СКАЖИ МНЕ –И Я ЗАБУДУ,
ПОКАЖИ МНЕ –И Я ЗАПОМНЮ,
ВОВЛЕКИ МЕНЯ – И Я НАУЧУСЬ.

КОНФУЦИЙ

Теория вероятностей – это раздел математики, изучающий *вероятностные закономерности* массовых однородных *случайных событий*.

- **Опыт** (испытание) – совокупность условий, при которых рассматривается появление случайного события.
- **Исход** - это результат опыта (испытания).
- **Событие** – это ожидаемый результат опыта (испытания).

СОБЫТИЯ

Достоверные

Случайные

Невозможные

ЗАДАНИЕ 1.

Для каждого из следующих опытов определить какие события являются достоверными, случайными, невозможными.

Опыт 1. В группе 25 студентов, есть юноши и есть девушки.

События:

a) случайным образом выбранный студент – девушка;
b) у двоих студентов день рождения 31 февраля;
c) всем студентам группы больше 13 лет.

Опыт 2. При бросании трех игральных костей.

События:

a) сумма выпавших на трех костях очков меньше 15;
b) на первой кости выпало 2 очка, на второй – 3 очка, на третьей – 6 очков;
c) сумма выпавших на трех костях очков равна 19.


равновозможные
Не равновозможные
СОБЫТ
ИЯ


СОБЫТИЯ
СОВМЕСТНЫЕ
НЕСОВМЕСТНЫЕ
ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ

ЗАДАНИЕ 2.

Найти пары совместных и несовместных событий, связанных с однократным бросанием игральной кости.

1) выпало 3 очка,
2) выпало нечетное число очков,
3) выпало менее 4 очков,
4) выпало 6 очков,
5) выпало четное число очков,
6) выпало более 4 очков.

ПОЛНАЯ ГРУППА СОБЫТИЙ

Совокупность событий A_1, A_2, . . . ,A_n образуют полную группу событий , если они попарно несовместны и появление одного и только одного из них является достоверным событием.

<u>Например:</u> *При подбрасывании игральной кости полная группа событий состоит из сл. событий:*

A_1 - «выпадение 1 очка», A_2 – «выпадение 2 очков», A_3 – «выпадение 3 очков», A_4 – «выпадение 4 очков», A_5 – «выпадение 5 очков», A_6 – «выпадение 6 очков».

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЯ

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов опыта, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных элементарных исходов опыта:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \text{ где}$$

A – событие,

m - число благоприятствующих исходов опыта,

n - число всех равновозможных элементарных исходов опыта,

P(A) - вероятность наступления события A.

СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОБЫТИЯ

1. Если A – событие, то $0 \le P(A) \le 1$.
2. Если A – достоверное событие, то P(A) = 1.
3. Если A – невозможное событие, то P(A) = 0.
4. Если A – случайное событие, то

   $0 < P(A) < 1$.

5. Если A и $\bar{A}$ - противоположные события, то

   $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

6. Если $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ – полная группа событий, то

   $$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n) = 1$$

ЗАДАЧА 1.

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) не чёрным.

Дано:	Решение:
A – «Наугад извлеченный шар окажется белым»; $m_A = 15$; B – «Наугад извлеченный шар окажется не черным»; $m_B = 15+5 = 20$; $n = 30$.	а) $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$. б) $P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$. Ответ: $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2}{3}$.
а) $P(A) = ?$ б) $P(B) = ?$	

События А и В называются независимыми, если появление события В не оказывает влияния на появление события А, а появление события А не оказывает влияния на появление события В.

ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕРОЯТНОСТЯМИ

Сложение вероятностей несовместных событий	наступит или А, или В	$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
Умножение вероятностей несовместных событий	наступит и А, и В	$P(AB) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
Сложение вероятностей совместных независимых событий	наступит или А, или В, или А и В	$P(A+B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

ЗАДАЧА 2.

На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено 1 бригадой, 15 – 2бригадой и 10 – 3 бригадой. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная 2 или 3 бригадой.

Дано:

A – «На сборку поступила деталь, изготовленная 2 бригадой»;

B – «На сборку поступила деталь, изготовленная 3 бригадой»;

$m_A = 15$;

$m_B = 10$;

$n = 50$.

$P(A + B) = ?$

Решение:

$$P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$$

$$P(B) = \frac{m_B}{n} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) =$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $P(A + B) = 0,5$

ЗАДАЧА 3.

