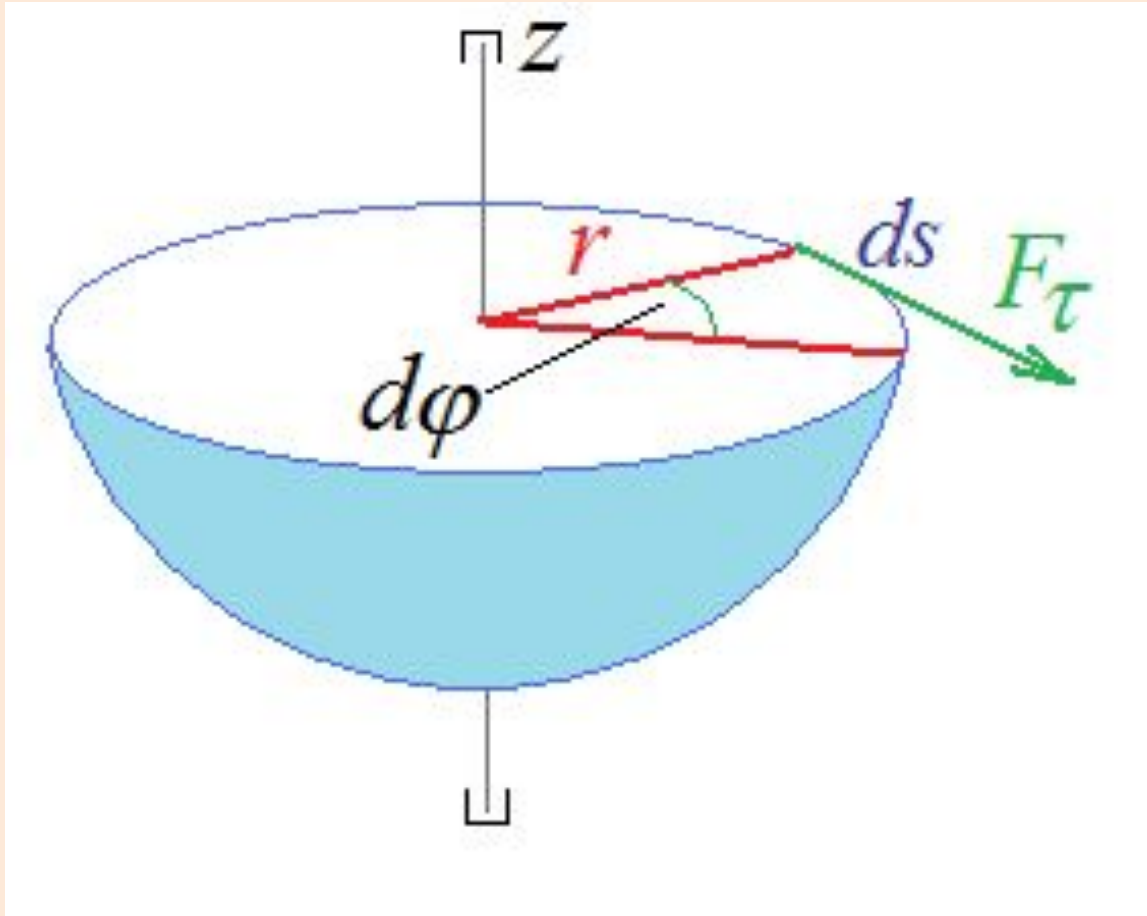


Работа при вращательном движении



Элементарная работа

$$dA = F_{\tau} ds$$

$$ds = r d\varphi$$

$$dA = F_{\tau} r d\varphi$$

$$dA = M_z d\varphi$$

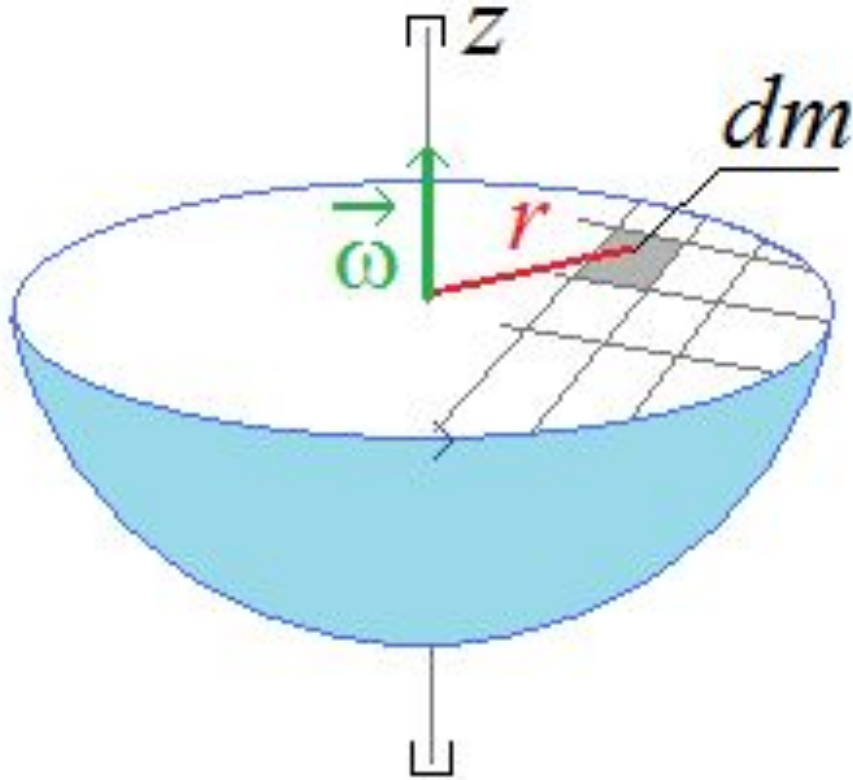
Полная
работа

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi$$

Если $M_z = \text{const.}$, то

$$A = M_z \Delta\varphi$$

Кинетическая энергия вращения



Для каждой
МТ

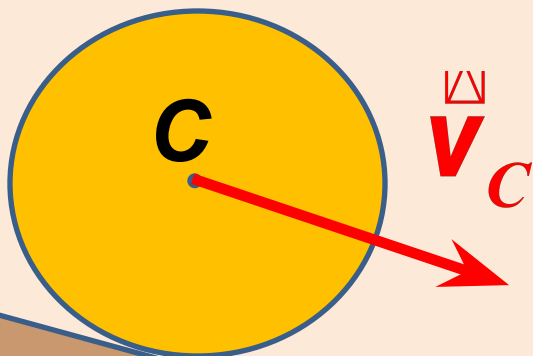
$$dW_k = \frac{dm}{2} v^2$$

$$dW_k = \frac{dm \cdot r^2 \omega^2}{2}$$

$$W_k = \int dW_k = \frac{\omega^2}{2} \int r^2 dm \qquad W_k = \frac{I \omega^2}{2}$$

Для катящегося
тела

$$W_k = \frac{mv_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}$$



$W_k^{пост.}$

$W_k^{вр}$

Основной закон динамики вращательного движения

Тангенциальная сила F_t ,
совершая работу $dA = M_z d\varphi$
увеличивает кинетическую
энергию тела на dW_k .

$$M_z d\varphi = dW_k$$

Справа распишем

$$dW_k = d\left(\frac{I\omega^2}{2}\right) = I\omega d\omega$$

Возьмем производную по времени

$$M_z \frac{d\varphi}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\varphi}{dt} \varepsilon$$

Сократив на $d\phi/dt$, получим
основной закон динамики
вращательного движения:

$$M_z = I\varepsilon$$

Если $\overset{\square}{F} = \overset{\square}{F}_\tau$, то справедлива
векторная форма:

$$\overset{\square}{M} = I \overset{\square}{\varepsilon}$$

Этот закон вращательного
движения аналогичен II-му
закону Ньютона для
поступательного движения.

Физический смысл момента

инерции: если на тела, обладающие разными моментами инерции подействовать одним и тем же моментом силы, то тело, обладающее **большим** моментом инерции, получит **меньшее** угловое ускорение.

Момент инерции есть мера инертности тела для вращательного движения.

