

Функции и их графики

Задание №23

1. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

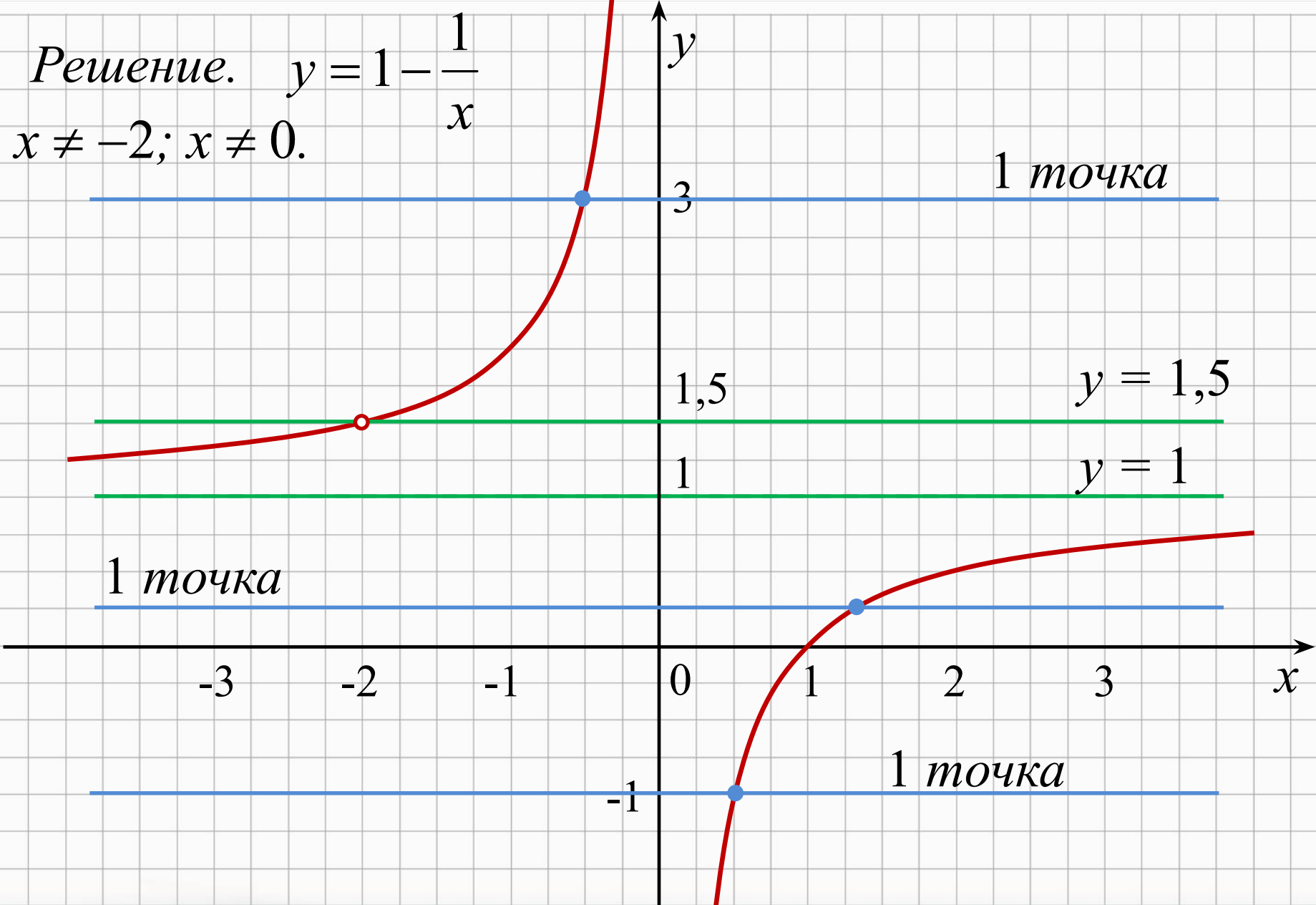
Решение.

$$y = 1 - \frac{x+2}{x^2+2x}$$

$$1 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 1 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 1 - \frac{1}{x}$$

при условии $x \neq 0$ и $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ и $x \neq -2$.

$$D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty).$$



Ответ: $m = 1; m = 1,5.$

2. Постройте график функции $y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$
и определите, при каких значениях t прямая $y = t$
имеет с графиком две общие точки.

Решение.

