17.5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ДВОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ

Пусть функция f(x,y) непрерывна в некоторой замкнутой ограниченной области D, и существует

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

Предположим, что возможен переход к новым переменным:

$$(x,y) \Rightarrow (u,v)$$

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$

$$u = u(x, y)$$
$$v = v(x, y)$$

ТЕОРЕМА.

Пусть преобразование $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ переводит замкнутую ограниченную область D в замкнутую ограниченную область D^* и является взаимно однозначным.

Если функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ имеют в D^* непрерывные частные производные, и выражение

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

то имеет место

формула замены переменной в двойном интеграле:

$$\iint_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint_{D^*} f\left[x(u,v),\, y(u,v)\right]\cdot\left|\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}\right| dudv$$

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

якобиан перехода

ПРИМЕРЫ.

1

Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D \sin(x+y)\,dxdy$$

где область D ограничена линиями

$$x = y, \quad x + y = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$

РЕШЕНИЕ.

Введем новые переменные:

$$x + y = u$$
$$x - y = v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+v}{2} \\ y = \dfrac{u-v}{2} \end{cases}$$

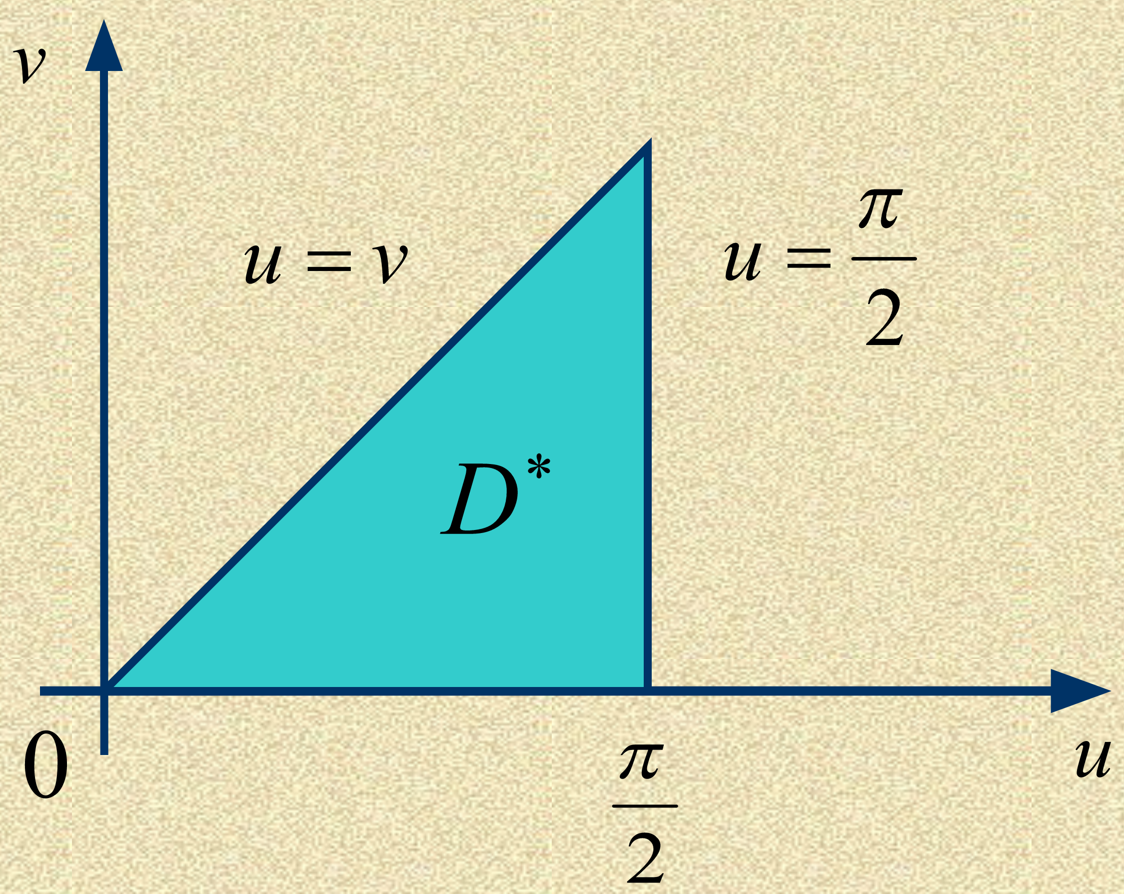
Тогда прямая $x + y = \frac{\pi}{2}$ **переходит в прямую**

