

ТРИ ПОДХОДА К ПОСТРОЕНИЮ МНОЖЕСТВА ЦЕЛЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ (ЧАСТЬ 1)

*Л. А. Янкина, канд. пед. наук,
доцент кафедры методики начального образования*

- 
- Понятие натурального числа и нуля
 - Отношения «равно», «меньше», «больше»
 - Арифметические операции над числами
 - Законы арифметических операций над числами



Определение целого неотрицательного числа

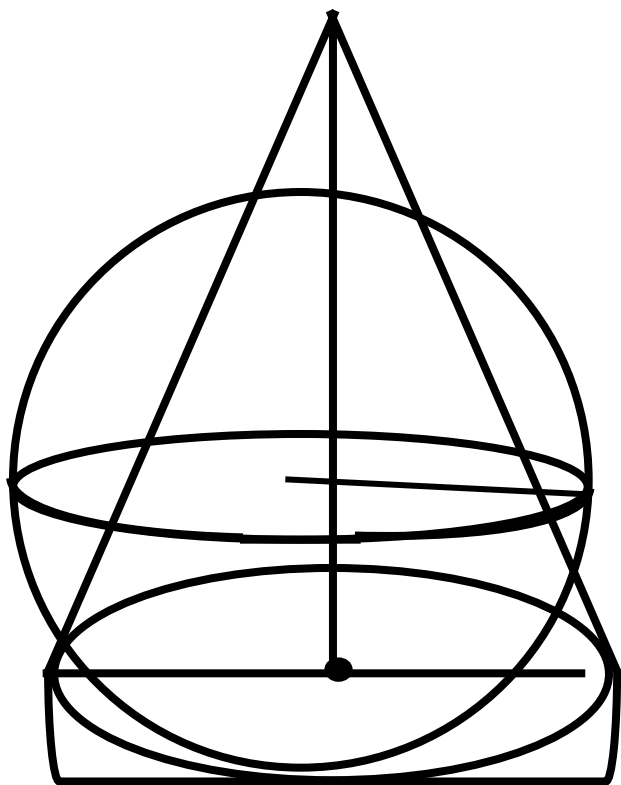
Аксиоматический подход

Аксиоматический метод в математике

**Математические понятия, как правило,
проходят длительный путь
исторического развития.**

**Первоначально они возникают в
процессе решения практических
задач.**

При этом понятия не имеют еще строгих определений. Даются расплывчатые приблизительные пояснения, указания на наглядные представления.



Следующий этап в развитии математических понятий наступает, когда место наглядных рассматриваний занимают рассуждения, отличающиеся, однако, отсутствием строгой логичности.

Возникает необходимость в уточнении понятий, установлении связей между ними, в сведении сложных понятий к более простым.

При аксиоматическом построении какой-нибудь теории поступают так:

**Выбирают некоторые объекты, изучаемые
теорией, и некоторые отношения между ними.
Эти объекты и отношения не определяются, а
принимаются за исходные и называются**

основными (неопределяемыми)

ПОНЯТИЯМИ рассматриваемой теории.

**Каждое понятие, которое не содержится в
списке основных, должно быть определено.**

Вслед за основными понятиями и отношениями формулируются основные предложения, их называют **аксиомами**, которые в данной теории принимаются без доказательства, и на их основе доказываются другие предложения данной теории – **теоремы**. В аксиомах дается описание отношений между основными понятиями, они представляют по существу неявные определения основных понятий.

Каждое предложение рассматриваемой теории, которого нет в списке аксиом, должно быть доказано на основе аксиом и ранее доказанных теорем.

Система аксиом должна быть:

- а) **непротиворечивой**, т.е. мы должны быть уверены, что делая всевозможные выводы из данной системы аксиом никогда не придем к противоречию;
- б) **независимой**, т.е. никакая аксиома не должна быть следствием остальных аксиом этой системы.

Первым опытом аксиоматического построения теории можно считать изложение геометрии Евклидом в его «Началах».

Аксиоматическое определение натурального числа

Как и все математические понятия, натуральные числа возникли из потребностей практики.

Со временем люди научились не только называть числа, но и обозначать их, а также выполнять над ними действия. Многие трудности в решении этих проблем были преодолены с созданием в Древней Индии десятичной системы записи чисел и понятия нуля.

Наука, которая изучает числа и действия над ними, получила название «**арифметика**» - от греческого **arithmos** - «**число**».