$$y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$$

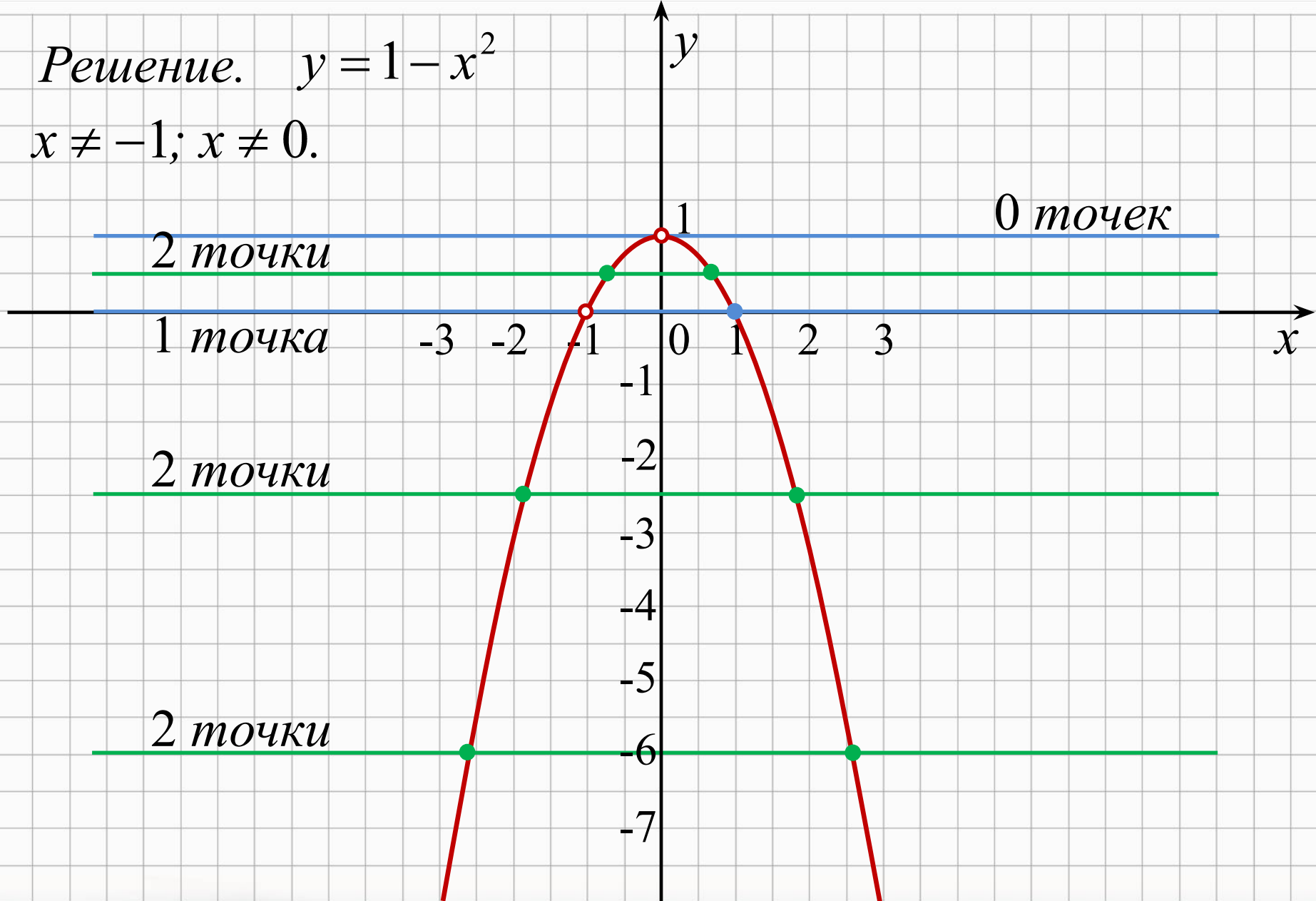
$$1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2} = 1 - \frac{x^3(x+1)}{x(x+1)} = 1 - x^2$$

при условии $x \neq 0$ и $x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ и $x \neq -1$.

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Решение. $y = 1 - x^2$

$x \neq -1; x \neq 0.$



Ответ: $m < 0; 0 < m < 1.$

3. Постройте график функции $y = \frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$y = \frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4}$$

$$\frac{(x+5)(x^2+5x+4)}{x+4} = \frac{(x+5)(x+4)(x+1)}{x+4} = (x+5)(x+1) =$$

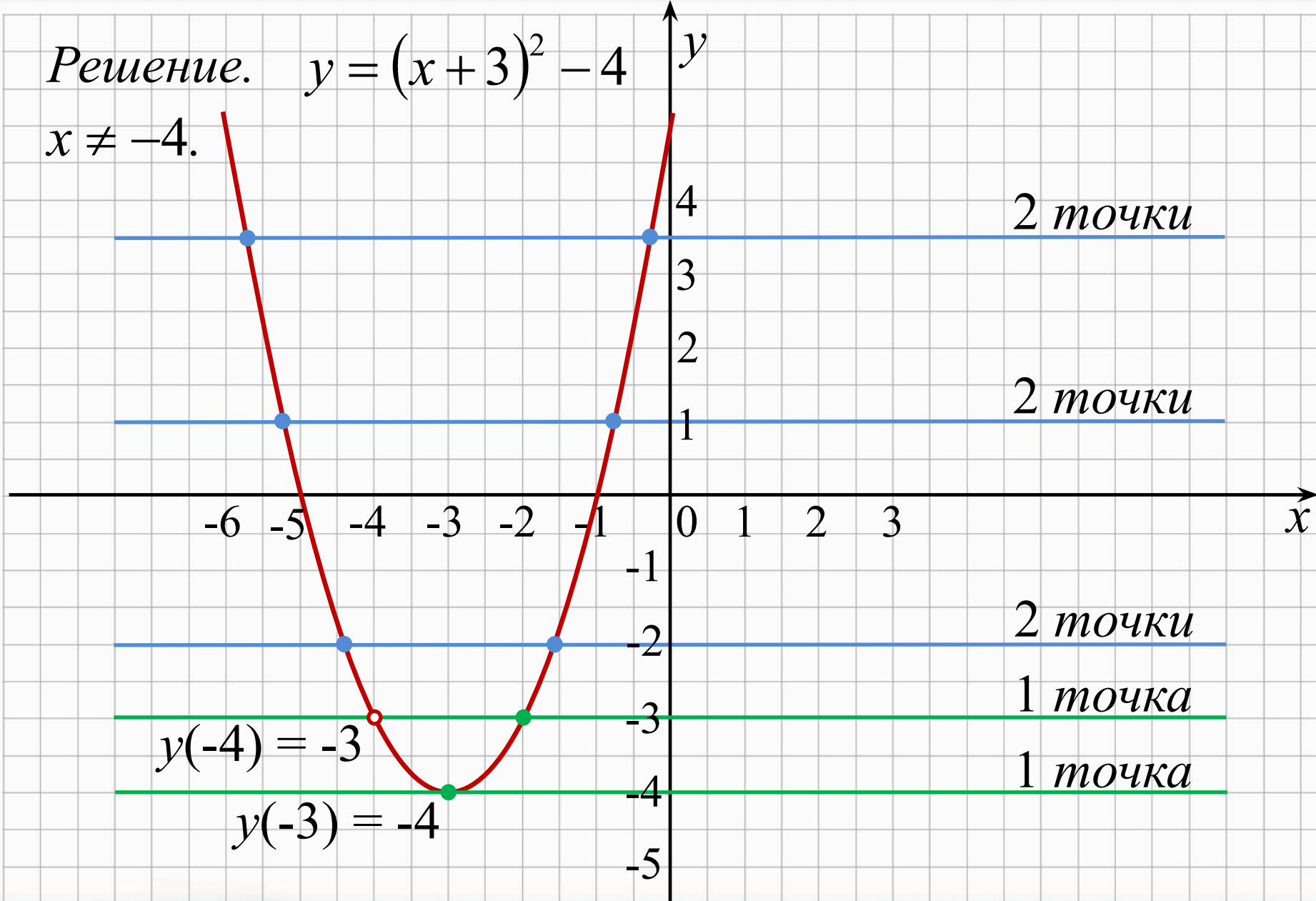
$$= x^2 + 6x + 5 = (x+3)^2 - 4$$

при условии $x+4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -4$.