$$\boxed{u = \frac{\pi}{2}}$$

Прямая $x = y$ **переходит в прямую** $\boxed{v = 0}$

Прямая $y = 0$ **переходит в прямую** $\boxed{v = u}$

Область D^* –треугольник:



Найдем якобиан:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{\partial(xy)}{\partial(uv)}\right|=\frac{1}{2}$$

$$\iint\limits_{D} \sin(x+y)\,dxdy = \frac{1}{2}\iint\limits_{D^*} \sin u\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} du \int_0^{u} \sin u\,dv =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} du \cdot \sin u \cdot v\Big|_0^{u} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} du \cdot \sin u \cdot u =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} u \cdot \cos u\Big|_0^{\pi/2}}_{0} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos u\,du = \frac{1}{2}\sin u\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}$$

2

Вычислить двойной интеграл

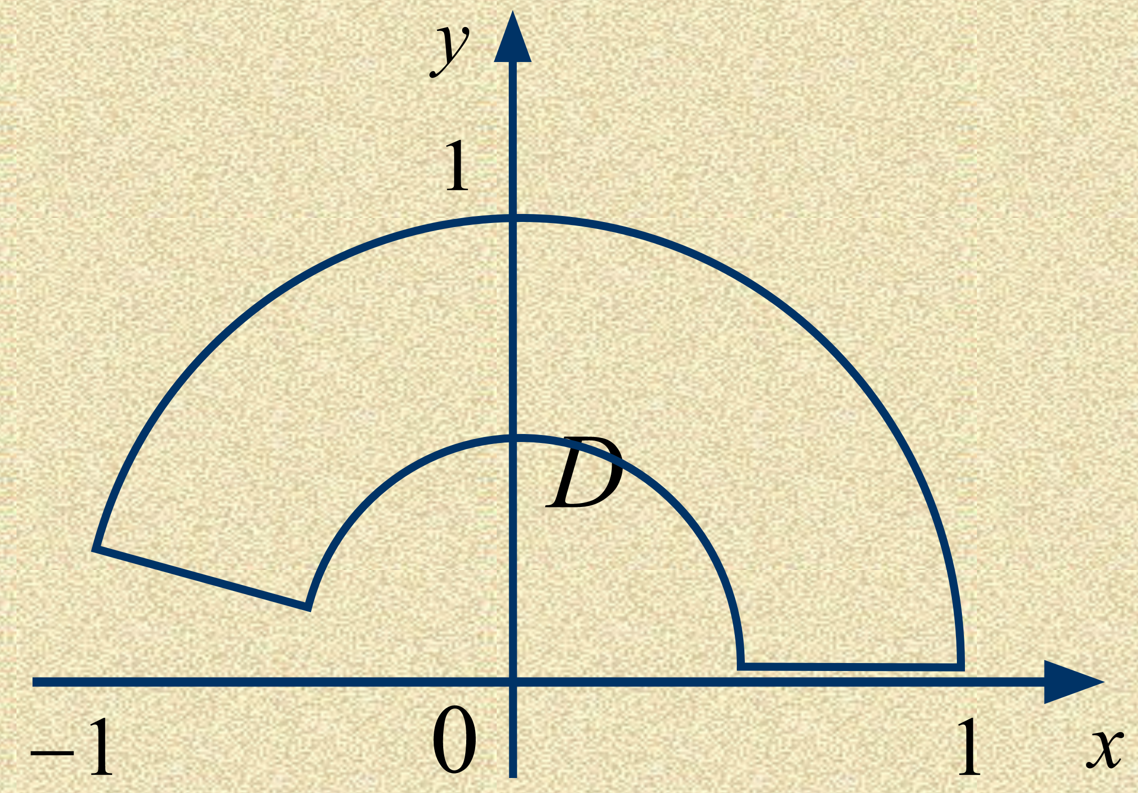
$$\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$$

где область D ограничена осью x и верхней полуокружностью

$$x^2+y^2=1$$

РЕШЕНИЕ.