Во второй половине 19 века натуральные числа оказались фундаментом всей математической науки, от состояния которого зависела и прочность всего здания математики. Внимание ученых было обращено на построение и логическое обоснование математических теорий числа.



Аксиоматическая теория
натурального числа была
построена **Джузеппе
Пeano (1858-1932)**

В качестве основного
(неопределяемого)
отношения во множестве
N взято отношение
**«непосредственно
следовать за»**

Известными также считаются понятия
множества и другие теоретико-множественные
понятия, а также правила логики

Элемент, непосредственно следующий за элементом a , обозначается a'

Отношение «*непосредственно следовать за*» удовлетворяет следующим аксиомам:

A1. Во множестве N существует элемент, непосредственно не следующий ни за каким элементом этого множества. Называют его *единицей*

A2. Для каждого элемента a из множества N существует единственный элемент a' , непосредственно следующий за a

A3. Для каждого элемента a из множества N существует не более одного элемента, за которым непосредственно следует a

A4. Если множество **M** есть
подмножество множества **N**, и:

а) *единица* содержится в **M**;

б) из того что **a** содержится в **M**,
следует, что и **a'** содержится в **M**, то
множество **M** совпадает с
множеством **N**.

$$\text{а) } 1 \in M$$

$$\Rightarrow M = N$$

$$\text{б) } a \in M \Rightarrow a' \in M$$

Множество **N**, для элементов которого
установлено отношение
«непосредственно следовать за»,
удовлетворяющее аксиомам 1- 4,
называется **МНОЖЕСТВОМ**
натуральных чисел, а его элементы –
натуральными числами.

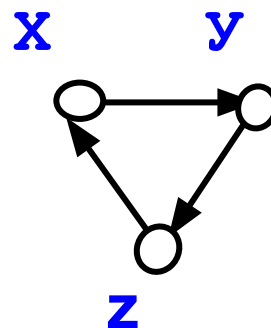
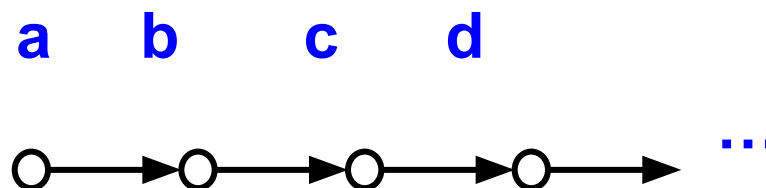
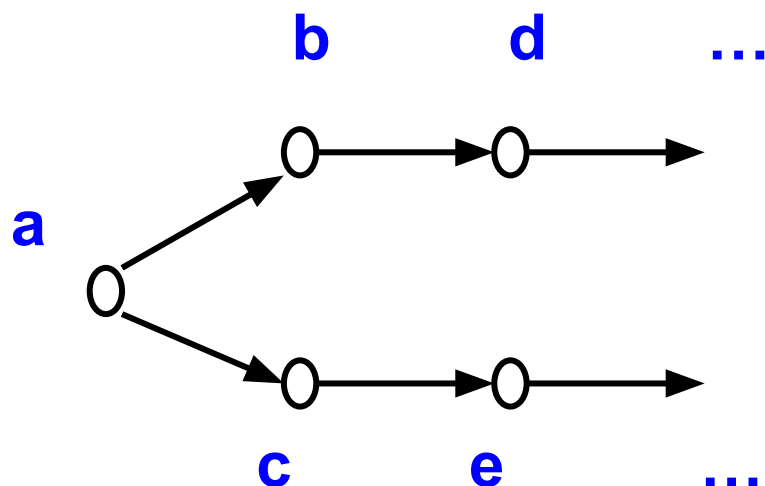
Выбирая в качестве множества N некоторое конкретное множество, на котором задано конкретное отношение «непосредственно следовать за», удовлетворяющее аксиомам 1-4, получают различные интерпретации (модели) данной системы аксиом:

