Теоретические методы исследования строительных конструкций, зданий и сооружений

Лекция 4.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математические модели в расчетах строительных объектов

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=R(x,y,z)$$	**Общее *квазигармоническое уравнение***, описывающее разнообразные физические явления в *неизотропной* среде.
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=f(x,y,z)$$ $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+2G\theta=0$$	**НДС элементов строительных конструкций.** (φ – функция напряжений); - кручение упругого стержня некругового сечения
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=R(x,y,z)$$	**Задача теплопроводности**, описывающая распространение тепла в трехмерной области. ϕ = *T* – температура, *R* - внутренний источник тепла или сток; *λx, λy, λz* – коэффициенты теплопроводности.
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\omega^2\phi=0$$ *(уравнение Гельмгольца).*	**Свободные и вынужденные колебания** φ – скалярная переменная, kx, ky, kz – свойства среды в направлениях x, y и z соответственно, ω – частота колебаний

В *зависимости от вида дополнительных условий:*

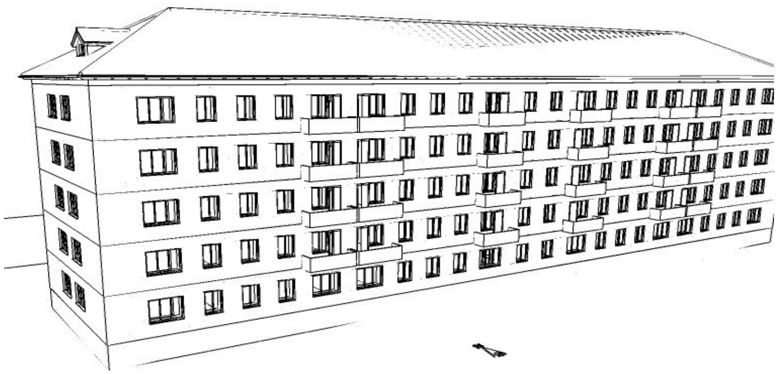
- **Задача Коши**, в которой одной из независимых переменных является *время*. При этом в *начальный момент времени* задаются некоторые условия относительно искомой непрерывной функции и ее производных – ***начальные условия***. Граничные условия при этом не задаются, так как задача решается в неограниченном пространстве;
- **Краевая задача**, где решение ищется в некоторой области с определенными границами, на которых и задаются ***граничные*** (*краевые*) ***условия*** относительно искомой функции и ее производных;
- **Смешанная** (*нестационарная*) **краевая задача**, в которой ставятся как ***граничные***, так ***и начальные***

Численные методы решения краевых задач (*методы сеток*):

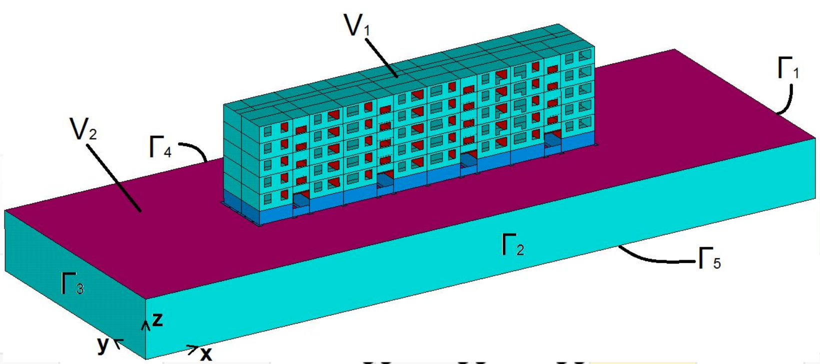
- **метод конечных разностей (МКР);**
- **метод конечных элементов (МКЭ).**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ ДЕФОРМИРОВАНИЯ И РАЗРУШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ «ЗДАНИЕ-ФУНДАМЕНТ-ОСНОВАНИЕ»

Содержательная постановка задачи



Концептуальная постановка задачи



$$V = V_1 \cup V_2$$

Математическая постановка (краевая задача)

Уравнения равновесия:

$$\sigma_{ij,j}(\vec{x}) + \rho(\vec{x})F_i = 0, \vec{x} \in V$$

Геометрические уравнения Коши:

$$\varepsilon_{ij}(\vec{x}) = \frac{1}{2}\left(u_{i,j}(\vec{x}) + u_{j,i}(\vec{x})\right), \vec{x} \in V$$

Определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = F_{ij}(\varepsilon_{kl}(\vec{x})), \qquad \vec{x} \in V$$

$$\sigma_{ij} = \lambda(x)\theta\delta_{ij} + 2\mu(x)\varepsilon_{ij}$$ *изотроп. лин-упруг среда*