$$D(y) = (-\infty; -4) \cup (-4; +\infty).$$

Решение. $y = (x + 3)^2 - 4$

$x \neq -4$.



Ответ: $m = -4$; $m = -3$.

4. Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

$$y = |x^2 - x - 2|$$

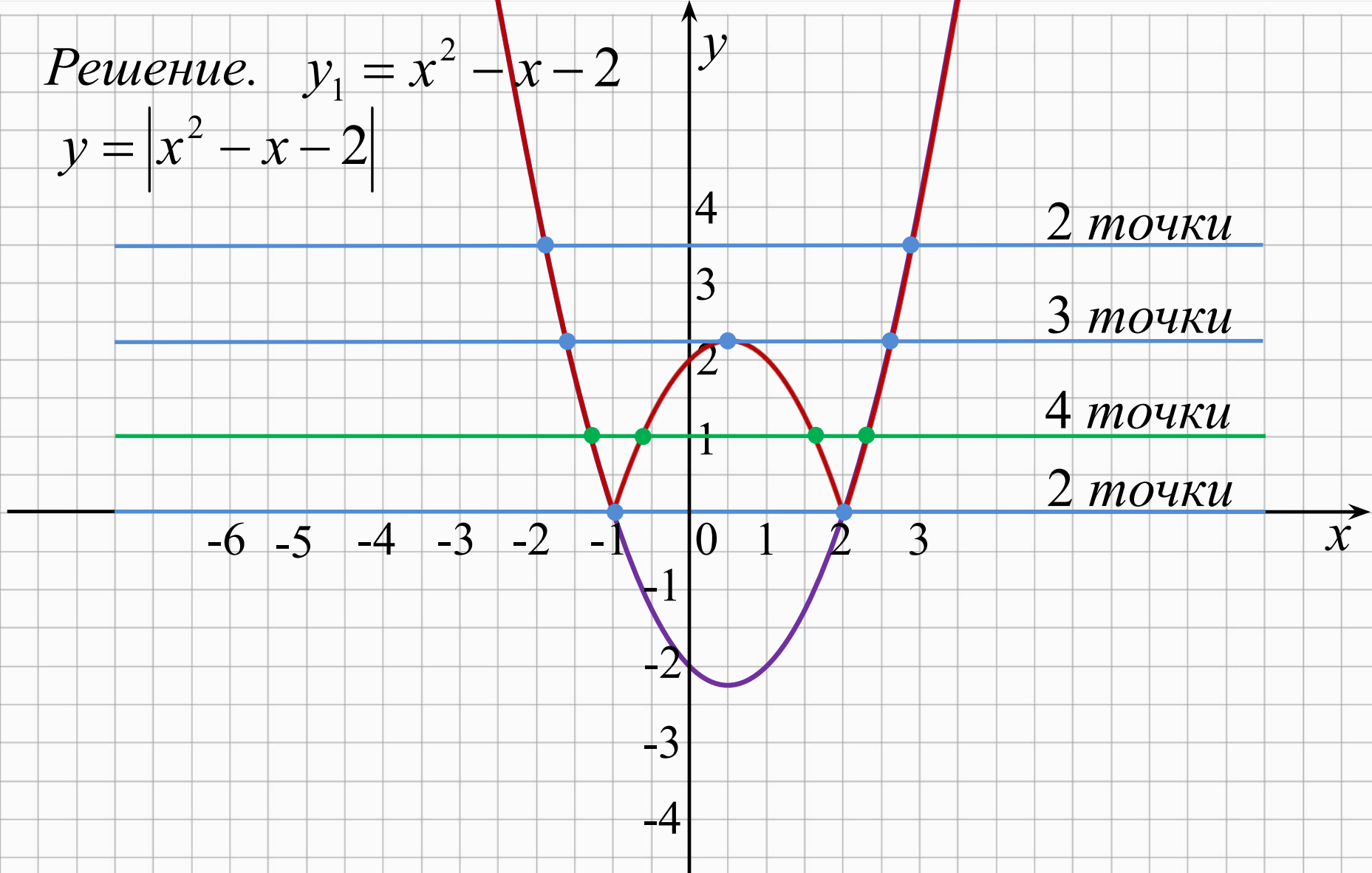
$$y_1 = x^2 - x - 2$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{2}; \quad y_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = -2\frac{1}{4}.$$

x	0	1	-1	2	3	-2
y	-2	-2	0	0	4	4

Решение. $y_1 = x^2 - x - 2$

$$y = |x^2 - x - 2|$$



Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 при $0 < t < 2,25$.