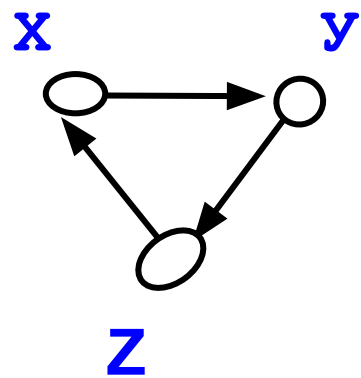
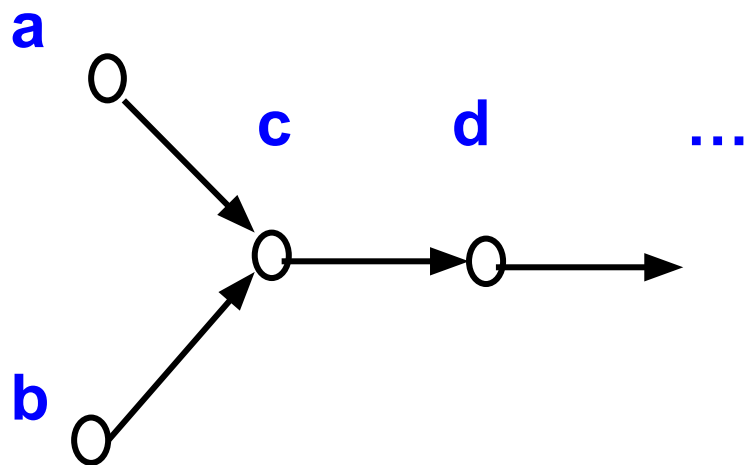
1) ряд чисел 1, 2, 3, ...

2) {O O}, {O O O}, {O O O O}, ...

Пример:

Является ли множество, изображенное на рисунке, моделью системы аксиом Пеано?





Отношение «непосредственно предшествовать»

Если натуральное число b непосредственно следует за натуральным числом a , то число a называется **непосредственно предшествующим** (или просто **предшествующим**) числу b .

Свойства отношения «непосредственно предшествовать»

1. Единица не имеет предшествующего
натурального числа

2. Каждое

натуральное число $a \neq 1$, имеет
предшествующее число b , такое, что $b' = a$

Множество целых неотрицательных чисел

Обозначают $\mathbb{Z}_0$ или $\mathbb{N}_0$

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$
$$0, 1, 2, 3, \dots$$

Множество $\mathbb{N}_0$ удовлетворяет всем аксиомам Пеано.

Те свойства отношения «непосредственно следовать за, которые отражены в аксиомах 1 – 4, изучаются в начальных классах и используются при решении задач. Уже в 1 классе при рассмотрении чисел первого десятка выясняется, как может быть получено каждое число. При этом широко используются понятия «следует», «предшествует», прибавление и вычитание 1.

Каждое новое число с самого начала выступает как продолжение ранее изученного отрезка натурального ряда чисел.

Любое натуральное число может быть получено прибавлением **1 к тому числу, которое встречается при счете перед ним, или вычитанием **1** из числа, которое идет при счете сразу после него.**

Любое число на **1 больше предшествующего.**

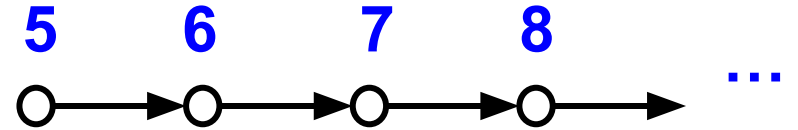
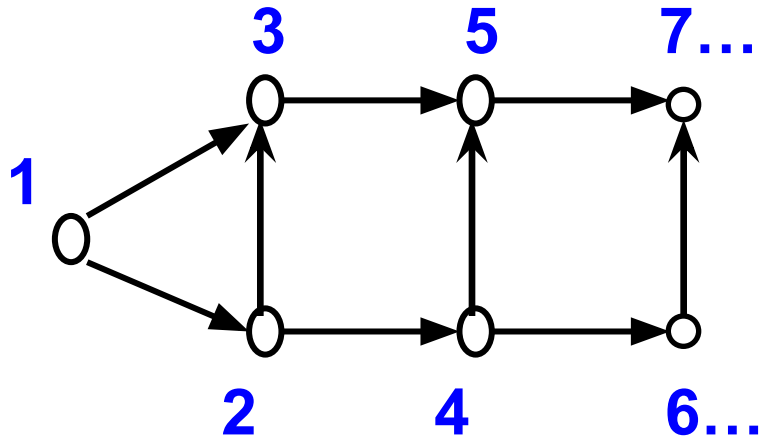
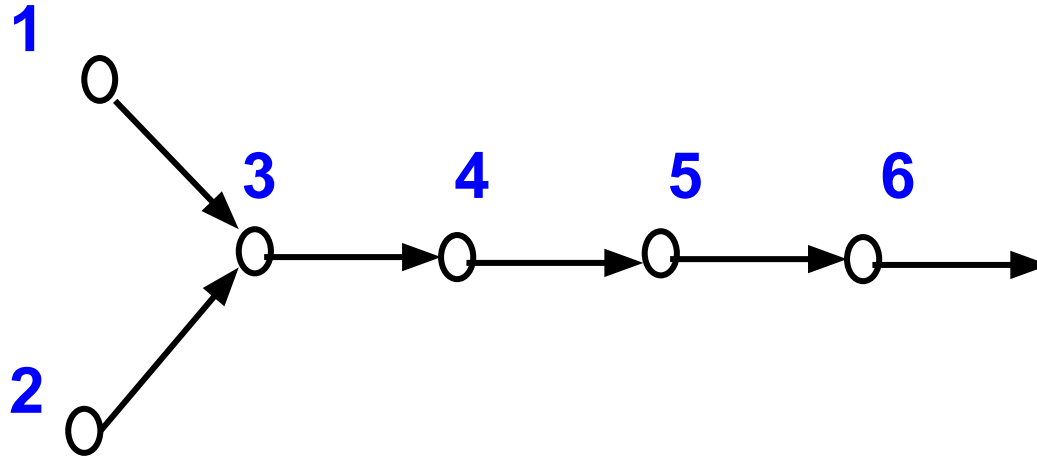
Таким образом, уже в начальных классах учащиеся убеждаются в том, что за каждым числом идет следующее и притом только одно, что натуральный ряд чисел бесконечен.