Граничные условия:

$$\begin{cases} u_x(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in (\Gamma_1 \cup \Gamma_3) \\ u_y(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in (\Gamma_2 \cup \Gamma_4) \\ u_z(\vec{x}) = f(x), & \vec{x} \in (\Gamma_5) \\ \sigma_{ij}(\vec{x})n_j(\vec{x}) = 0, & \vec{x} \in (V_1 \cup V_2) \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{h}{2}\cdot\left[\cos\left(\frac{2\cdot\pi\cdot x}{L}\right) + 1\right].$$

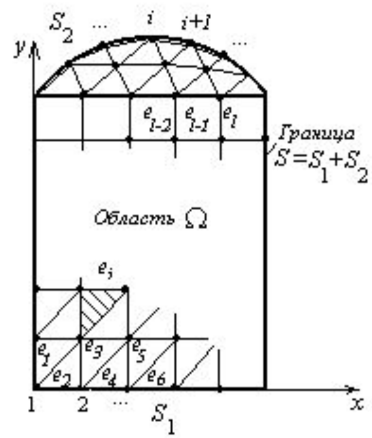
Выбор вариационного принципа

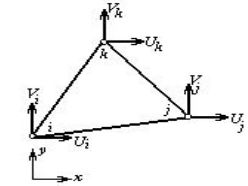
- Выбор вариационного принципа определяет основные неизвестные функции, через которые впоследствии устанавливаются остальные неизвестные.
- В задачах МДТТ используются следующие вариационные принципы:
  - **принцип Лагранжа**, в соответствии с которым варьируются перемещения;
  - принцип Кастильяно (варьируются напряжения),
  - **принцип Рейсснера** (варьируются перемещения и напряжения),
  - принцип Ху-Вашицы (варьируются перемещения, напряжения и деформации).
- В практических расчетах чаще всего используется принцип Лагранжа.

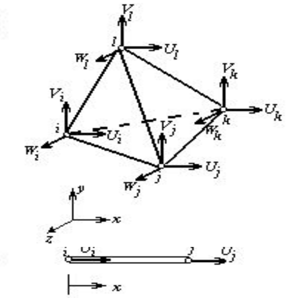
Метод конечных элементов
численный аналог краевой задачи

Сплошное тело разбивается на элементы ограниченной протяженности - *конечные элементы* (КЭ).

Эти элементы имеют общие узловые точки (или просто *узлы*) и в совокупности аппроксимируют форму обла







***Вариационная задача* – (потенциальная энергия системы)**

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]d\Omega-\int_{\Omega} f(x,y)u\,d\Omega \Leftarrow u=f(x,y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \textbf{(КЗ)}$$

$$\Pi=\frac{1}{2}\int_0^s\left[EJ\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)^2 Es\right]ds-\int_0^s[f(x)w+f_1(x)u]ds$$

$$u_i^e(\vec{x})=u_{ni}^e\varphi_n^e(\vec{x}),\quad \vec{x}\in\Omega_e$$

аппроксимирующая, базисная функция

***Искомую непрерывную функцию*, которая интересует нас в каждой конкретной задаче (перемещение) *аппроксимируют полиномом*, который подбирается так, чтобы обеспечить непрерывность этой функции в узлах каждого элемента.**

Метод конечных элементов (МКЭ)

- Узловые значения искомой функции должны быть «отрегулированы» таким образом, чтобы обеспечивалось «наилучшее» приближение к истинным значениям функции.
- Это регулирование осуществляется путем *минимизации функционала*, связанного с физической сущностью задачи. В задачах строительной механики и теории упругости минимизируется *потенциальная энергия* системы.
- Важная особенность МКЭ - *каждый КЭ* можно считать *изолированным* от всей совокупности, и аппроксимировать функцию на этом элементе через ее значения в узлах независимо от того, какое место он займет в связанной модели и от поведения функции на других КЭ
- При рассмотрении задач распределения тепла или течения жидкости минимизируется функционал, связанный с соответствующей краевой задачей.
- Процесс минимизации функционала приводит к *системе линейных алгебраических уравнений* относительно узловых значений искомой функции