5. Постройте график функции $y = x^2 - 6|x| + 8$

Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

$$y = x^2 - 6|x| + 8 \Leftrightarrow y = |x|^2 - 6|x| + 8, \text{ т.к. } |x|^2 = x^2$$

$$y_1 = x^2 - 6x + 8$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 3; \quad y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1.$$

x	0	6	1	5	2	4
y	8	8	3	3	0	0

Решение. $y_1 = x^2 - 6x + 8$

$$y = |x|^2 - 6|x| + 8$$

2 точки

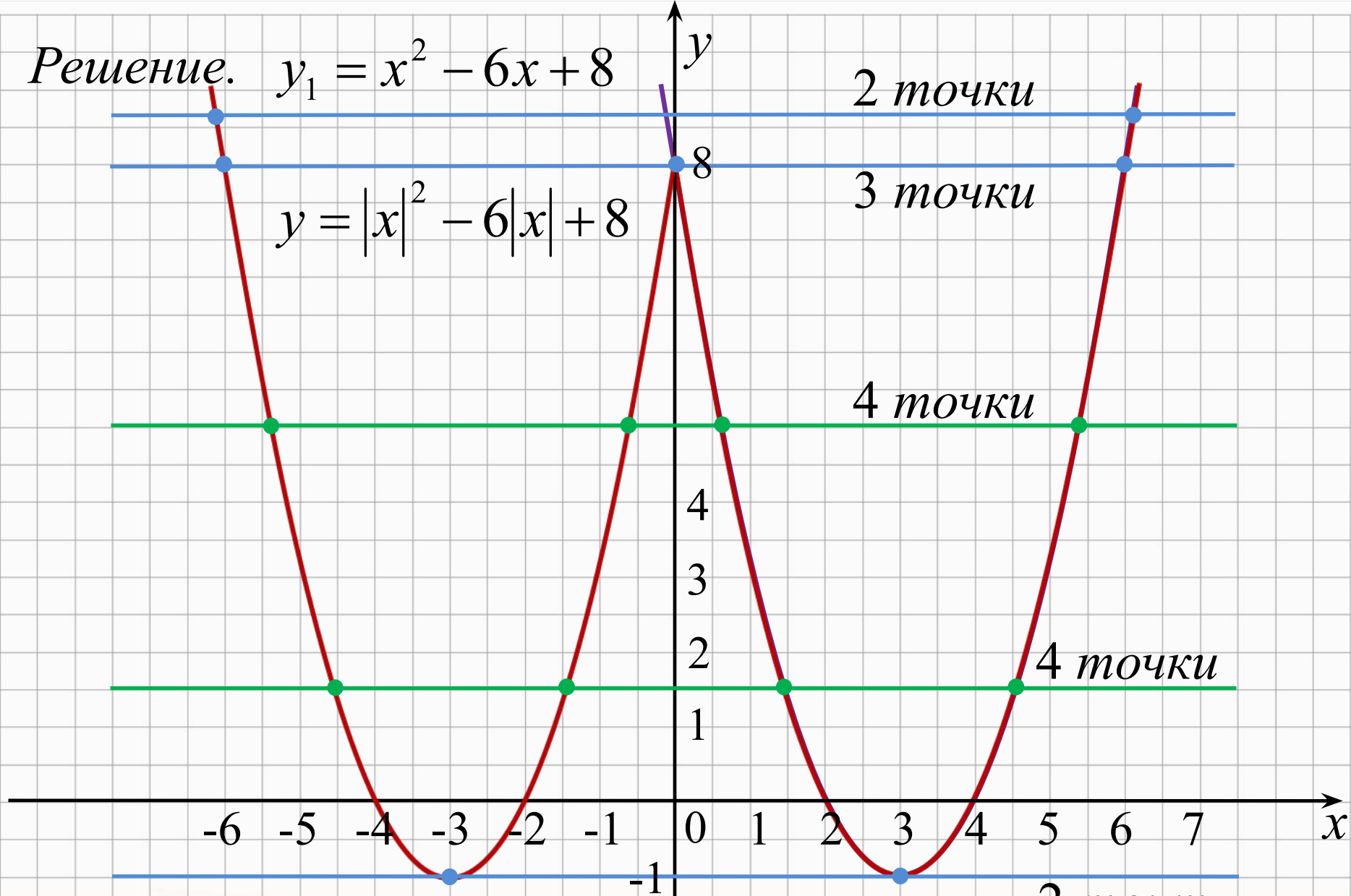
3 точки

4 точки

4 точки

0 точки

Ответ: наибольшее число точек пересечения равно 4 при $-1 < t < 8$.



6. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\frac{(x^2 - x - 6)(x^2 - 4x - 5)}{x^2 - 2x - 3} = \frac{(x-3)(x+2)(x+1)(x-5)}{(x+1)(x-3)} =$$

$$= (x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10 = (x-1,5)^2 - 12,25.$$