Упражнения.

1. Покажите, что множество целых неотрицательных чисел является моделью системы аксиом Пеано. Какое число выполняет при этом роль единицы?

**Можно ли считать моделью системы аксиом Пеано множество $3, 4, 5, 6, \dots$?
множество $3, 6, 9, 12, \dots$?**

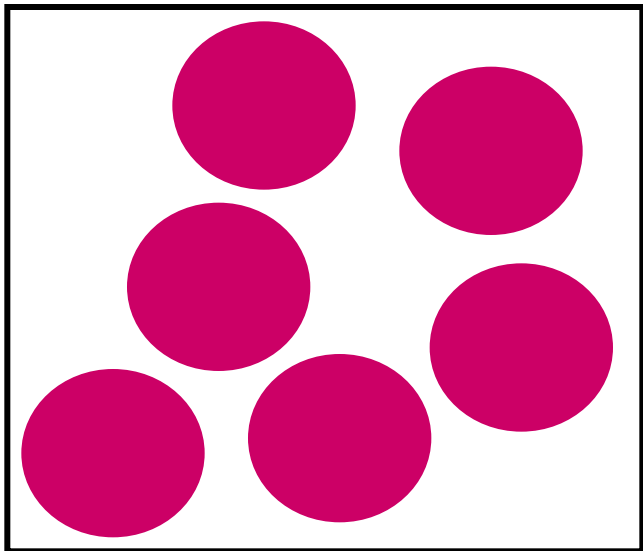
2. Установите, какие из множеств, приведенных на рисунке, являются моделями системы аксиом Пеано.

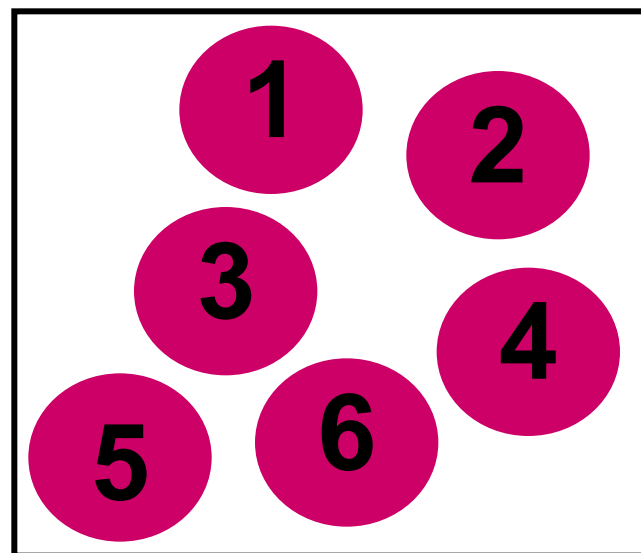


Теоретико-множественный подход

Счет

Порядковые и количественные натуральные числа



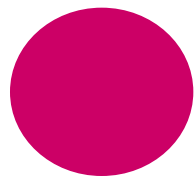


Требования, соблюдаемые при счете:

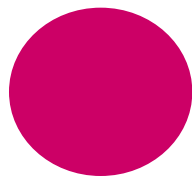
- первому отмеченному предмету ставится в соответствие число 1;**
- каждый раз отмечается предмет еще не отмеченный ранее, и ему ставится в соответствие число, следующее за последним из уже названных.**

Таким образом, каждому из сосчитанных предметов поставлено в соответствие одно число, двум разным предметам соответствуют различные числа.