$$[\mathbf{K}]\{\delta\} = \{F\}$$

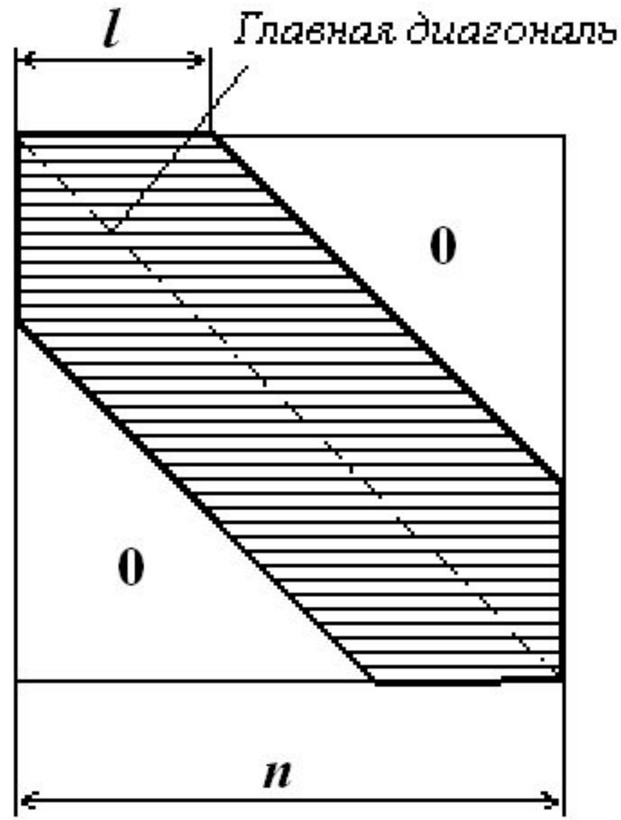
СЛАУ

$$[\mathbf{K}]\{\delta\}=\{F\}$$

$[\mathbf{K}]$ **Матрица жесткости**

$\{\delta\}$ **Вектор искомых перемещений узлов**

$\{F\}$ **Вектор внешних нагрузок**

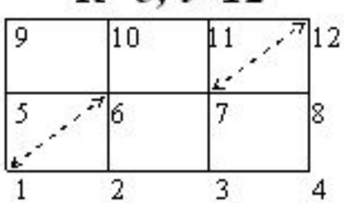


Решение системы алгебраических уравнений. Используются стандартные программы, имеющиеся в математическом обеспечении ЭВМ, и специально подготовленные и лучшим образом учитывающие симметрию и структуру матрицы жесткости системы – редкозаполненность или ленточность.

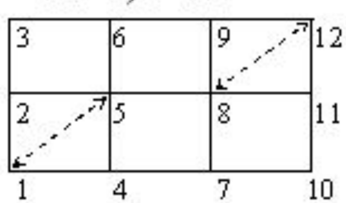
$$l=(R+1)Q$$

$$n=N_{узл}Q$$

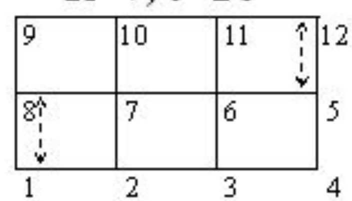
R=5, l=12



R=4, l=10



R=7, l=16



Решение СЛАУ и расчет НДС

Определение деформаций и напряжений. Определив узловые перемещения, по известным соотношениям теории упругости определяются деформации и напряжения:

Связь между деформациями и перемещениями в КЭ :

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}]\{\delta\} \quad \textbf{(1)}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

Физические уравнения:

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\} \quad \textbf{(2)}$$

ПНС

$$[\mathbf{D}] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mu)/2 \end{bmatrix}$$

ПДС

$$[\mathbf{D}] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \mu/(1-\mu) & 0 \\ \mu/(1-\mu) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2(1-\mu) \end{bmatrix}$$

Этапы практической реализации МКЭ

1. **Переход от реальной конструкции (РК) к расчетной схеме (РС) (непрерывной механико-математической модели) -** *(статический или динамический расчет, линейный или нелинейный анализ, размерность задачи, геометрия, схема загружения, условия закрепления, модель деформирования, критерии разрушения; возможные допущения)*
2. **Переход от РС к дискретной (компьютерной) модели (КМ), приспособленной к возможностям конкретного ПК** *(выбор типов КЭ, дискретизация, связи, нагрузки…)* **;**
3. **Проведение расчета, получение численных результатов (ЧР)** *(плохо обусловленные матрицы жесткости)***;**
4. **Интерпретация и анализ результатов расчета, получение итоговой информации (ИИ).**

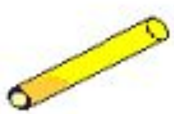
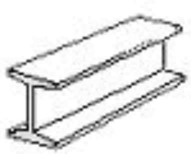
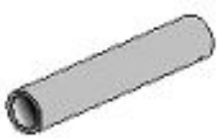
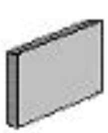
Каждый этап содержит элементы моделирования, а значит — вносит свою долю в накопление погрешностей при переходе от реальной конструкции к итоговой информации;

На каждом из этих этапов степень участия инженера-расчетчика и роль используемого программного обеспечения различны, равно как и различна их ответственность.