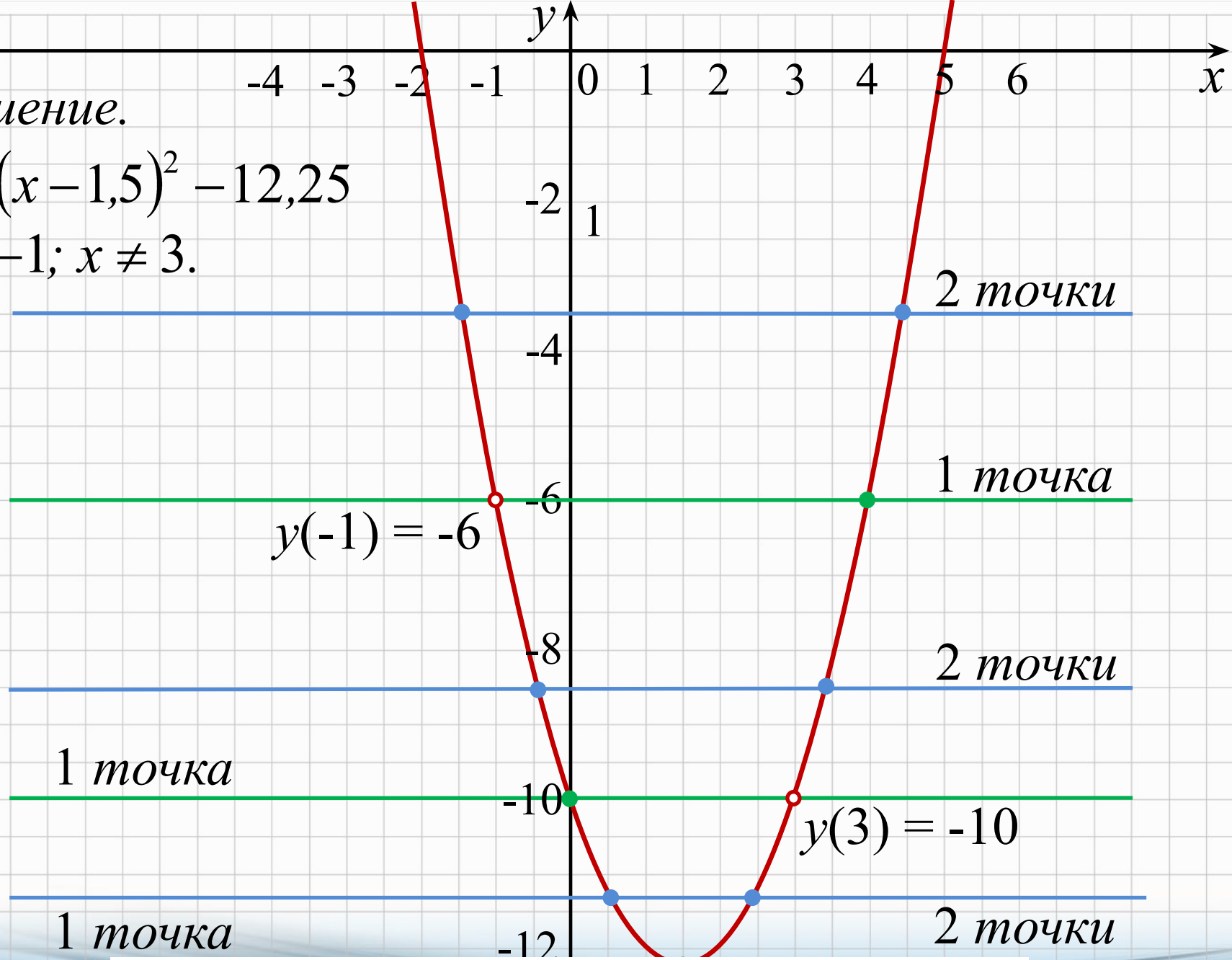
при условии $x+1 \neq 0$, $x-3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ и $x \neq 3$.

$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty).$$

Решение.

$$y = (x - 1,5)^2 - 12,25$$

$$x \neq -1; x \neq 3.$$



Ответ: $m = -12,25$; $m = -10$; $m = -6$.

7. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$
и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение.

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 6, & \text{если } x \geq 1, \\ 3x, & \text{если } x < 1 \end{cases}$$

$$y_1 = x^2 - 4x + 6$$

$$y_2 = 3x$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = 2;$$

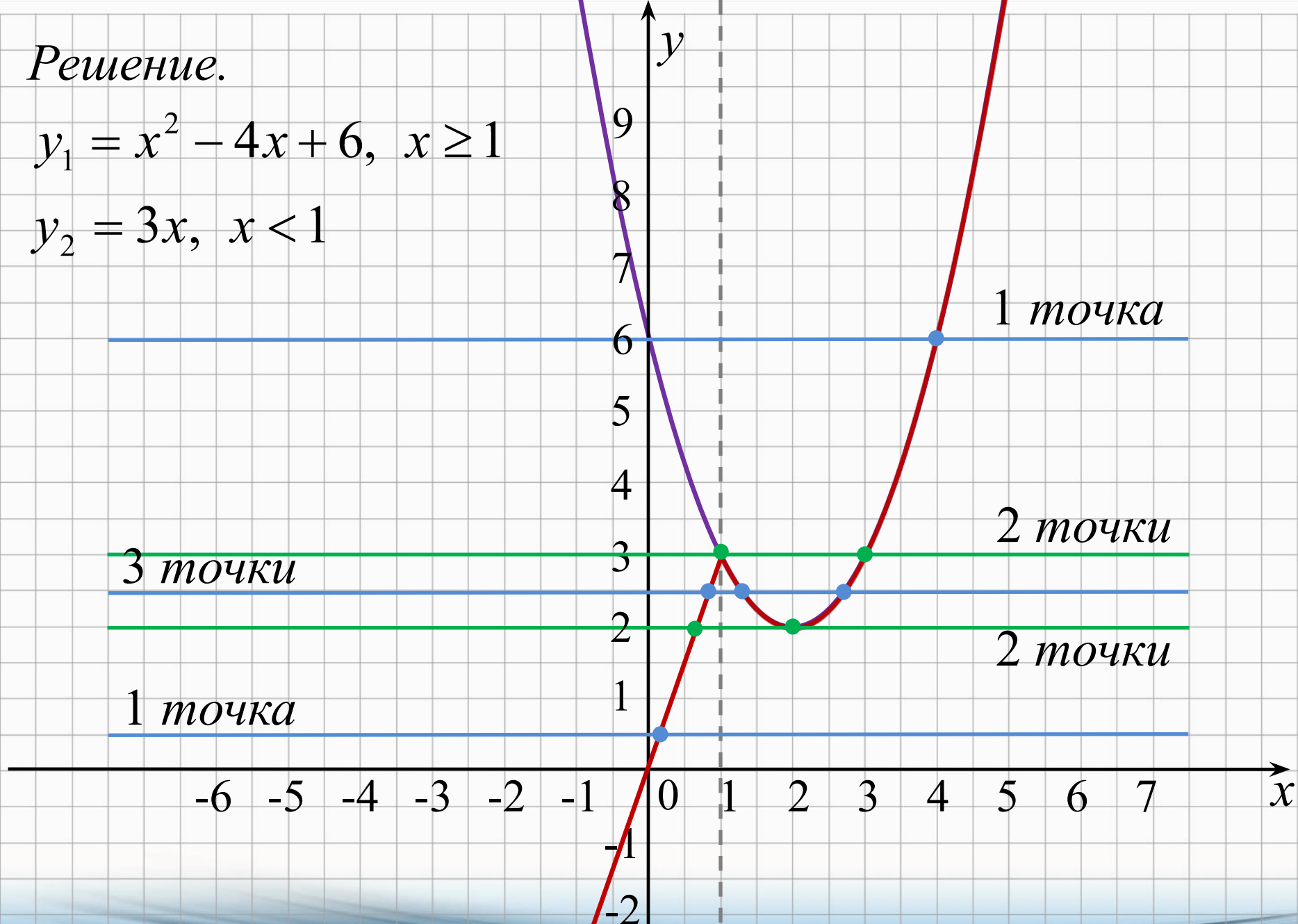
x	0	-2
y	0	-6

$$y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 6 = 2.$$

Решение.

$$y_1 = x^2 - 4x + 6, \quad x \geq 1$$

$$y_2 = 3x, \quad x < 1$$



Ответ: $m = 2$; $m = 3$.

8. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения k , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = x^2 + 4, \\ y = kx; \end{cases}$$

$$kx = x^2 + 4$$

$$x^2 - kx + 4 = 0$$

$$D = k^2 - 16$$

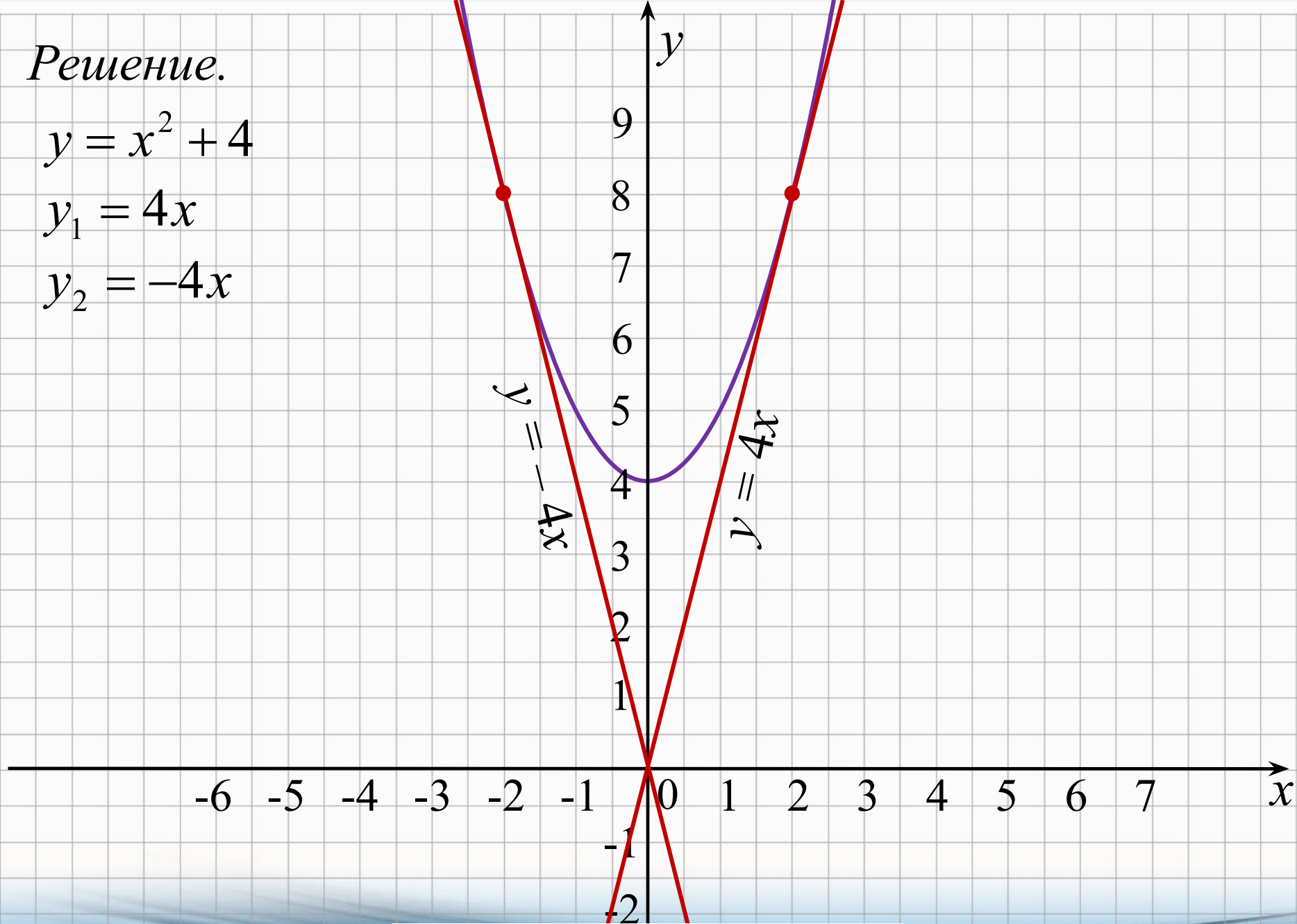
$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 4.$$

Решение.

$$y = x^2 + 4$$

$$y_1 = 4x$$

$$y_2 = -4x$$



Ответ: $k = 4$; $k = -4$.

9. Найдите все значения k , при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = -x^2 - 1$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения k , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = -x^2 - 1, \\ y = kx; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} kx = -x^2 - 1, \\ y = kx; \end{cases}$$