Уравнение
моментов
Момент импульса твердого
тела

$$L_z = I_z \omega$$

Возьмем производную по
времени:

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \varepsilon = M_z$$

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad \text{или} \quad \dot{L}_z = M_z$$

В векторной
форме:

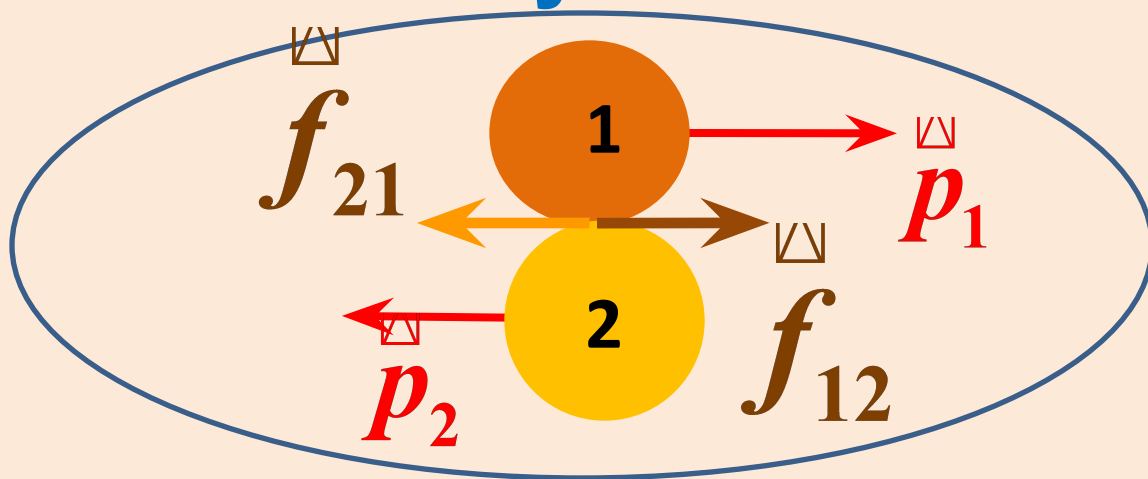
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Закон сохранения момента

импульса

Рассмотрим замкнутую систему тел.

Сумма моментов внешних сил равна нулю.



f_{12} и f_{21} — силы взаимодействия

$$\vec{M}_{12} = \frac{d\vec{L}_1}{dt}, \quad \vec{M}_{21} = \frac{d\vec{L}_2}{dt}, \quad \vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}$$

**Полный момент импульса
системы тел**

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$$

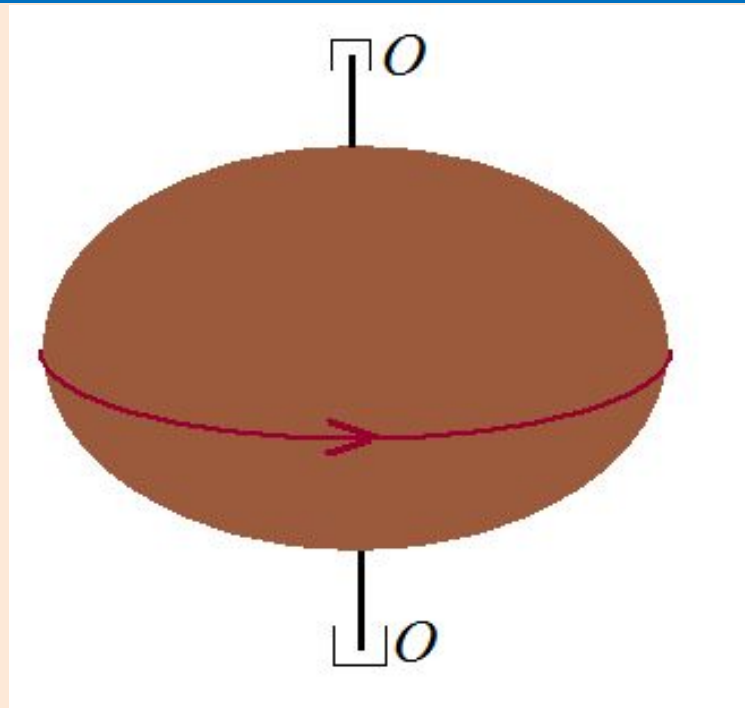
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{L}_1 + \vec{L}_2)}{dt} = \vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = \mathbf{0}$$