Дискретизация

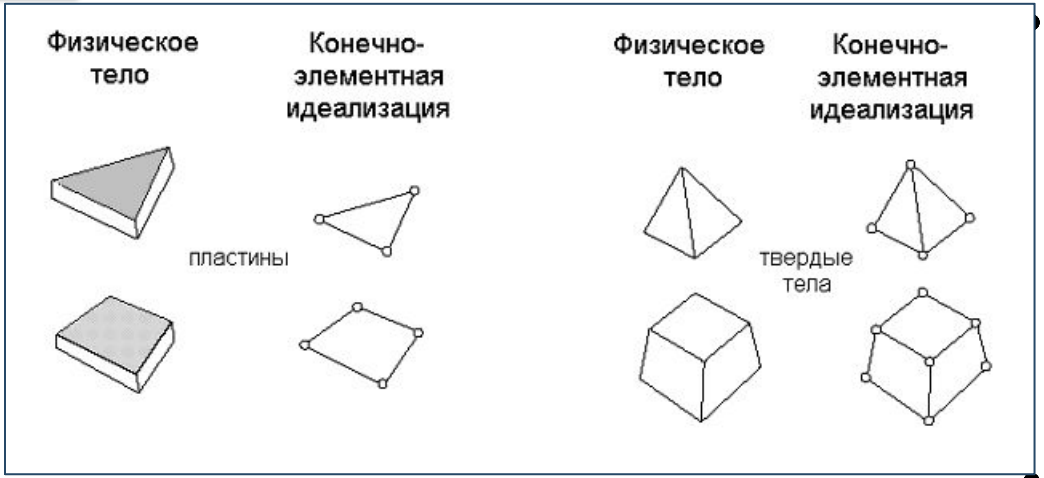
КЭ, используемые в механике

<u>Простейшие конструкционные элементы</u>

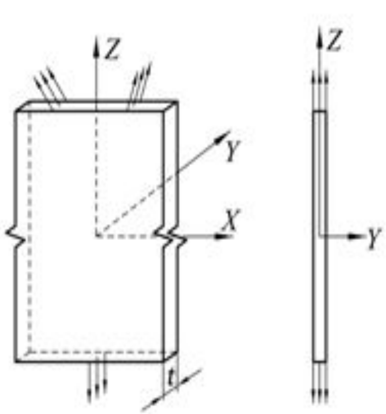
Компонента физической конструкции (структуры)	Имя математической модели	Конечно-элементная дискретизация
	стержень	
	балка	
	труба	
	брус средней толщины	

- К простейшим структурным элементам относятся элементы типа *стержень, балка, труба, брус, панель, работающая на сдвиг*.
- Уравнения, описывающие данные элементы, выводятся из теоретических положений *сопротивления материалов*, т.е. из упрощенных механических формулировок.
- Исторически, именно эти типы КЭ стали использоваться п.ервыми

Континуальные КЭ

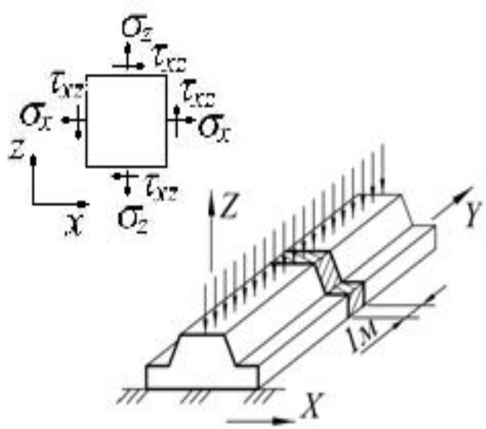


- Континуальные элементы – это конечные объемы или площади сплошной среды (континуума): *пластины, оболочки, осесимметричные элементы, трехмерные твердотельные элементы*.
- Уравнения, описывающие данный тип КЭ, получаются из общих соотношений *механики сплошной среды* (ТУ, ТПЛ).