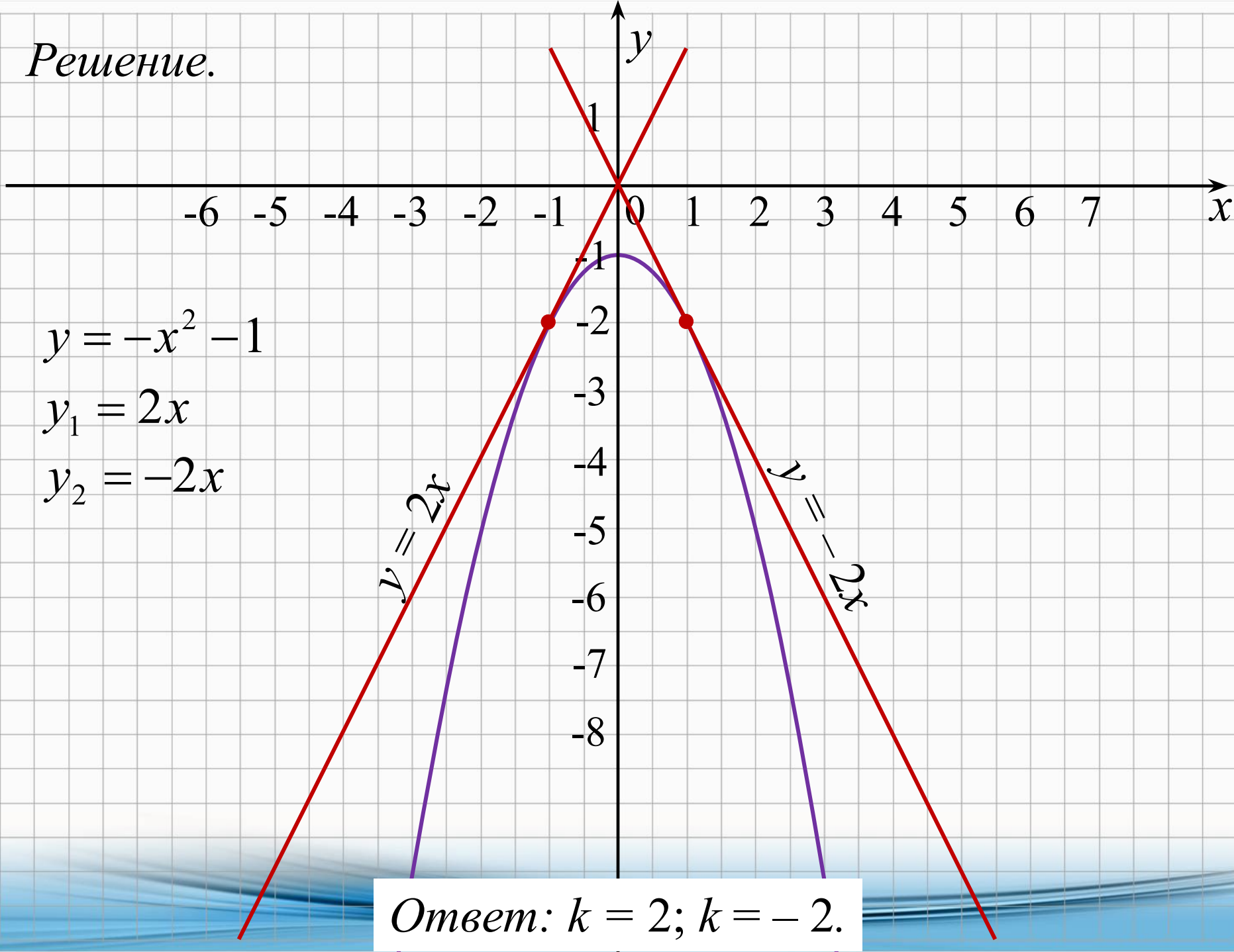
$$kx = -x^2 - 1$$

$$x^2 + kx + 1 = 0$$

$$D = k^2 - 4$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

Решение.



10. Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$ если известно, что прямая $y = 6x$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Другими словами, нужно найти все значения p , при каждом из которых система имеет одно решение:

$$\begin{cases} y = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x = x^2 + p, \\ y = 6x; \end{cases}$$

