИЯ»**

Все позиционные системы счисления «одинаковы», а именно, во всех них выполняются арифметические операции по одним и тем же правилам:

- **справедливы одни и те же законы арифметики:**

-коммутативный (переместительный): $m + n = n + m$

$$m \cdot n = n \cdot m$$

-ассоциативный (сочетательный): $(m + n) + k = m + (n + k) = m + n + k$

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k) = m \cdot n \cdot k$$

-дистрибутивный (распределительный): $(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$

- **справедливы правила сложения, вычитания и умножения столбиком;**

- **правила выполнения арифметических операций опираются на таблицы сложения и умножения.**



Сложение в двоичной системе счисления:

$$0+0=0 \quad 0+1=1$$

перенос

$$1+0=1$$

$$1+1=10_2$$

$$1 + 1 + 1 = 11_2$$

1 1 1 1 1

$$\begin{array}{r} + \quad 10110_2 \\ 111011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$1010001_2$$

Сложение
в 10-ой СС

$$\begin{array}{r} 99 \\ + 1 \\ \hline 100 \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ + 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 11011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111011_2 \\ + 10011_2 \\ \hline \end{array}$$

Вычитание в двоичной системе счисления:

$$0-0=0 \quad 1-1=0$$

$$1-0=1 \quad 10_2-1=1$$

заем

$$\begin{array}{r} \overset{\cdot}{0} \overset{\cdot}{1} \overset{\cdot}{1} \overset{\cdot}{10_2} \overset{\cdot}{0} \overset{\cdot}{10_2} \\ \underline{1000101_2} \\ \quad 11011_2 \\ \hline 0101010_2 \end{array}$$

Вычитание
в 10-ой СС

$$\begin{array}{r} 100 \\ - 1 \\ \hline 99 \end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{r} 101101_2 \\ - 11111_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11011_2 \\ - 1101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101010_2 \\ - 10011_2 \\ \hline \end{array}$$



Умножение в двоичной системе счисления:

<i>*</i>	<i>0</i>	<i>1</i>
<i>0</i>	0	0
<i>1</i>	0	1

$$\begin{array}{r}
 101101_2 \\
 * 101_2 \\
 \hline
 + 101101 \\
 000000 \\
 101101 \\
 \hline
 \end{array}$$

$$11100001_2$$

$$\begin{array}{r}
 11011_2 \\
 * 1101_2 \\
 \hline
 10101111_2
 \end{array}$$



Арифметические операции в 8-

сложение

СС

1 1 1

$$\begin{array}{r} 156_8 \\ + 662_8 \\ \hline 1040_8 \end{array}$$

$$6 + 2 = 8 = 1 * 8 + 0$$

Перенос 1 в след. разряд

Перенос 1 в след. разряд

$$5 + 6 + 1 = 12 = 1 * 8 + 4$$

$$1 + 6 + 1 = 8 = 1 * 8 + 0$$

Перенос 1 в след. разряд

Пример

$$\begin{array}{r} 353_8 \\ + 736_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1353_8 \\ + 777_8 \\ \hline \end{array}$$

Арифметические операции в 8-

вычитание

СС

$$\begin{array}{r} \bullet \quad \bullet \\ 2156_8 \\ - \quad 662_8 \\ \hline 1274_8 \end{array}$$

$$6 - 2 = 4$$

заем

$$5 - 6 + 1 * 8 = 7$$

заем

$$0 - 6 + 1 * 8 = 2$$

Примеры

$$\begin{array}{r} 4153_8 \\ - 667_8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1161_8 \\ - 732_8 \\ \hline \end{array}$$

Решение примеров



Задание №1

1. Переведите числа данные в десятичной СС в двоичную , а затем в шестнадцатеричную СС:
 - а) **143,25**
 - б) **312,5**
2. Переведите данное число в десятичную СС:
 - а) **10110101,1**
 - б) **100100110,10101**