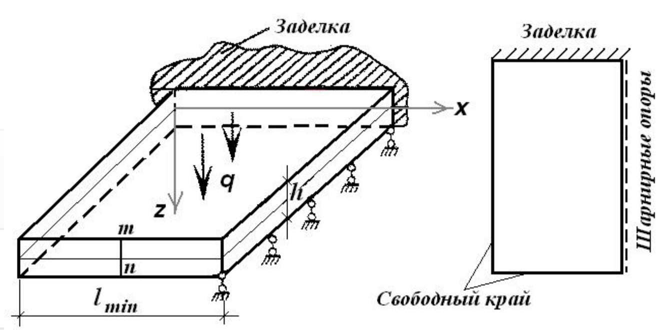
а)

ПНС



б)

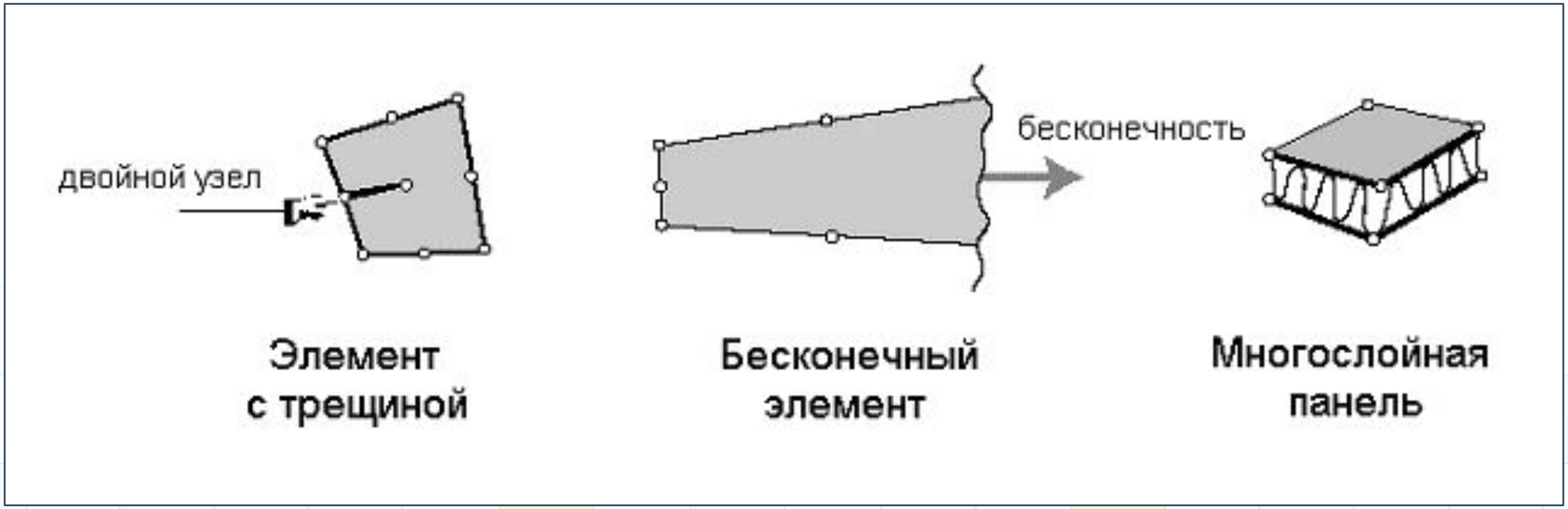
ПДС



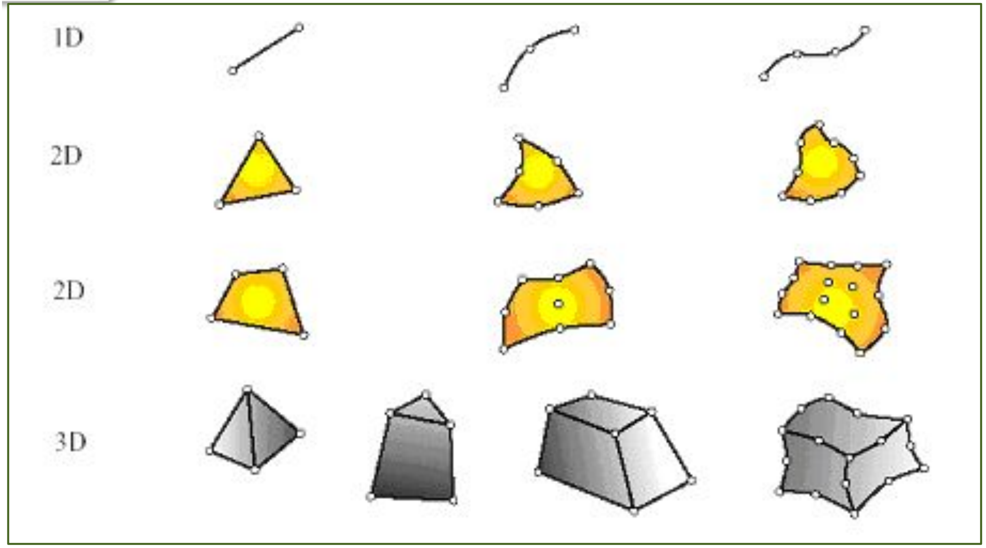
в)

Специальные элементы

- Специальные элементы обладают свойствами как конструкционных, так и континуальных элементов.
- Они выводятся из уравнений механики сплошной среды, но включают в себя некоторые особенности непосредственно связанные с физическими особенностями решаемых задач, например: элемент с трещиной - для задач механики разрушения; многослойная панель; бесконечные и полубесконечные элементы; контактные элементы, абсолютно твердотельные элементы.



