ДИСКРЕТНЫЕ И НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Дискретные и непрерывные СВ.
2. Закон распределения дискретной СВ.
3. Числовые характеристики дискретных случайных величин
4. Функция распределения вероятностей случайной величины
5. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Случайной величиной называется переменная величина, которая в зависимости от исхода испытания случайно принимает одно значение из множества возможных значений.

Случайные величины обозначаются прописными буквами X, Y, Z, …, а их возможные значения – соответствующими строчными буквами x, y, z.

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Таким образом, если каждому элементарному событию ω можно поставить в соответствие некоторое число, то говорят, что задана случайная величина.

ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Случайная величина, принимающая значения, которые можно записать в виде конечного набора или счетной последовательности чисел, называется ***дискретной***, т. е. дискретная случайная величина принимает отдельные, изолированные возможные значения, число которых конечно или счетное.

ПРИМЕРЫ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1) число дней в наугад взятом году (365, 366);
2) число родившихся мальчиков среди десяти новорожденных (0,1,2,…,10);
3) число вызовов, поступивших на телефонную станцию за сутки;
4) оценка, которую студент может получить на экзамене;
5) число несчастных случаев на улицах города Минска.

НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Случайная величина, которая может принимать все значения из некоторого числового промежутка, называется *непрерывной случайной величиной.*

ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1) рост человека от 150 до 200 см;
2) температура воздуха в случайно выбранный день;
3) скорость самолета в момент выхода на заданную высоту;
4) время ожидания транспорта.

ДИСКРЕТНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Каждому значению $\boldsymbol{x_n}$ дискретной случайной величины отвечает определенная вероятность $\boldsymbol{p}_n$.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СВ

Соотношение, устанавливающее тем или иным способом связь между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, называется ***законом распределения случайной величины.***

РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СВ

Закон распределения дискретной случайной величины обычно задается в виде таблицы:

$\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$\ldots$
$\boldsymbol{P}$	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_{n-1}	p_n	$\ldots$

РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СВ

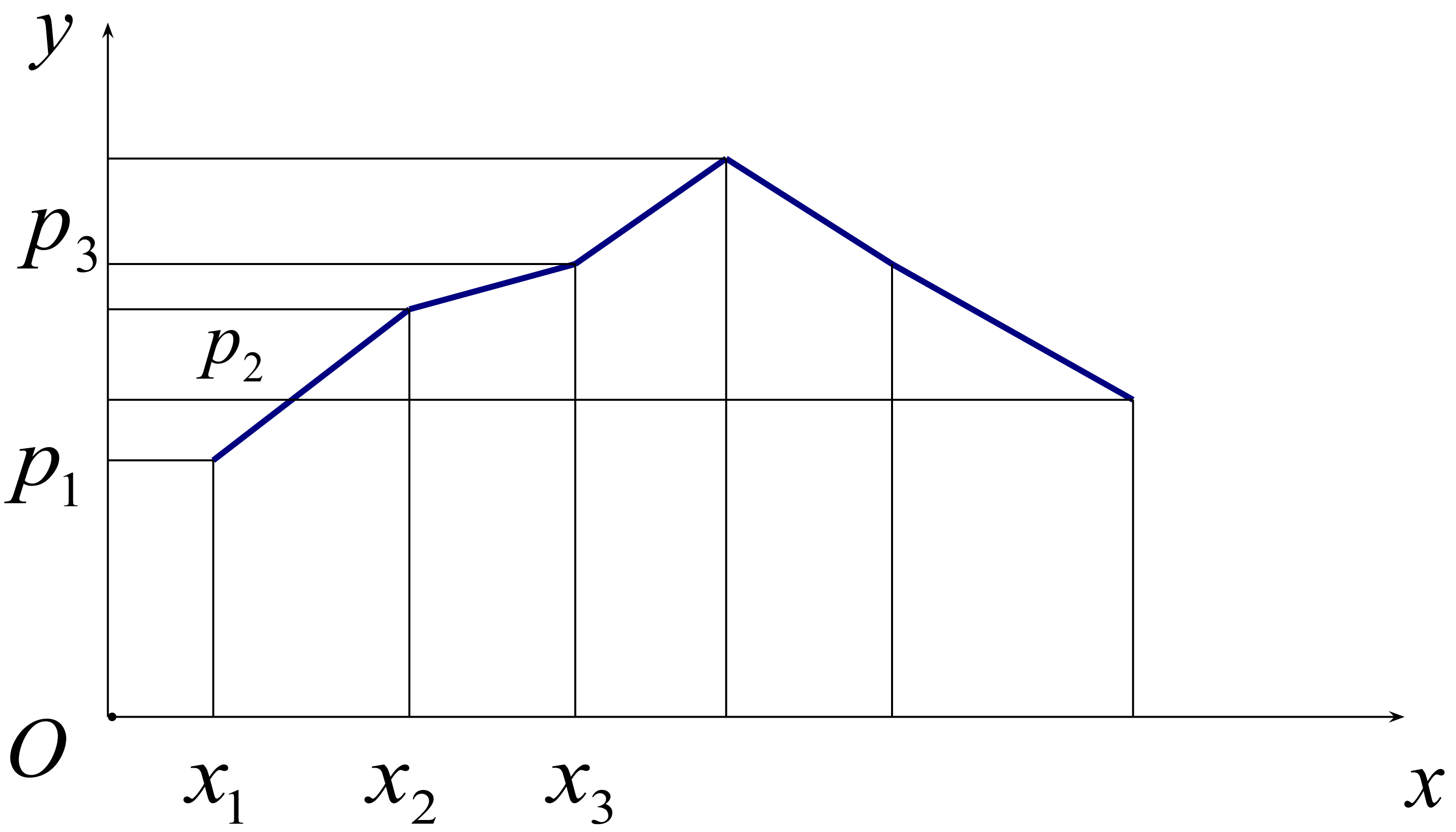
В верхней строке записывают возможные значения x_i случайной величины X, а в нижней – их вероятности $p_i = P(X=x_i)$. Так как события $A_i = \{X=x_i\}$, $i=1,2,\ldots$, образуют полную группу событий, то