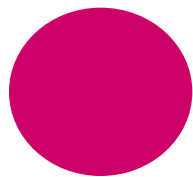
Сущность счета заключается в
установлении взаимно
однозначного соответствия между
множествами, подлежащими счету, и
некоторым отрезком натурального
ряда. Процесс счета закончится
тогда и только тогда, если
считаемое множество конечно



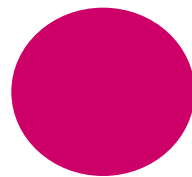
1



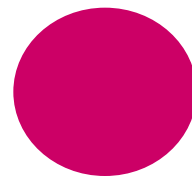
2



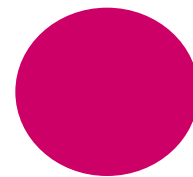
3



4



5



6

Отрезком N_a натурального ряда
называется множество натуральных
чисел, не превосходящих
натурального числа a

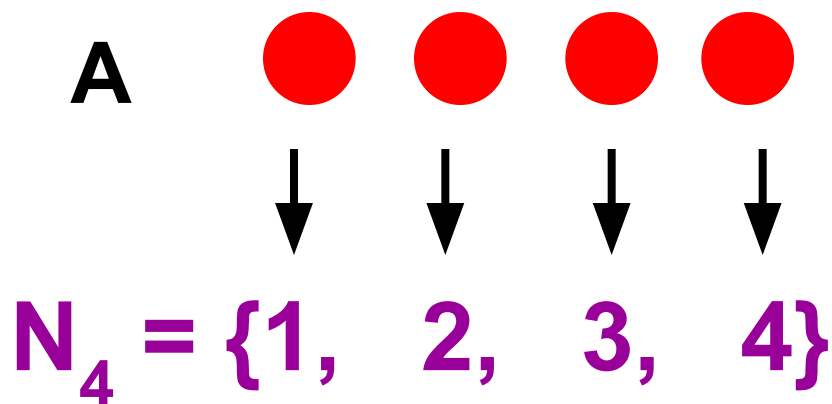
$$N_a = \{x \mid x \in N \text{ и } x \leq a\} \text{ или}$$

$$N_a = \{1, 2, 3, \dots, a\}$$

$$N_3 = \{1, 2, 3\}$$

$$N_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Множество **A** называется **конечным**, если существует взаимно однозначное отображение этого множества на некоторый отрезок **N_a** натурального ряда



Множество **A** **конечное**, если оно равномощно отрезку натурального ряда **N_a**:

$$A \sim N_a$$

Одно и то же множество A не может быть взаимно однозначно отображено на два различных отрезка натурального ряда

Множество A равномощно только одному отрезку натурального ряда N_a , и поэтому множеству A может быть поставлено в соответствие единственное число a . Это число a называют числом элементов в множестве A и пишут: $n(A) = a$ – количественное натуральное число

Пример: Множество $A = \{a, b, c\}$ можно взаимно однозначно отобразить на отрезок натурального ряда N_3 . Поэтому $n(A) = 3$

Взаимно однозначное отображение множества A на отрезок N_a можно понимать как нумерацию элементов множества A . Этот процесс нумерации называют **счетом**.