В замкнутой системе тел
полный момент импульса
сохраняется.

$$\frac{dL}{dt} = 0 \text{ или } L = \text{const.}$$

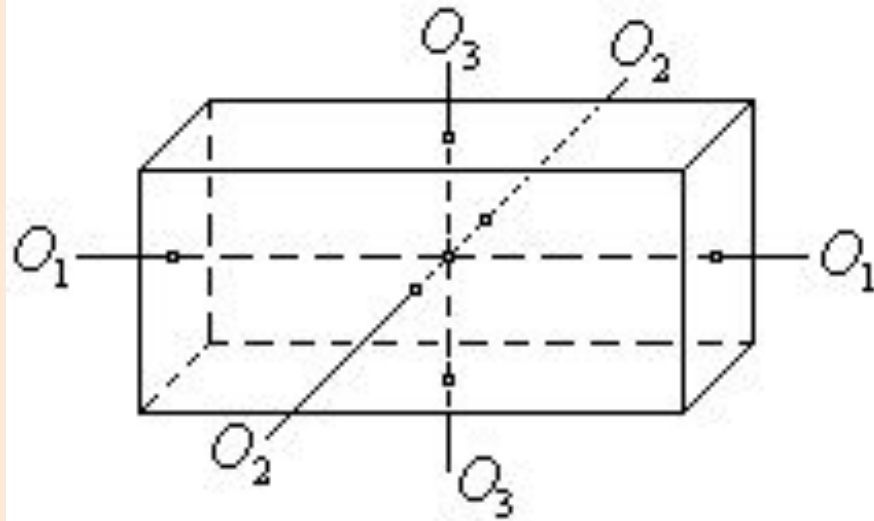
Свободные и главные оси вращения

Ось вращения, положение которой в пространстве остается неизменным в отсутствие внешних сил, называется свободной осью тела.

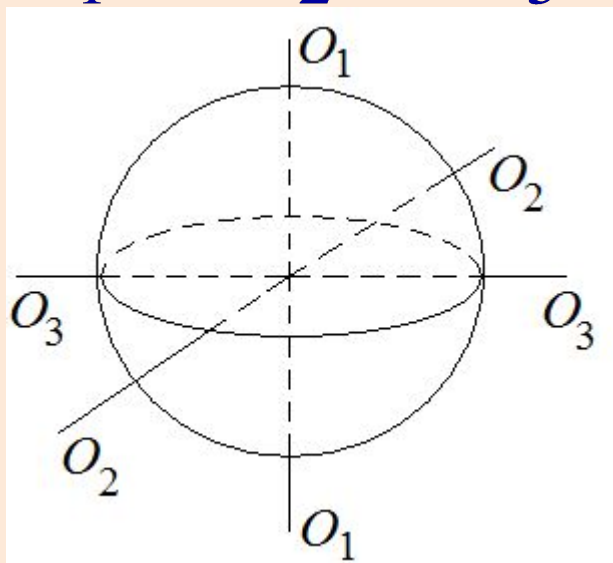


Для любого тела существуют три взаимно перпендикулярные, проходящие через центр инерции оси, которые могут служить свободными осями. Их называют главными осями инерции.

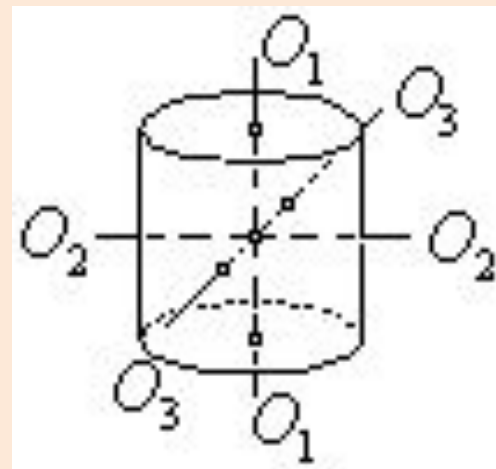
Моменты инерции относительно главных осей называют главными моментами инерции.



