Презентация по Математическому Анализу
Семинар 33

Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения.

Уравнения с разделёнными переменными

Так называются уравнения вида $f(x)\,dx + g(y)\,dy = 0.$

Пусть ***y(x)*** - решение этого уравнения, т.е. $f(x)dx + g(y(x))dy(x) = 0.$

Интегрируя это тождество, получим

$$\int f(x)dx + \int g(y)dy = 0$$

- общий интеграл (общее решение) этого уравнения.

Уравнения с разделяющимися переменными.

Так называются уравнения вида

$$y' = f(x)g(y) \quad (1)$$

или

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0 \qquad (2)$$

Эти уравнения легко сводятся к уравнению с разделёнными переменными:

Записываем уравнение (1) в форме $$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x)$$ затем делим на ***g(y)***

и умножаем на dx: $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

Уравнение **(2)** делим на $f_2(x)g_1(y)$ получаем:

$$\frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \frac{g_2(x)dy}{g_1(y)} = 0$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем:

$$\int \frac{f_1(x)dx}{f_2(x)} + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)} = C$$

К уравнениям с разделяющимися переменными сводятся уравнения вида:

$$y' = f(ax + by + c), (a, b \neq 0, c - постоянные)$$

Если перейти к новой неизвестной функции ***z=ax +by +c***, то $z' = a + by' \Rightarrow y' = \frac{z'-a}{b}$,

и уравнение представляется как ***z'=bf (z)+a***.

(уравнение с разделяющимися переменными).

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнения $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ (1) называется однородным

если ***P(x, y),Q(x, y)*** – однородные функции одинакового измерения.

Уравнение **(1)** может быть приведено к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ и при помощи

подстановки ***y=x u***, где ***u*** – новая неизвестная функция, преобразуется в уравнение

с разделяющимися переменными.

Может также применяться подстановка ***x=y u***.

Уравнения, приводящие к однородным имеют вид:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (2)$$

Если $\delta = \begin{vmatrix} a_1, b_1 \\ a_2, b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, полагая в уравнении **(2)** $x = u + \beta; y = v + \beta$, где постоянные α, β

определяются из системы уравнений

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0; \qquad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0;$$

получим однородное дифференциальное уравнение относительно переменных ***u, v***

Если $\delta = 0$, то полагая в уравнении (2) $a_1x + b_1y = u$ получим

уравнение с разделяющими переменными.

Примеры с решениями:

1. Решить уравнение (найти общий интеграл уравнения) $y'\cos x = y/\ln y$

<u>**Решение.**</u> Перепишем уравнение в виде y'cosx=y/lny= $\cos x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y}$

Разделив переменные, получим:

$$\cos x \frac{dy}{dx} = \frac{y}{\ln y} \Rightarrow \frac{\ln y}{y} dy = \frac{dx}{\cos x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{\ln y}{y} dy = \int \frac{dx}{\cos x} + c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln^2 y = \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} + c\right)$$

2. Решить уравнение (найти общий интеграл уравнения) $y' = tgx\, tgy$

<u>**Решения.**</u> Полагая и разделяя переменные, приходим к уравнению $ctgydy = tgxdx$

Интегрируя, имеем:

$$\int ctgydy = \int tgxdx \Rightarrow \ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + \ln C \Rightarrow \sin y = C/\cos x$$

или $\sin y \cos x = C$

3. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1+x^2)dy + ydx = 0$

при начальном условии ***y(1)=1***

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}$

Интегрируя, получим $\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \ln|y| = -arctgx + C$

Это и есть общий интеграл данного уравнения.

Используя начальное условие, найдем произвольную постоянную ***С***; имеем

ln1=-arctg1+c, т. е. $C = \frac{\pi}{4}$, следовательно $\ln y = -arctgx + \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = e^{\frac{\pi}{4} - arctgx}$

4. Решить однородное дифференциальное уравнение $(x^2 + 2xy)dx + xydy = 0$

Решение. Здесь $P(x,y) = x^2 + 2xy; Q(x,y) = xy$

Обе функции – однородные второго измерения.

Введем подстановку ***y=ux***.

Откуд а $dy = xdu + udx$

Тогда уравнение примет вид:

$$(x^2 = 2x^2u)dx + ux^2(xdu + udx) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x^2u + u^2x^2)dx + ux^3du = 0$$

Разделяя переменные и интегрируя, имеем:

$$\frac{dx}{x} + \frac{udu}{(1+u)^2} = 0 \Rightarrow \int\frac{dx}{x} + \int\frac{udu}{(1+u)^2} = C$$

Преобразуем второй интеграл:

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{udu}{(1+u)^2} = C \Rightarrow \ln|x| + \int\frac{u+1-1}{(u+1)^2}du = C \Rightarrow \ln|x| + \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} + C$$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции ***y (u=y/x),*** получаем окончательный ответ

$$\ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C$$

5. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$ при начальном условии $y(1) = \pi/2$

Решение. Введем подстановку ***y=ux***. Откуда $dy = xdu + udx$

Тогда уравнение примет вид:

$$xdu + udx = (u + \sin u)dx = 0 \Rightarrow xdu = \sin u dx \Rightarrow \frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|tg(u/2)| = \ln|x| + \ln C$$

Откуда $u/2 = arctg(Cx)$

Возвращаясь к прежней неизвестной функции ***y (u=y/x),*** получаем $y = 2xarctg(Cx).$

Используя начальное условие, найдем произвольную постоянную ***C***; имеем $\frac{\pi}{2} = 2arctgC$

т. е. ***C=1***, следовательно частное решение имеет вид $y = 2xarctgx.$

6. Решить дифференциальное уравнение $(2x+y+1)dx+(x+2y-1)dy=0;$

Решение. Уравнение относится к однородному дифференциальному уравнению вида **(2)**,

так как $y'=-\dfrac{2x+y+1}{x+2Y-1};\begin{vmatrix}2,1\\1,2\end{vmatrix}=3\neq 0$

Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases}2x+y+1=0\\x+2y-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha=-1\\y=\beta=1\end{cases}$$

Производим в исходном уравнении замену переменных, полагая $x=u-1;\ y=v+1;\ dx=du;$

$dy=dv;$

Уравнение преобразуется к виду: $(2u+v)du+(u+2v)dv=0;$

В полученном однородном уравнении положим $v=ut,$, откуда $dv=udt+tdu$

придем к уравнению с разделяющими переменными $2(t^2+t+1)udu+u^2(1+2t)dt=0$

общий интеграл которого есть

$$u\sqrt{t^2+t+1}+C\Rightarrow u^2+uv+v^2=C^2\Rightarrow x^2+y^2+xy+x-y=C_1$$

(после обратных замен и $C_1=C^2-1$).

Примеры для самостоятельного решения:

1. Решить дифференциальные уравнения с разделяющими переменными:

a) $\ln\cos y dx + xtgy dy = 0$

c) $y/y' = \ln y;\ y(2) = 1$

b) $(1 + e^{2x})y^2 dy = e^x dx;\ y(0) = 0$

d) $x\sqrt{1+y^2}dx + y\sqrt{1+x^2}dy = 0$

e) $y' = \dfrac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$

f) $y' = e^{x+y} + e^{x-y};\ y(0) = 0$

2. Решить однородные дифференциальные уравнения:

a) $xy'\sin(y/x) + x = y\sin(y/x)$

c) $y' = (x+y)/(x-y)$

b) $xy'\ln(y/x) = x + y\ln(y/x)$

d) $xy' - y = x\,tg\,(y/x)$

e) $y' = (y/x) + \cos(y/x)$

f) $(x-2y+3)dy + (2x+y-1)dx = 0$