$$6x = x^2 + p$$

$$x^2 - 6x + p = 0$$

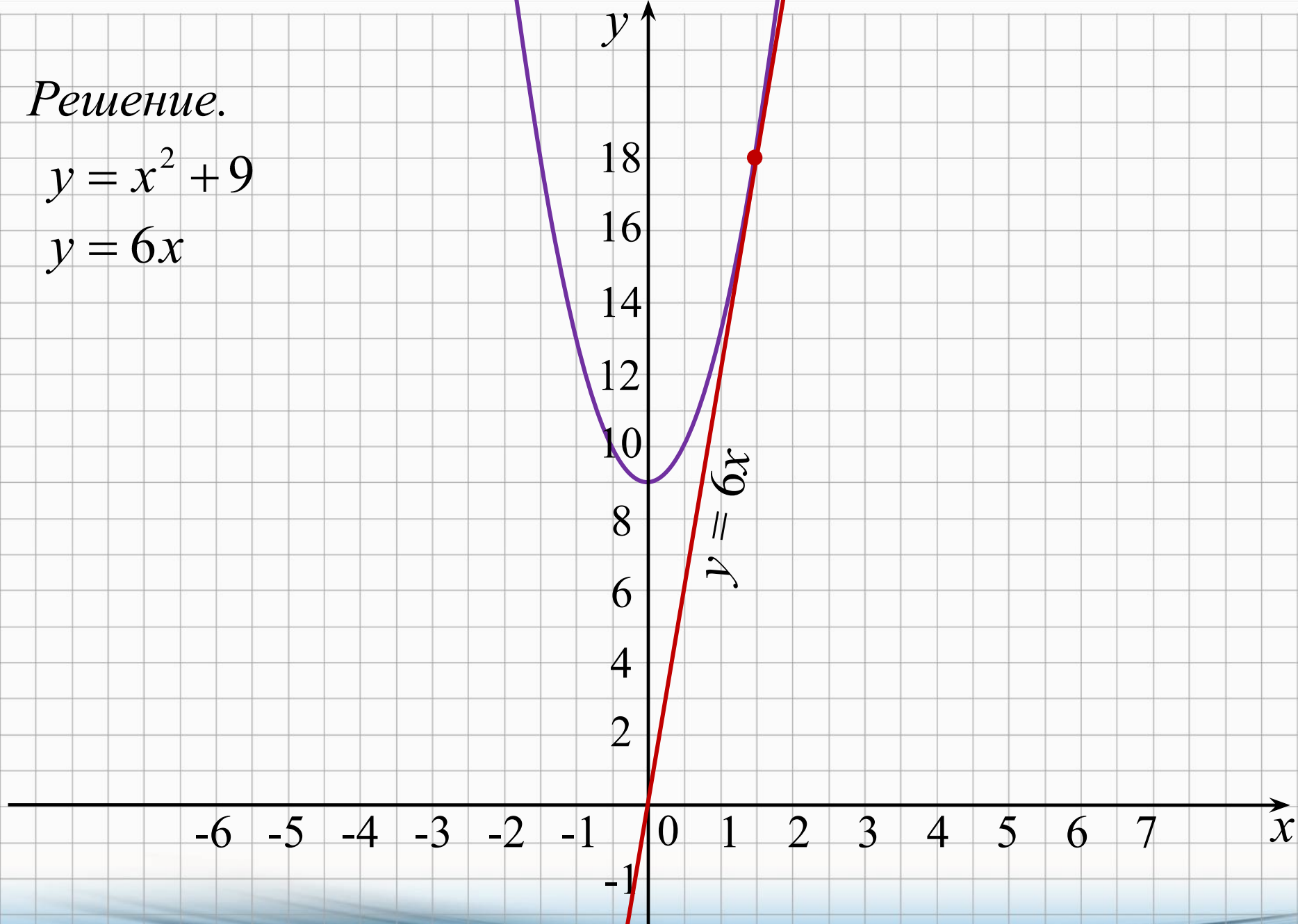
$$D = 36 - 4p$$

$$1 \text{ корень} \Leftrightarrow D = 0 \Leftrightarrow 36 - 4p = 0 \Leftrightarrow p = 9.$$

Решение.

$$y = x^2 + 9$$

$$y = 6x$$



Ответ: $p = 9$.

11. Постройте график функции $y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$

не имеет с графиком ни одной общей точки.

Решение.

$$y = \frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1}$$
$$\frac{(x^2 + x)|x|}{x + 1} = \frac{x(x + 1)|x|}{x + 1} = x|x| = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \geq 0; \\ -x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

при условии $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$.

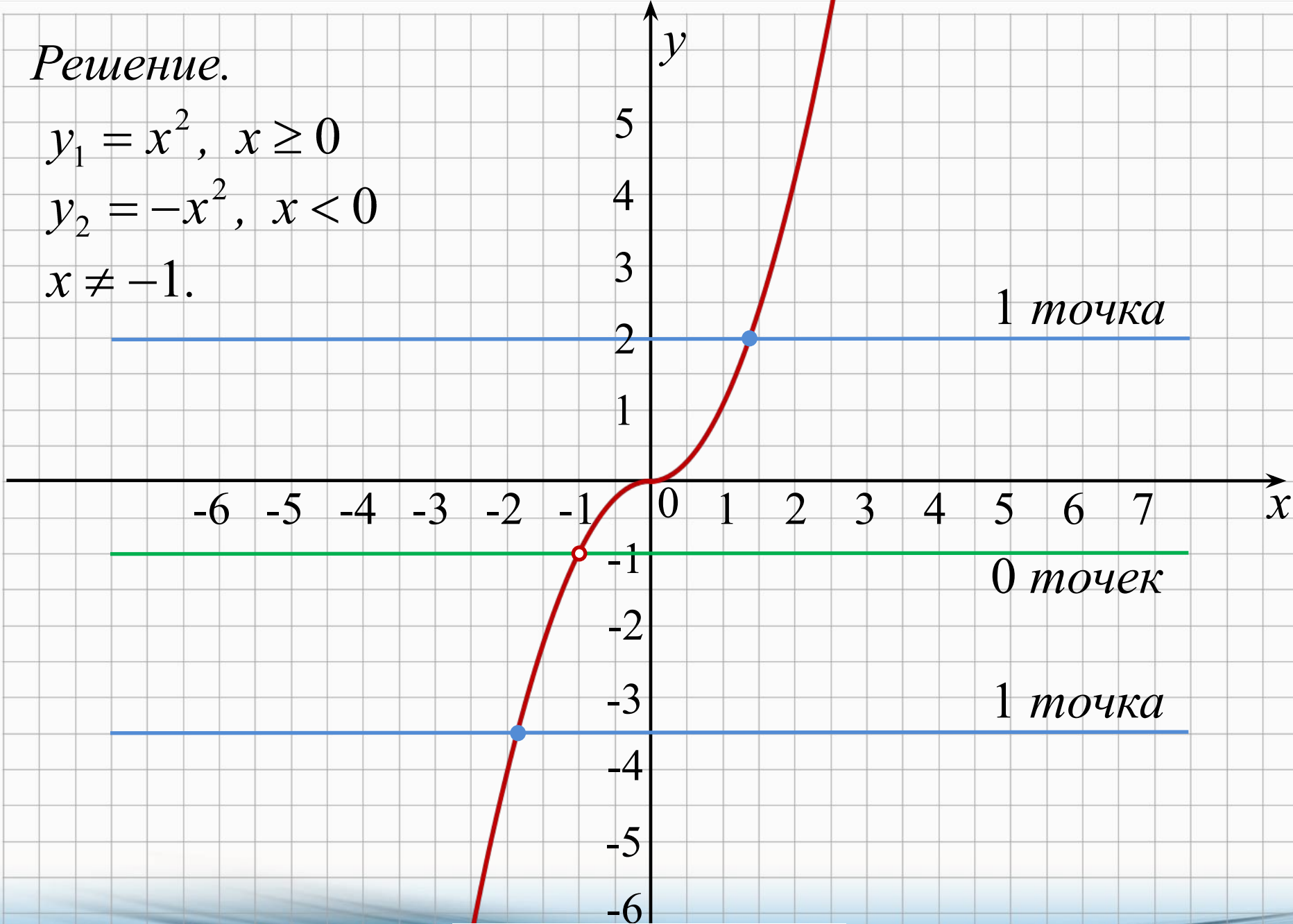
$$D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty).$$

Решение.

$$y_1 = x^2, \quad x \geq 0$$

$$y_2 = -x^2, \quad x < 0$$

$$x \neq -1.$$



Ответ: $m = -1$.