Прибор, работающий в течении времени *t*, состоит из 3 узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени *t* отказать (выйти из строя). Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время *t* вероятность безотказной работы 1 узла = 0,8, 2 узла = 0,9, 3 узла = 0,7. Найти надежность прибора в целом.

Дано:	Решение:
A – «Безотказная работа прибора»; A_1 – «Безотказная работа 1 узла», $P(A_1) = 0,8$; A_2 – «Безотказная работа 2 узла», $P(A_2) = 0,9$; A_3 – «Безотказная работа 3 узла», $P(A_3) = 0,7$.	$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) =$ $= 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$ Ответ: $P(A) = 0,504$.
$P(A) = ?$	

ЗАДАЧА 4.

Вероятность попадания в мишень для 1 стрелка 0,85, а для 2 стрелка 0,8. Стрелки независимо друг от друга произвели по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок?

Дано:	Решение:
A – «Попадание 1 стрелка», $P(A) = 0,85$; B – «Попадание 2 стрелка», $P(B) = 0,8$; C – «Попадание хотя бы одного стрелка».	$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$ $= 0,85 + 0,8 - 0,85 \cdot 0,8 =$ $= 0,97$ Ответ: $P(C) = 0,97$.
$P(C) = ?$	

ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Блез Паскаль
(19 июня1623г. – 19 августа 1662г)

французский математик, физик, философ, один из основателей математического анализа, теории вероятностей и проектной геометрии

ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пьер де Ферма
(17 августа 1601 — 12 января 1665)

французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе.

ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Христиан Гюйгенс
(14 апреля 1629, Гаага —
8 июля 1695, Гаага)

нидерландский механик, физик, математик, астроном и изобретатель. Один из основоположников теоретической механики и теории вероятностей. Первый иностранный член Лондонского королевского общества (1663), член Французской академии наук с момента её основания (1666) и её первый президент (1666—1681)

ОСНОВОПОЛОЖНИКИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Якоб Бернулли
(6 января 1655, Базель, —
16 августа 1705, там же)

швейцарский математик. Один из основателей теории вероятностей и математического анализа. Старший брат Иоганна Бернулли, совместно с ним положил начало вариационному исчислению. Доказал частный случай закона больших чисел — теорему Бернулли. Профессор математики Базельского университета (с 1687 года) Иностранный член Парижской академии наук (1699) и Берлинской академии наук

ДЛЯ ЮНОШЕЙ ВАРИАНТ №1, ДЛЯ ДЕВУШЕК ВАРИАНТ №2САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
№1. Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.	**№1.** Аптека получила лекарства в коробках с трех оптовых складов: пять с 1-го, три со 2-го, шесть с 3-го. Случайным образом выбрана коробка для продажи. Какова вероятность того, что это будет коробка со второго или третьего склада.
№2. В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут белыми.	**№2.** В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: все три шара будут черными.
№3. Два стрелка сделали по одному выстрелу в мишень. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,8, для второго – 0,6. Найти вероятность того, что хотя бы один из стрелков попадёт в мишень.	**№3.** Груз в пункт назначения можно доставить речным транспортом или автотранспортом. Вероятность того, что груз будет доставлен по реке, равна 0,7, автотранспортом – 0,5. Найти вероятность того, что груз будет доставлен хотя бы одним видом транспорта.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задача 1. Записать два испытания и для каждого из них подобрать достоверное, невозможное и случайное событие.

Задача 2. Деталь проходит две операции обработки. Вероятность появления брака при первой операции равна 0,02, при второй – 0,03. Найдите вероятность получения детали без брака после двух операций, предполагая, что события получения брака на отдельных операциях являются независимыми.

ДОСТОВЕРНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдет в данном опыте.

Например:

Опыт: *извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.*

Достоверное событие: *«извлеченный, на удачу, мяч окажется красным».*

НЕВОЗМОЖНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно не может произойти в данном опыте.

Например:

Опыт: *извлечение мяча из коробки, в которой находятся только красные мячи.*

Невозможное событие: *«извлеченный, на удачу, мяч окажется зеленым».*

СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ

Событие называется **случайным** в данном опыте, если оно может произойти, а может и не произойти в данном опыте.

