

Содержание

1. Определители
2. Элементы теории матриц
3. Системы линейных уравнений
4. Элементы векторной алгебры
5. Прямая на плоскости и плоскости

Определители

- Рассмотрим таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ – ЭТО

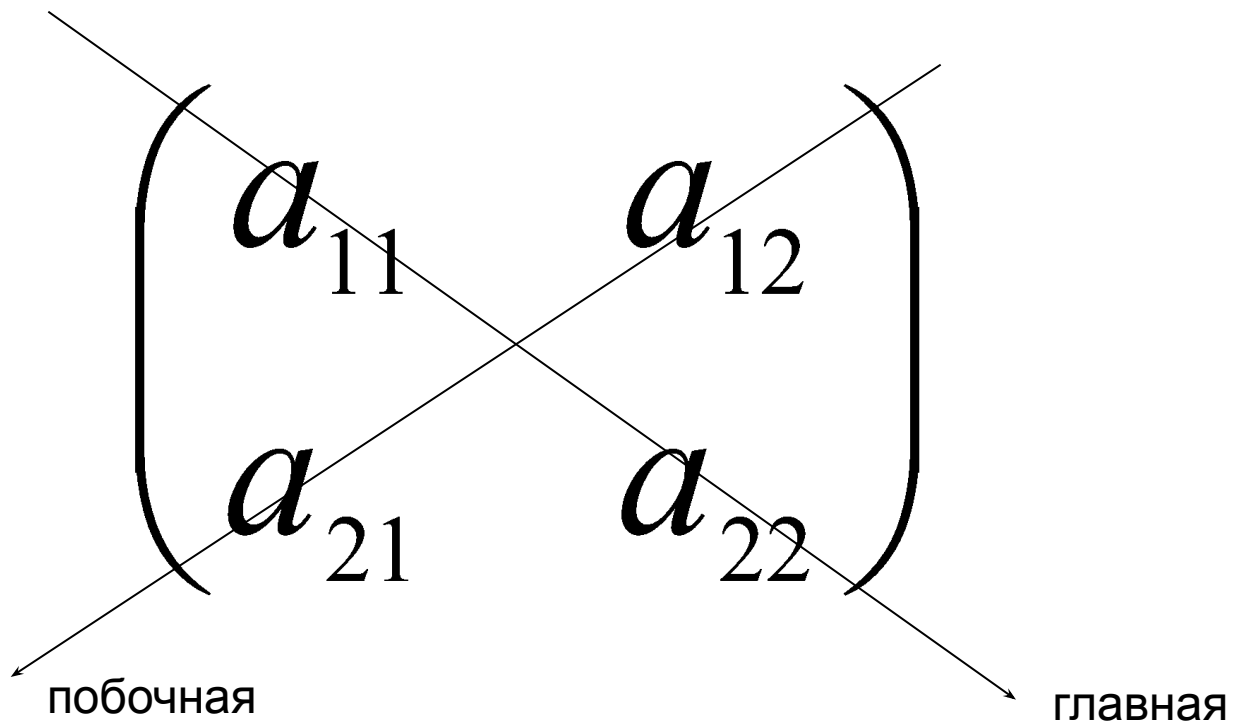
элементы таблицы.

$$a_{ij}$$

i – номер строки;

j – номер столбца

- Число строк – порядок таблицы.
- Главная диагональ – диагональ идущая с левого верхнего угла в правый нижний.
- Побочная диагональ – диагональ идущая с верхнего правого угла в левый нижний.



- Число

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

называется определителем 2-го

порядка .

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

Определители третьего порядка

- Рассмотрим таблицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Число

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

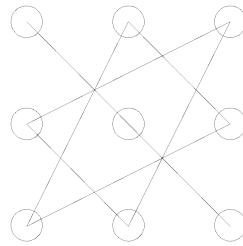
называется определителем третьего
порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
 - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

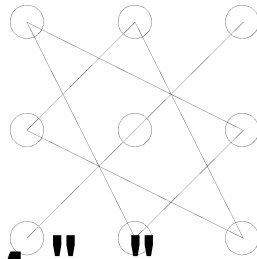
Методы вычисления определителей третьего порядка

Правило треугольника

Три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников:



берутся со знаком "+", а три произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух других треугольников:



берутся со знаком "-".

Разложение по элементам какой-либо строки (столбца)

Минор

Опр. Минором элемента определителя 3-го порядка называется определитель 2-го порядка, получающийся из данного определителя вычёркиванием строки и столбца, в которых расположен элемент.

Обозначение минора

Минор элемента , стоящего на пересечении i -й строки и j -го столбца определителя, обозначают

$$M_{ij}$$

Алгебраическое дополнение

Опр. Алгебраическим дополнением элемента определителя 3-го порядка называется минор этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$ в степени k , где

$$k = i + j.$$

$$A_{ij} = (-1)^k M_{ij}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Теорема разложения

Определитель 3-го порядка равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на их алгебраические дополнения.

Таким образом, имеет место шесть разложений:

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13},$$

$$\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23},$$

$$\Delta = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33},$$

$$\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31},$$

$$\Delta = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32},$$

$$\Delta = a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}.$$

Свойства определителей

1. Определитель не меняет своего значения при замене каждой строки соответствующим столбцом.

2. Определитель изменит знак, если поменять местами любые две строки или столбца.

3. Общий множитель элементов
какого-либо строки (столбца) определителя
можно выносить за знак определителя.

4. Определитель равен нулю, если он
имеет два одинаковых столбца или две
одинаковые строки.

5. Определитель равен нулю, если элементы
какой-либо строки (столбца) все равны нулю.

6. Значение определителя не изменится, если к элементам строки или столбца прибавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно число.

Определители высших порядков

$$\begin{aligned}
\Delta = & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \\
& + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

- С помощью свойства 6 добиваются того, чтобы в некоторой строке или в некотором столбце все элементы, кроме одного, были равны нулю.
- Затем раскладывают определитель по элементам этой строки или столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \end{matrix} =$$

$$= \left| \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= 2 \cdot (-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \end{matrix} =$$

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2(6 + 8) = 28 \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{+} \\
 \text{+}
 \end{array} \\
 \left| \begin{array}{ccccc}
 3 & -1 & 2 & -1 & 1 \\
 5 & 1 & -2 & 1 & 2 \\
 9 & -1 & 1 & 3 & 4 \\
 3 & 0 & 6 & -1 & 3 \\
 5 & 2 & 3 & -2 & 1
 \end{array} \right| = \\
 \begin{array}{c}
 \text{+} \\
 \text{+}
 \end{array} \\
 \begin{array}{c}
 (-2) \\
 (-3)
 \end{array}
 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} \\ -1 & 3 & -6 & 3 & 2 \\ -3 & 3 & -7 & 7 & 4 \\ -6 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+5} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -7 & 7 \\ -6 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -3 & 1 & -7 & 7 \\ -6 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & -6 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ -5 & 0 & 6 & -1 \\ 3 & 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -5 & 6 & -1 \\ 3 & 7 & -4 \end{vmatrix} \begin{array}{l} (-5) \cdot 3 \\ + \\ 2 \\ + \\ 2 \end{array} =$$

$$= -3 \cdot \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 0 & 17 & -22 \\ 0 & 11 & 4 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-2) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \frac{1}{4} \cdot \begin{vmatrix} 17 & -22 \\ 11 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot (68 + 242) = \frac{1860}{4} = 465$$

Метод приведения к треугольному виду

Метод приведения к треугольному виду заключается в таком преобразовании данного определителя, когда все элементы его, лежащие над (под) главной диагональю, становятся равными нулю.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{44}$$