ОТВЕТ на задание №1

1. $143,25_{10} \longrightarrow 10001111,01_2 \longrightarrow 8F,4_{16}$

$312,5_{10} \longrightarrow 100111000,1_2 \longrightarrow 138,8_{16}$

2. $10110101,1_2 \longrightarrow 181,5_{10}$

$100100110,1011_2 \longrightarrow 294,065625_{10}$

Задание №2

1. Переведите в восьмеричную и шестнадцатеричную СС:

110010,101₂

1011010011,01₂

1101111011,01₂

101000010,0111₂

ОТВЕТ на задание № 2

- $110010,101_2 = 62,5_8 = 32, A_{16}$
- $1011010011,01_2 = 1323,2_8 = 2D3,4_{16}$
- $1101111011,01_2 = 1573,2_8 = 37B,4_{16}$
- $101000010,0111_2 = 502,34_8 = 142,7_{16}$

Задание №3

1. Сложите данные числа:

$$110011001,0011_2 + 111011101,0101_2$$

2. Выполните вычитание:

$$1101100110,01_2 - 110000010,1011_2$$

3. Выполните умножение:

$$1001111_2 \times 1000100_2$$

Ответ на задание №3

$$\begin{array}{r} 1. \quad 110\ 011\ 001,0010_2 \\ + \quad 111\ 011\ 101,0101_2 \\ \hline \end{array}$$

$$1\ 101\ 110\ 110,0111_2$$

$$\begin{array}{r} 2. \quad 1\ 101\ 100\ 110,0100_2 \\ - \quad 110\ 000\ 010,1011_2 \\ \hline \end{array}$$

$$0\ 111\ 100\ 011,1001_2$$

$$\begin{array}{r} 3. \quad 1\ 001\ 111_2 \\ \quad \quad \quad \times 1\ 000\ 100_2 \\ \hline \end{array}$$

$$1\ 010\ 011\ 111\ 100_2$$

Задание №4

1. Переведите число данное в десятичной СС в двоичную , а затем в шестнадцатеричную СС:

а) 670_{10} б) 162_{10}

2. Переведите данное число в десятичную СС:

а) 111100111_2 б) 1001011_2

ОТВЕТ на задание №4

$$\begin{array}{l} 1. \quad 670_{10} \longrightarrow 1010011110_2 \longrightarrow 29E_{16} \\ \quad 162_{10} \longrightarrow 10100010_2 \longrightarrow A2_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2. \quad 1111100111_2 \longrightarrow 999_{10} \\ \quad 1001011_2 \longrightarrow 75_{10} \end{array}$$

Восстановить неизвестные цифры, обозначенные *, определив вначале в какой системе счисления изображены числа.

$$\text{A)} \quad \begin{array}{r} + \quad 5 * 5 5 \\ \quad * 2 2 7 \\ \hline * 1 5 * 4 \end{array}$$

$$\text{Б)} \quad \begin{array}{r} - 1 5 2 6 \\ \quad * 4 2 \\ \hline \quad 6 5 4 \end{array}$$

Решение

$$\text{A)} \quad \begin{array}{r} + \quad 5 2 * 5 5 \\ \quad * 4 2 2 7 \\ \hline * 1 1 5 0 * 4 \end{array}$$

$$1) 5+7=12=1 \blacksquare 8+4$$

$$2) 5+2+1=8=1 \blacksquare 8+0$$

$$3) 0*+2+1=5 \quad *=2$$

$$4) 5+*=1 \quad 5+*=1 \blacksquare 8+1 \quad *=4$$

$$5) *=1$$

$$\text{Б)} \quad \begin{array}{r} - 1 5 2 6 \\ \quad 5 4 2 \\ \hline \quad 6 5 4 \end{array}$$

$$1) 6-2=4$$

$$2) 2+p-4=5 \quad p=7$$

$$3) 4+7-*=6 \quad *=5$$