Атрибуты КЭ



1. Собственная размерность

В зависимости от размерности задачи КЭ могут описываться 1, 2 или 3 координатами - собственная размерность КЭ.

В динамическом анализе ***время*** - дополнительная размерность.

В расчетах используются спец. ***КЭ с нулевой размерностью***, (точечные массы, пружины)

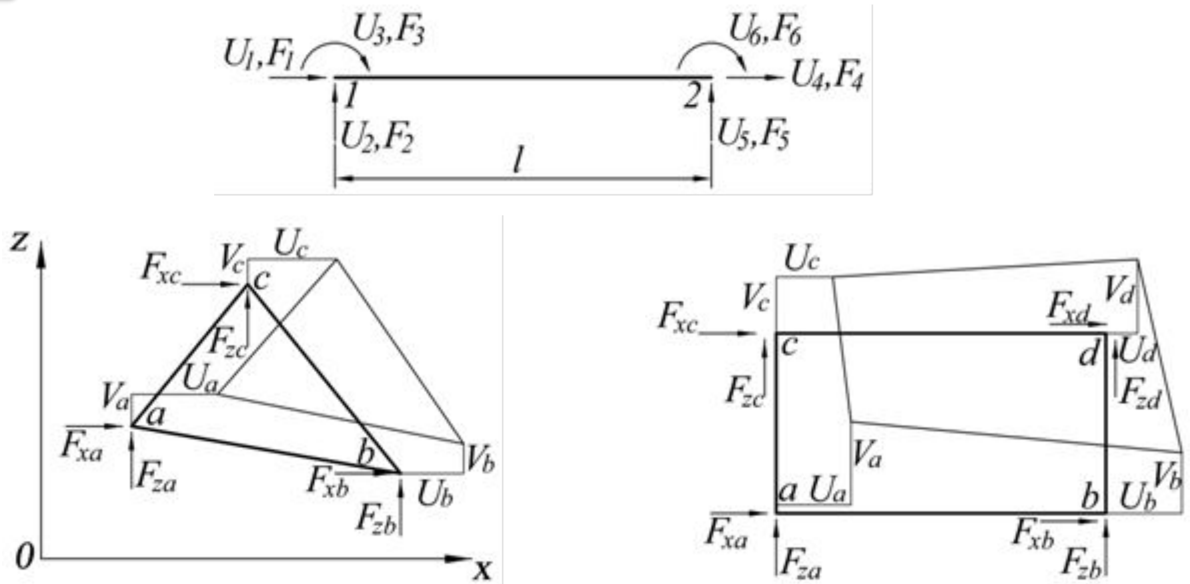
2. Узловые точки

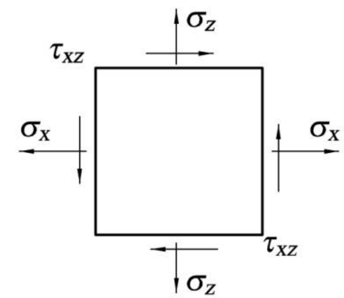
предназначены для описания геометрии КЭ и для задания физических степеней свободы (числа неизвестных функций).
Наличие дополнительных узлов связано с порядком аппроксимирующей функции.
КЭ, имеющие только угловые узлы (линейные), обеспечивают *линейную интерполяцию* геометрии и функций.
КЭ, имеющие дополнительные узлы - *квадратичную* или даже *кубичную* интерполяцию.

3. Степени свободы

определяют физическое состояние или физическое поле, которое описывает данный КЭ.
Благодаря общим степеням свободы в соседних элементах, осуществляется сборка модели и формирование глобальной системы КЭ уравнений.
В качестве степеней свободы могут фигурировать как узловые значения неизвестной функции, так и ее производные по пространственным координатам в узлах.
В 1-м случае – ***лагранжевы*** элементы
во 2-м - ***эрмитовы*** элементы.

