СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ *МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*

СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ *МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*

- Примерами систем массового обслуживания (СМО) могут служить магазины, торговые организации, ремонтные мастерские, телефонные станции и др.
- В торговле выполняется множество операций в процессе движения товаров от производителей к потребителям. Такими операциями могут быть: погрузка товаров, перевозка, разгрузка, фасовка, хранение, продажа и т.д.

СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ ***МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ***

- Каждая СМО определяется:

а) ***потоком требований (заявки)*** со стороны покупателей на обслуживание, поступающих в случайные моменты времени;

б) количеством устройств, выполняющихся кем-то или чем-то, называемых ***каналами (узлами) обслуживания***.

СИСТЕМЫ И МОДЕЛИ *МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ*

Основными компонентами СМО являются:

- ***Клиент*** (***заявка*** или ***требование*** на обслуживание, т.е. «объект обслуживания»),
- ***Сервис*** (обслуживающее устройство, средства обслуживания и т.п.).
- Поступление клиентов в систему обслуживания характеризуется ***интервалом между их последовательными поступлениями***.
- ***Время обслуживания*** клиентов.
- ***Длина очереди***, которая может быть конечной или бесконечной.
- ***Дисциплина очереди*** (*принципы построения очереди*). Например, «первым пришел — первым обслуживаешься» или обслуживание с приоритетом.

ПОТОКИ СОБЫТИЙ

Потоком событий называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.

Примеры: поток вызовов на телефонной станции, поток машин с товаром, поступающим на базу, поток покупателей и т.д.

ПОТОКИ СОБЫТИЙ

Интенсивностью потока λ называется среднее число событий, происходящих в единицу времени.

Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.

ПОТОКИ СОБЫТИЙ

- *Определение 1.* Поток событий называется ***стационарным***, если его вероятностные характеристики не зависят от времени.
- *Определение 2.* Потоком события ***без последействия*** называется поток, в котором заявки поступают в систему не зависимо друг от друга.
- *Определение 3.* Поток событий называется ***ординарным***, если только одно событие попадает на элементарный участок времени *Δt,* т.е. вероятность попадания на малый промежуток времени двух или более событий пренебрежительно мала.
- *Определение 4.* Поток событий называется ***простейшим,*** если он стационарен, ординарен и не имеет последействия. Этот поток называют также стационарным пуассоновским, так как для него с интенсивностью Х на любой интервал Т меж ... и имеет показательное (экспон ... ение с плотностью

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t}, t>0.$$

МОДЕЛИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

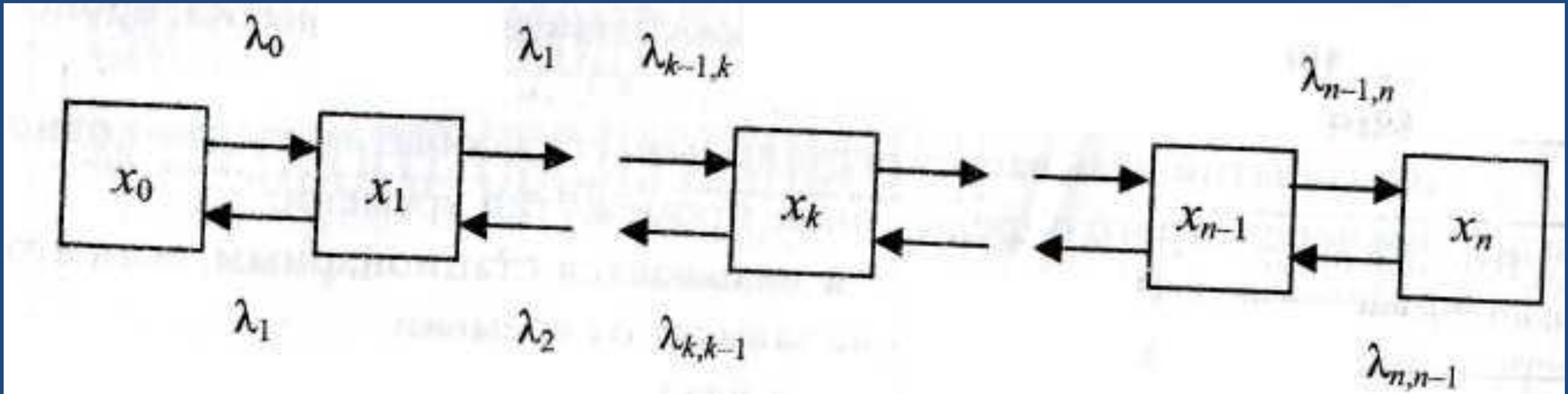
- В биологии с помощью схемы размножения и гибели описывают изменение численности популяции. Процессы, протекающие в моделях теории массового обслуживания, также соответствуют этой схеме, т.е. данные модели строятся на основе экспоненциального распределения, которое задает интервал времени между рождениями и гибелью.

МОДЕЛИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

- *Процесс **рождения** и **гибели** есть случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем.*

Рассмотрим физическую систему **X** со счетным множеством состояний x_0, x_1, x_2,.. , x_n (вершины графа) и связь между соседними состояниями представлена прямым и обратным переходом (дуги графа x_i, x_k).

МОДЕЛИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ



Переход системы из одного состояния в другой происходит скачком, в момент, когда осуществляется какое-то событие (приход новой заявки, освобождение канала и т.д.).

МОДЕЛИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Обозначим $P_k(x)$ — вероятность того, что в момент t система находится в состоянии x_k.

В любой момент t выполняется условие:

$$\sum_{k=1}^{n} P_k(t) = 1,$$

Рассматривая состояния x_k и предельные переходы из состояния в состояния и их вероятности, можно получить формулы

МОДЕЛИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

$$P_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} P_0,$$

$$P_2 = \frac{\lambda_{1,2}}{\lambda_{21}} P_1 = \frac{\lambda_{1,2} \cdot \lambda_{01}}{\lambda_{21} \cdot \lambda_{10}} P_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \cdot \lambda_{n-2,n-1} \cdots \lambda_{0,1}}{\lambda_{n,n-1} \cdot \lambda_{n-1,n-2} \cdots \lambda_{1,0}} P_0,$$

$$P_0 = \left[1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12} \cdot \lambda_{01}}{\lambda_{21} \cdot \lambda_{10}} + \frac{\lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdot \lambda_{23}}{\lambda_{10} \cdot \lambda_{21} \cdot \lambda_{32}} + \cdots + \frac{\lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdots \lambda_{n-1,n}}{\lambda_{10} \cdot \lambda_{21} \cdots \lambda_{n,n-1}}\right]^{-1}.$$

МОДЕЛИ РОЖДЕНИЯ И ГИБЕЛИ

Данные выражения позволяют решать простейшие задачи массового обслуживания.

Формулы Литтла:

$$T_{смо} = \frac{L_{смо}}{\lambda}, \quad T_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda},$$

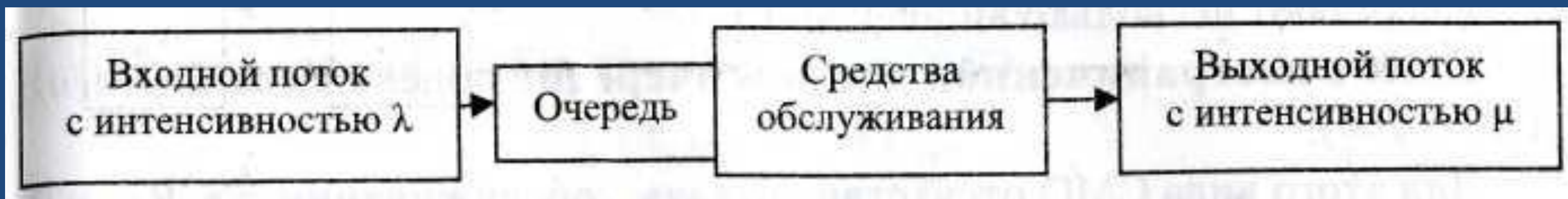
где:

- $T_{смо}$, $T_{оч}$ — среднее время пребывания заявки в СМО и очереди, соответственно;
- $L_{смо}$, $L_{оч}$ — среднее количество заявок (число заявок приходящихся на единицу времени) находящихся в СМО и в очереди соответственно;
- λ — интенсивность потока заявок поступающих в систему.

Системы обслуживания с пуассоновским распределением

- Рассмотрим схематически специализированную систему обслуживания пуассоновского типа, в которой параллельно функциональной *n* идентичных средств обслуживания. В систему поступает ***λ*** заявок в единицу времени.
- Число заявок, находящихся в системе обслуживания, включает тех, кто обслуживается, и тех, кто находится в очереди.

Системы обслуживания с пуассоновским распределением



Структура системы обслуживания определяется шестью параметрами в виде:

$$(a/b/c):(d/e/f),$$

Системы обслуживания с пуассоновским распределением

где:

- ***a*** — тип распределения моментов времени поступления заявок в систему;
- ***b*** — тип распределения времени обслуживания;
- ***c*** — количество параллельно работающих каналов;
- ***d*** — вид дисциплины очереди;
- ***e*** — максимальная емкость системы (количество заявок, находящихся в очереди и принятых на обслуживание);
- ***f***— емкость источника, генерирующего заявки.

Эти обозначения ввели **Кендалл, Ли** и **Таха**.

Стандартными обозначениями для типов распределений входного и выходного потоков (параметры ***a*** и ***b****)* являются: ***M*** — марковское (пуассоновское, экспоненциальное) распределение моментов поступления заявок в систему либо их выхода из нее. Символы ***GD*** (параметр ***d****,* означающий произвольный (общий) тип дисциплины очереди.