Область *D* –полуокружность:



Введем новые переменные:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi \\ y = \rho \cdot \sin\varphi \end{cases}$$

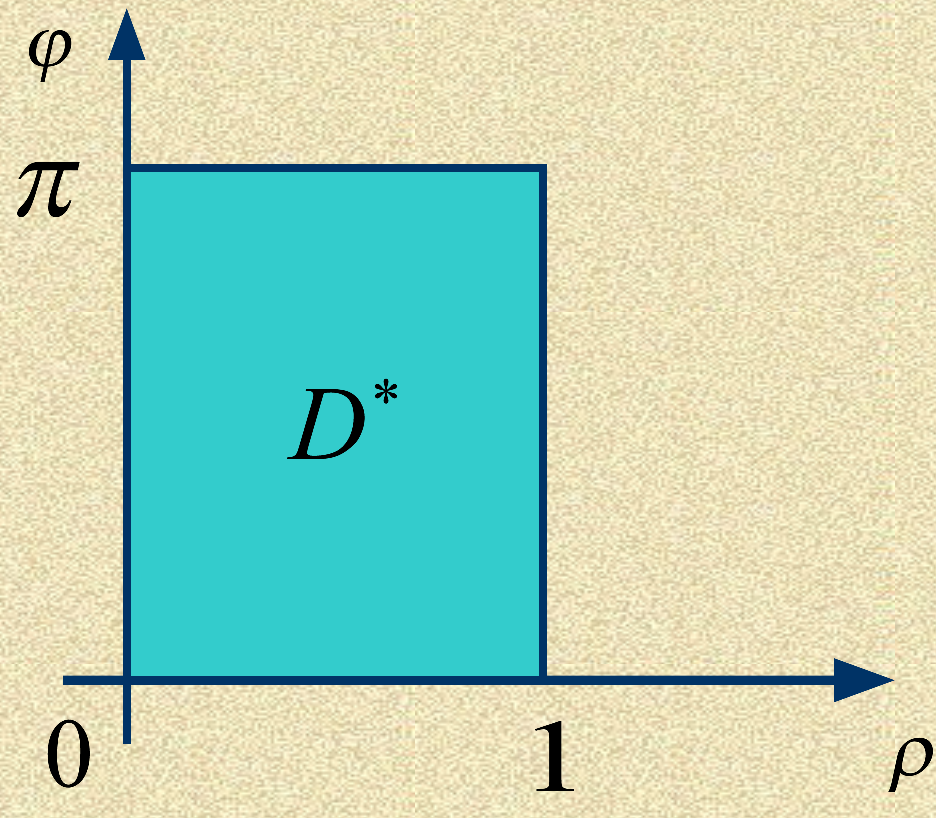
$$0 \le \varphi \le \pi$$

Прямая $y = 0$ **переходит в прямую** $\boxed{\varphi = \pi}$

Полуокружность $x^2 + y^2 = 1$

переходит в прямую $\boxed{\rho = 1}$

Область D^* –прямоугольник:



Найдем якобиан:

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos\varphi \qquad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho\sin\varphi \qquad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho\cos\varphi$$

$$\frac{\partial(xy)}{\partial(\rho\varphi)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{vmatrix} = \rho\cos^2\varphi + \rho\sin^2\varphi = \rho$$

$$\left|\frac{\partial(xy)}{\partial(\rho\varphi)}\right| = \rho$$

$$\iint\limits_{D} e^{x^2+y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D^*} \rho\cdot e^{\rho^2}\,d\rho d\varphi = \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho\cdot e^{\rho^2}\,d\rho =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2}e^{\rho^2}\right)\Bigg|_0^1 = \int\limits_0^{\pi} d\varphi\left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}(e-1)$$