Существует много нумераций одного и того же множества:

$$a \rightarrow 1$$

$$b \rightarrow 2$$

$$c \rightarrow 3$$

$$c \rightarrow 1$$

$$a \rightarrow 2$$

$$b \rightarrow 3$$

$$b \rightarrow 1$$

$$a \rightarrow 2$$

$$c \rightarrow 3$$

$$a \rightarrow 1$$

$$c \rightarrow 2$$

$$b \rightarrow 3$$

$$c \rightarrow 1$$

$$b \rightarrow 2$$

$$a \rightarrow 3$$

$$b \rightarrow 1$$

$$c \rightarrow 2$$

$$a \rightarrow 3$$

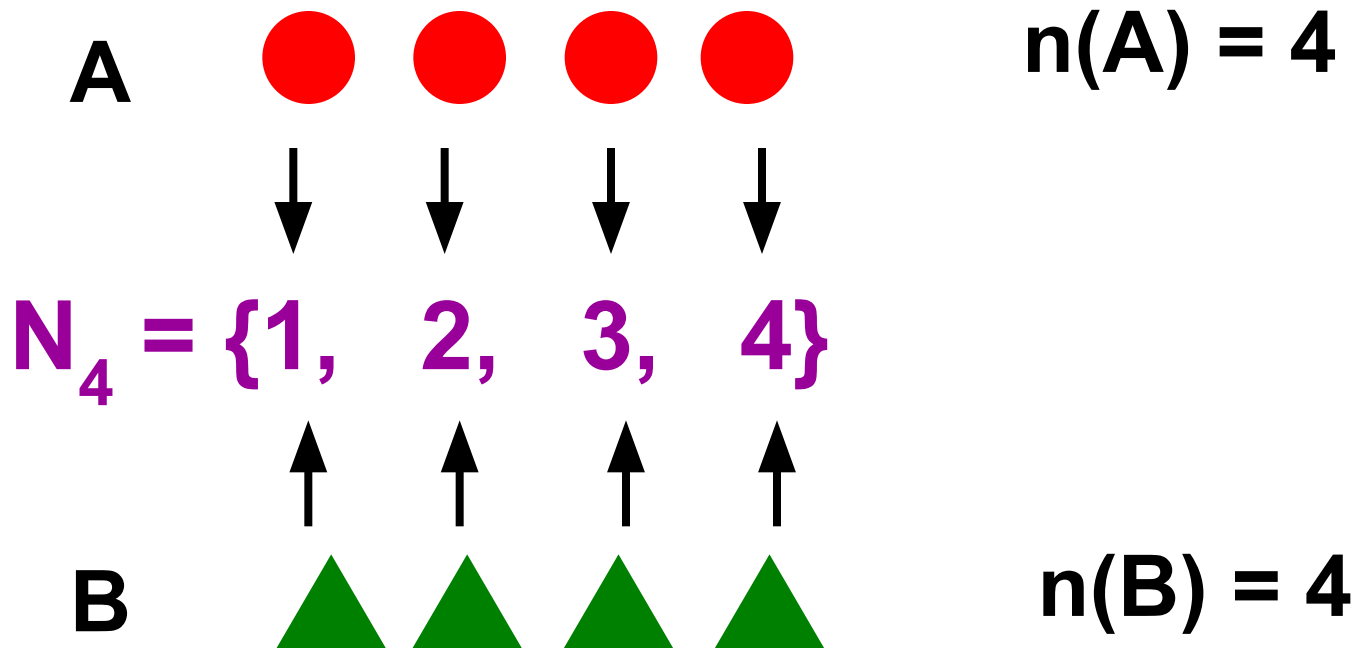
При пересчете **элементы** конечного множества **расставляются в определенном порядке**, а также устанавливается, **сколько элементов содержит множество**. В первом случае натуральное **число** представляет собой **порядковый номер** некоторого элемента и называется числом **порядковым** (*первый, второй, третий и т.д.*). Во втором случае мы имеем дело с **числом количественным** (*один, два, три и т. д.*)

Определение

С теоретико-множественных позиций натуральное число рассматривается как число элементов конечного множества

$$n(\emptyset) = 0$$

Рассмотрим множества А и В



Следующие предложения равносильны:

- Множествам A и B соответствует одно и то же число a
- Множества A и B равномощны ($A \sim B$)
- Множества A и B содержат поровну элементов
- Множества A и B можно взаимно однозначно отобразить на один и тот же отрезок натурального ряда N_a
- Множества A и B можно взаимно однозначно отобразить друг на друга

Так как одному и тому же конечному множеству может соответствовать лишь одно натуральное число **a**, то вся совокупность конечных множеств распадается на **классы равномоощных множеств**.

Каждое множество данного класса содержит по **a** элементов.

N_a принадлежит данному классу

**Количественное натуральное число
рассматривается как общее свойство
класса конечных равномощных
множеств**

Упражнения

1) Запишите все элементы множества: N_7 , N_{11} , N_{14} .