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

МНОГОУГОЛЬНИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически: построить точки (x_i, p_i) в декартовой прямоугольной системе координат и соединить их отрезками прямых. *Полученная фигура называется* ***многоугольником распределения***.

МНОГОУГОЛЬНИК РАСПРЕДЕЛЕНИЯ



ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Математическим ожиданием *$MX=M(X)$ дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие вероятности.*

Если дискретная случайная величина X принимает конечное число значений x_1, x_2,…x_n с вероятностями p_1, p_2, …, p_n соответственно, то по определению

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n.$$

ПРИМЕР

Пример. Подбрасывается игральная кость. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины X, равной числу выпавших очков.

Решение. Закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Следовательно, по определению математического ожидания имеем:

$$M(X) = (1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6} = 3,5.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Отметим, что постоянную величину C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую лишь одно значение $X=C$ с вероятностью $P=1$. Поэтому $M(C)=C\cdot 1=C$, т. е. ***математическое ожидание постоянной величины равно самой этой величине***.

СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания, т. е.

$$M(CX) = C\,M(X).$$

2. Математическое ожидание суммы двух случайных величин X и Y равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y).$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY) = M(X)M(Y).$$

ПРИМЕР

Заработная плата имеет след. ряд распределения:

X	80	100	120
P	0,35	0,5	0,15

Найти среднюю зарплату.

Решение. Средняя заработная плата – это математическое ожидание данной случайной величины .

$$MX = 80 \cdot 0{,}35 + 100 \cdot 0{,}5 + 120 \cdot 0{,}15 = 96.$$

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Следует заметить, что математическое ожидание характеризует случайную величину не полностью. Зная математическое ожидание, нельзя сказать, какие значения принимает случайная величина и как они отклоняются от среднего значения.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Бывает, что СВ с равными MX могут существенно различаться по степени близости к нему

X	99	101
P	0,5	0,5

Y	0	200
P	0,5	0,5

MX=100. Хотя в первом случае отклонение от MX незначительно, а во втором значительно.

ДИСПЕРСИЯ

Второй важной особенности СВ является разброс значений этой СВ по отношению к центру её распределения, т.е. по отношению к математическому ожиданию является дисперсия. Обозначается DX, $D(X)$.

Дисперсия – это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от своего математического ожидания, т.е.

$$DX = M(X - MX)^2$$

Чем меньше отклонение, тем меньше и дисперсия, и наоборот.

СВОЙСТВА ДИСПЕРСИИ

1. Дисперсия – величина неотрицательная, т. е.

$$D(X) \geq 0.$$

2. Дисперсия постоянной равна нулю: $D(X) = 0$.
3. Постоянная выносится за знак дисперсии в квадрате: $D(CX) = C^2 D(X)$.
4. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин X и Y равна сумме дисперсий этих величин:

$$D(X+Y) = D(X) + D(Y).$$

5. ***Упрощенное правило вычисления дисперсии.***

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

- Если C – постоянная, то

$$D(X+C) = D(X).$$

ДИСПЕРСИЯ

Пример. В предыдущем примере найдем $D(X)$. Сначала найдём $M(X^2)$. Для этого построим ряд распределения СВ X^2:

X^2	$80^2 = 6400$	$100^2 = 10000$	$120^2 = 14400$
P	**0,35**	**0,5**	**0,15**

$$M(X^2) = 6400 \cdot 0{,}35 + 10000 \cdot 0{,}5 + 14400 \cdot 0{,}15 = 9400.$$

Значит, $D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 9400 - 96^2 = 184.$

СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Квадратный корень из дисперсии случайной величины X называется ее ***средним квадратическим отклонением*** *и обозначается* $\boldsymbol{\sigma}(X)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(X) = \sqrt{D(X)}.$$

СРЕДНЕЕ КВАДРАТИЧЕСКОЕ ОТКЛОНЕНИЕ

Введение среднего квадратического отклонения объясняется тем, что дисперсия измеряется в квадратных единицах относительно размерности самой случайной величины.