Степени свободы плоских КЭ



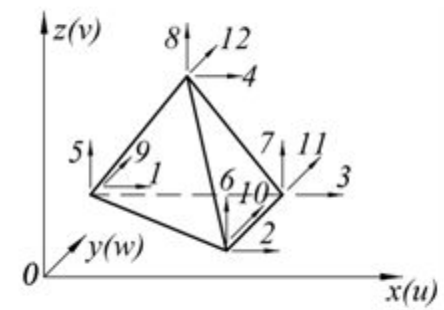


Компоненты напряжений в точках

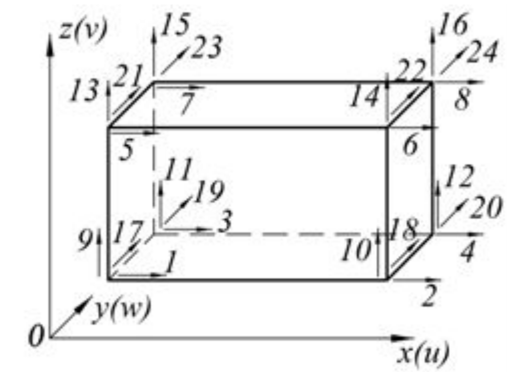
Плоские КЭ (*а*–стержень общего вида, б–треугольник, в–прямоугольник), степени свободы (возможные перемещения) и узловые силы в их узлах и вершинах

4. Узловые силы.
Система узловых сил полностью соответствует степеням свободы элемента и выражается с помощью глобального вектора узловых сил.

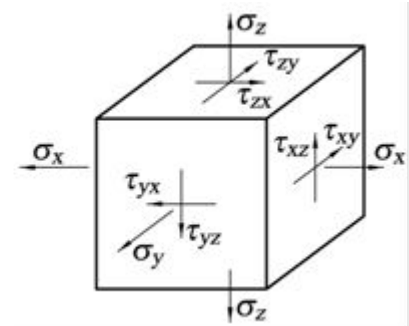
Степени свободы пространственных КЭ



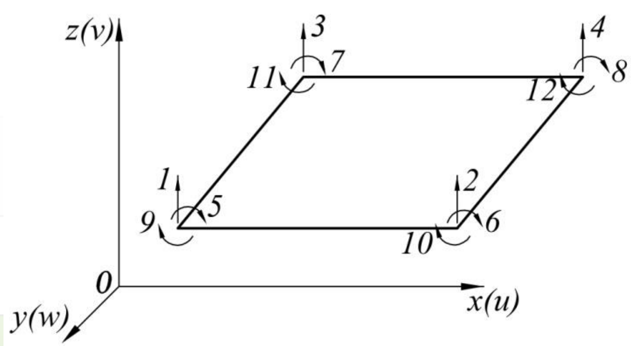
Тетраэдр, пространственное напряженное состояние

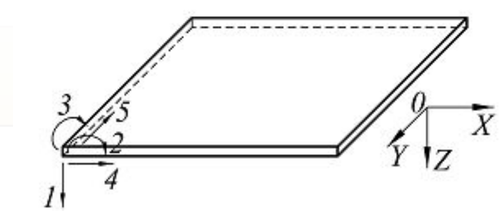


Параллелепипед, пространственное напряженное состояние



Компоненты напряжений в точках

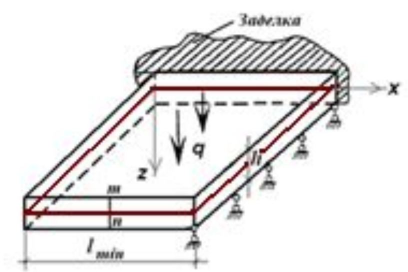




Прямоугольный КЭ плиты

ПЛИТА (*пластина*)

- Пластина, нагруженная перпендикулярно её плоскости и работающая преимущественно на изгиб из собственной плоскости, называется ***плитой.***
- При нагружении плита изгибается, и ее срединная плоскость превращается в поверхность.
- Выбор расчетной модели плиты зависит от соотношения размеров $\frac{h}{l_{\min}}$ и от ***жесткости*** плиты.



- Плита считается ***тонкой,*** если ее толщина меньше других размеров ~ в 5 раз.

- ***Тонкая плита***, у которой максимальный прогиб под действием поперечной нагрузки не превышает четверть её толщины, называется ***жесткой –***

ТЕХНИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБА ПЛИТ.