Например:

Опыт: *сдача студентом экзамена по математике.*

Случайное событие: *«студент на экзамене получит оценку отлично».*

РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

- События называются равновозможными, если нет основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

<u>Например:</u>

- ✔ *выпадение орла или решки при броске монеты;*
- ✔ *выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков при броске игрального кубика;*
- ✔ *извлечение карты трефовой, пиковой, бубновой или червовой масти из колоды карт.*

- *При этом предполагается, что монета и кубик однородны и имеют геометрически правильную форму, а колода хорошо перемешана и «идеальна» с точки зрения неразличимости рубашек карт.*

НЕ РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

События называются не равновозможными, если есть основания полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

*Например, если у монеты или кубика смещён **центр тяжести**, то гораздо чаще будут выпадать вполне определённые грани.*

СОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называют **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого.

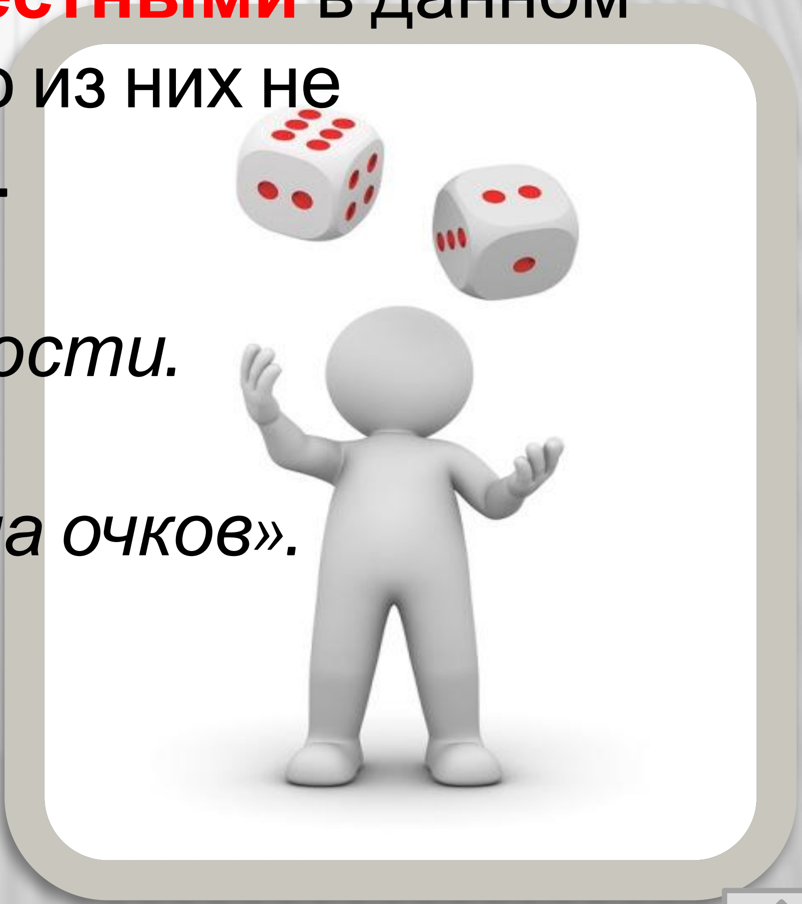
Например:

Опыт: *бросание игральной кости.*

Совместные события:

A. *«Выпадение четного числа очков».*

B. *«Выпадение 4 очков».*



НЕСОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ

- Два события называются **несовместными** в данном опыте, если они не могут появиться вместе в одном и том же опыте.