2) Какие из указанных ниже множеств являются отрезками натурального ряда:

а) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, **б)** $\{0, 1, 2, 3\}$, **в)** $\{3, 4, 5, 6, 7\}$, **г)** $\{4, 2, 1, 5, 3\}$?

3) Какими порядковыми числами задаются элементы множества: **а)** $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, **б)** элементы множества букв слова «количество»?

4) Каков теоретико-множественный смысл натурального числа 7?

5) Приведите примеры класса множеств, соответствующих натуральному числу:

а) 5, б) 10, в) 12.

6) При знакомстве с числом «2» учитель использовал различные картинки с изображением двух предметов. Можно ли так поступать при изучении других чисел? Ответ обоснуйте.

7) Прочитайте записи: $n(A) = 5$, $n(B) = 0$.

Приведите примеры множеств A и B, удовлетворяющих этим условиям.

8) Придумайте множества B и C, для которых выполняются условия:

а) $n(B) = n(C)$, $B \neq C$, б) $n(B) = n(C)$, $B = C$.

9) Докажите, что множество A – конечное, если:

- а) A – множество букв в слове «параллелограмм»;**
- б) A – множество учащихся в классе;**
- в) A – множество букв в учебнике математики.**

Натуральное число как результат измерения величин

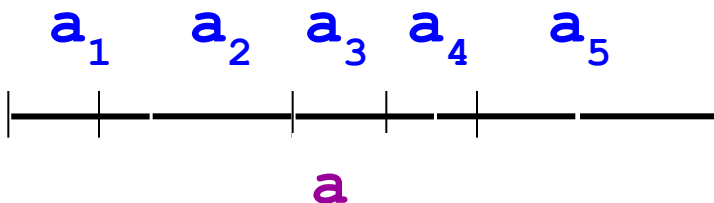
Натуральные числа используют не только для пересчета элементов конечных множеств, но и для измерения величин: длин отрезков, площадей фигур, масс тел и др.

Рассмотрим натуральное число как результат измерения длины отрезка

Считают, что отрезок a разбит на отрезки (состоит из отрезков) $a_1, a_2, \dots, a_n$, если он является их объединением и никакие два из отрезков не имеют общей внутренней точки, хотя и могут иметь общие концы. В этом случае отрезок a называют суммой отрезков

$a_1, a_2, \dots, a_n$ и пишут:

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

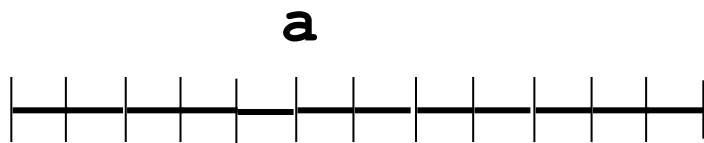


$$a = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

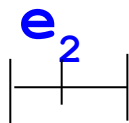
Выберем из множества отрезков некоторый отрезок **e** и назовем его единичным отрезком или единицей длины

Если отрезок **a** можно разбить на **n** отрезков, каждый из которых равен единичному отрезку **e**, то число **n** назовем мерой или значением длины отрезка a при единице длины e и будем писать: $n = m_e(a)$ или $a = ne$.

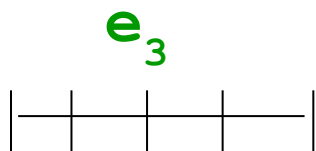
Говорят также, что отрезок **a** кратен отрезку **e**



$$m_{e_1}(a) = 12 \text{ или } a = 12 e_1$$



$$m_{e_2}(a) = 6 \text{ или } a = 6 e_2$$



$$m_{e_3}(a) = 3 \text{ или } a = 3 e_3$$

**При переходе к другой единице длины
мера отрезка меняется, хотя сам
отрезок остается неизменным**

Натуральное число как мера
отрезка **a** показывает, из
скольких выбранных единичных
отрезков **e** состоит отрезок **a**

При выбранной единице длины **e** для
отрезка **a** это число единственное

Три подхода к понятию числа

Аксиоматический

Теоретико-
множественный

Число – мера
величины

Натуральное число –
это элемент
множества $\mathbb{N}$, на
котором задано
отношение
«непосредственно
следовать за»,
удовлетворяющее 4-
м аксиомам Пеано

Натуральное число –
количество
элементов
конечного
множества

Натуральное
число –
количество
единичных
отрезков,
укладывающихся
в измеряемом
отрезке



**Спасибо
за внимание !**