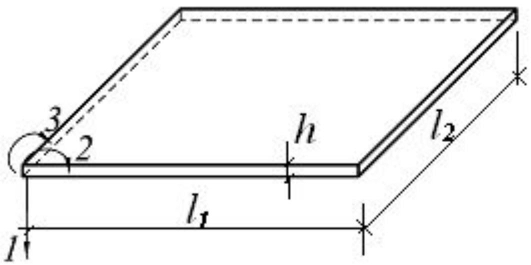
Техническая теория изгиба плит.

Допущения технической теории изгиба плит:

1 —прямолинейные элементы, нормальные к срединной плоскости, остаются после деформации прямыми, нормальными деформированной срединной поверхности (*гипотеза прямых нормалей*);

2 — считается, что пластина несжимаема по толщине, или слои, параллельные срединной поверхности, не давят друг на друга;

3 — Срединная поверхность при изгибе не деформируется в своей плоскости при z = 0, т.е. деформации при z = 0 отсутствуют.



4-угольный изгибаемый КЭ с тремя степенями свободы в узле

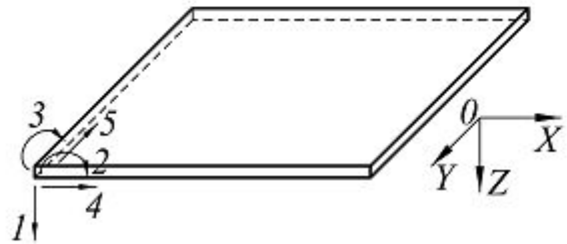
Эти допущения позволяют выразить перемещения всех точек плиты через поперечные перемещения срединной плоскости.

Расчет пластин с использованием этих допущений составляет основу *технической теории изгиба плит*

Напряжённое состояние такого КЭ описывается изгибающими моментами *Mx*, *My* и поперечными силами *Qx*, *Qy*. Изгибаемые плитные КЭ <u>не воспринимают продольные силы</u>.

Гибкая пластина

- ***Тонкая пластина***, у которой максимальный прогиб под действием поперечной нагрузки превышает четверть её толщины, называется ***гибкой пластиной***.
- В ней нужно учитывать напряжения, равномерно распределенные по толщине пластинки (мембранные).
- Такие пластинчатые КЭ имеют в каждом узле по три осевых и два угловых перемещения относительно осей *X* и *Y*.
- В расчётах пластинчатых систем кроме моментов и поперечных сил определяются нормальные и касательные напряжения σx, σy, τxy в плоскости *XOY*

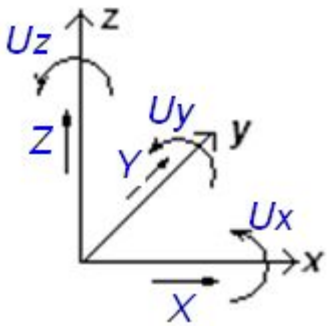


4-угольный изгибаемый пластинчатый КЭ с пятью степенями свободы в узле

В более толстых плитах (при $\frac{h}{l_{\min}} > 5$) сдвигающие напряжения в вертикальных сечениях плиты приводят к существенному искажению нормалей к срединной поверхности при деформировании плиты. Поэтому толстые плиты рассчитываются уточнёнными методами без использования гипотез технической теории изгиба пластин

Признак системы

Сокращенный набор степеней свободы (неизвестных перемещений)



- а) ***плоская ферма*** **или** ***стена*** **(балка-стенка), размещенная в плоскости XOZ –учитываются только перемещения вдоль осей X и Z;**
- **б)** ***плоская рама*****, расположенная в плоскости XOZ – учитываются перемещения вдоль осей X и Z и угол поворота UY;**
- **в)** ***плита*** **или** ***балочный ростверк*** **в плоскости XOY – учитываются перемещения вдоль оси Z и углы поворота UX, UY;**
- **г)** ***пространственная ферма*** **– исключаются все углы поворота, учитываются перемещения X, Y, Z.**
- **д) пространственная система – все 6 степеней свободы**

Атрибуты КЭ

4. Узловые силы. Система узловых сил полностью соответствует степеням свободы элемента и выражается с помощью глобального вектора узловых сил.

5. Определяющие соотношения (физические уравнения). Для конечных элементов, используемых в механических расчетах, определяющее соотношение задает поведение материала, из которого изготовлена конструкция. Например, закон Гука, связывающий тензор деформаций и тензор напряжений в точке. Для линейного упругого стержневого элемента достаточно задать один модуль Юнга Е и один коэффициент температурного расширения.

6. Свойства сечения. К свойствам сечения относятся площади и моменты инерции одномерных и двумерных конечных элементов, таких как балки, стержни, пластины. В эту группу также входит толщина пластин и оболочек. При построении конечного элемента свойства сечений считаются заданными и входят в результирующую матрицу жесткости элемента