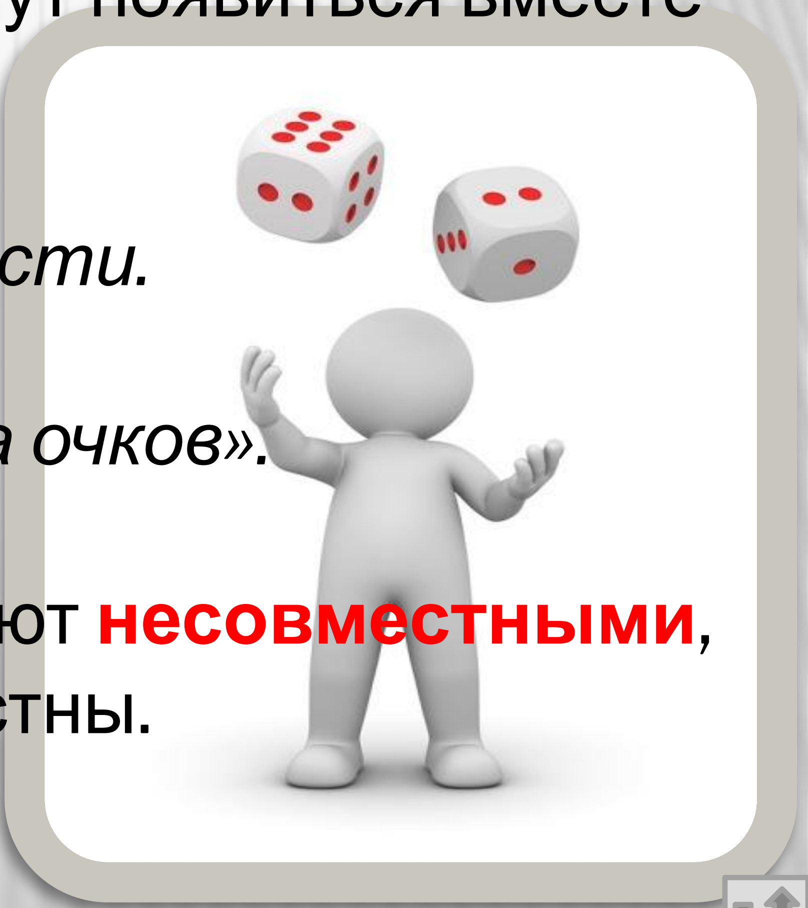
Например:

Опыт: *бросание игральной кости.*

Несовместные события:

1. *«Выпадение четного числа очков».*
2. *«Выпадение 3 очков».*

- Несколько событий называют **несовместными**, если они попарно несовместны.



ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно не появлению другого (это простейший пример несовместных событий).

Например:

<u>Опыт:</u> покупка лотерейного билета

<u>Противоположные события:</u>

А – «выпадение выигрыша на купленный билет».

Ā - «не выпадение выигрыша на тот же билет»

ЗАДАЧА 2.

На складе имеется 50 деталей, изготовленных тремя бригадами. Из них 25 изготовлено 1 бригадой, 15 – 2бригадой и 10 – 3 бригадой. Найти вероятность того, что на сборку поступила деталь, изготовленная 2 или 3 бригадой.

<table>
<tr>
<td>Дано:
A – «На сборку поступила деталь, изготовленная 2 бригадой»;
B – «На сборку поступила деталь, изготовленная 3 бригадой»;
$m_A = 15$;
$m_B = 10$;
$n = 50$.</td>
<td rowspan="2">Решение:
$\text{[illegible]} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}$
$\text{[illegible]} = \frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} = \frac{10}{50} = \frac{1}{5}$
$\text{[illegible]} + \text{[illegible]} = \text{[illegible]} + \text{[illegible]} =$
$= \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
Ответ: $P(A + B) = 0,5$</td>
</tr>
<tr>
<td>$P(A + B) = ?$</td>
</tr>
</table>

ЗАДАЧА 3.

Прибор, работающий в течении времени *t*, состоит из 3 узлов, каждый из которых, независимо от других, может в течение времени *t* отказать (выйти из строя). Отказ хотя бы одного узла приводит к отказу прибора в целом. За время *t* вероятность безотказной работы 1 узла = 0,8, 2 узла = 0,9, 3 узла = 0,7. Найти надежность прибора в целом.

Дано: A – «Безотказная работа прибора»; A_1 – «Безотказная работа 1 узла», $P(A_1) = 0{,}8$; A_2 – «Безотказная работа 2 узла», $P(A_2) = 0{,}9$; A_3 – «Безотказная работа 3 узла», $P(A_3) = 0{,}7$.	Решение: $P(A) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) =$ $= 0{,}8\cdot 0{,}9\cdot 0{,}7 = 0{,}504$ Ответ: $P(A) = 0{,}504$.
$P(A) = ?$	

ЗАДАЧА 4.

Вероятность попадания в мишень для 1 стрелка 0,85, а для 2 стрелка 0,8. Стрелки независимо друг от друга произвели по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один стрелок?

Дано:	Решение:
A – «Попадание 1 стрелка», P(A) = 0,85; B – «Попадание 2 стрелка», P(B) = 0,8; C – «Попадание хотя бы одного стрелка».	$P(C) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) =$ $= 0{,}85 + 0{,}8 - 0{,}85 \cdot 0{,}8 =$ $= 0{,}97$ Ответ: P(C) = 0,97.
P(C) = ?	