Например, если возможные значения некоторой случайной величины измеряются в метрах, то ее дисперсия – в квадратных метрах.

В тех случаях, когда нужно иметь числовую характеристику рассеяния возможных значений той же размерности, что и сама случайная величина, используется среднее квадратическое отклонение.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Дискретная случайная величина может быть задана законом распределения, представляющим собой перечень всех возможных значений этой случайной величины и их вероятностей.

Однако такой способ неприменим для непрерывных случайных величин.

Введение понятия функции распределения вероятностей случайной величины устраняет этот недостаток.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функцией распределения *вероятностей случайной величины* X *называют функцию* $F(x)$, *определяющую вероятность того, что* X *примет значение, меньшее* x:

$$F(x) = P(X < x).$$

СВОЙСТВА ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛЮБОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

1. $0 \le F(x) \le 1$. Это свойство следует из того факта, что функция $F(x)$ есть вероятность.
2. Функция распределения $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.
3. Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал [a,b) равна разности между значениями функции распределения в правом и левом концах этого интервала:
$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a).$$
4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу (a, b), то
$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le a, \\ 1, & при\ \ x \ge b. \end{cases}$$

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функция распределения дискретной случайной величины X *имеет вид*:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k),$$

где суммируются вероятности тех значений случайной величины X, *которые меньше* x.

ПРИМЕР. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ X ЗАДАН ТАБЛИЦЕЙ:

X	0	1	2
P	0,1	0,4	0,5

Найдите функцию распределения случайной величины X

Решение. Если $x \le 0$, то событие $A=\{X < x\}$ является невозможным (случайная величина не принимает значений, строго меньших нуля) и, следовательно, $F(x) = 0$.

Если $0<x\le1$, то $F(x) = P(X) = 0{,}1$. Действительно, в данной ситуации случайная величина X может принять только одно значение, находящееся левее 1, – значение 0 с вероятностью 0,1.

Если $1 < x \le 2$, то $F(x) = P(X=0) + P(X=1) = 0{,}1+0{,}4=0{,}5$. Действительно, $F(x)$ равно вероятности события $A = \{X < x\}$, которое может быть осуществлено, когда случайная величина X примет значение 0 или значение 1. Поскольку два этих события несовместны, то по теореме сложения вероятность события $A = \{X < x\}$ равна сумме вероятностей событий $A_1 = \{X = 0\}$ и $A_2 = \{X = 1\}$.

Если $x > 2$, то $F(x) = 1$, так как событие $A = \{X < x\}$ является достоверным.

ПРИМЕР

Таким образом, получаем функцию распределения вида:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 0{,}1 & \text{при } 0< x\le 1,\\ 0{,}5 & \text{при } 1< x\le 2,\\ 1 & \text{при } x>2.\end{cases}$$

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

*Случайная величина X называется **непрерывной**, если существует функция **p(x)** такая, что при любом* $x \in \boldsymbol{R}$

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\,dt.$$

*Функция **p(x)** входящая в последнее равенство, называется **плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины** X.*

*График функции **p(x)** называется **кривой распределения**.*

ТЕОРЕМА

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X *примет значение, принадлежащее полуинтервалу* $[a,b)$ *равна определенному интегралу от ее плотности распределения, взятому в пределах от* a *до* b:

$$P(a \le X < b) = \int_a^b p(x)\,dx.$$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины** X, возможные значения которой принадлежат отрезку* $[a, b]$, *а плотностью распределения вероятностей является функция* $\boldsymbol{p(x)}$ называют определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xp(x)\,dx.$$

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Дисперсией непрерывной случайной величины *X* *называют математическое ожидание квадрата ее отклонения. Если возможные значения* *X* *принадлежат отрезку* [*a*, *b*], *а плотностью распределения вероятностей является функция* ***p(x)***, *то*

$$D(X)=\int_a^b x^2 p(x)\,dx-(M(X))^2,$$

ЗАМЕЧАНИЕ

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины обладают теми же свойствами, что и математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины.

Для непрерывной случайной величины X *среднее квадратическое отклонение* $\sigma(X)$ определяется, как и для дискретной случайной величины, формулой

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$