$$I_1 \neq I_2 \neq I_3$$



$$I_1 = I_2 = I_3$$



$$I_2 = I_3$$



Симметричный волчок



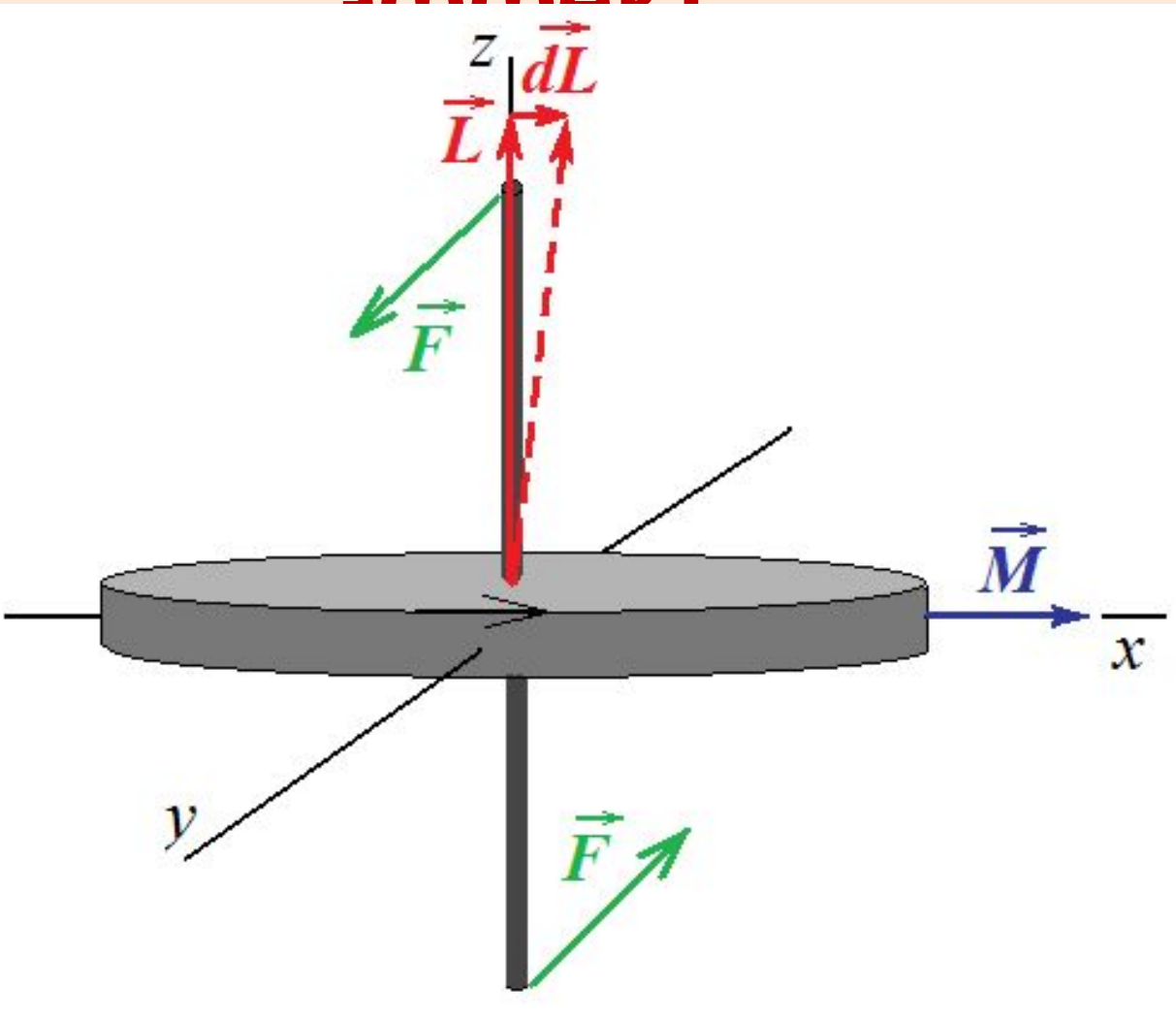
Шаровой волчок

Гироскоп ы



Гироскоп - это
массивное
симметричное тело,
вращающееся с
большой угловой
скоростью вокруг
оси симметрии.

Гироскопический эффект



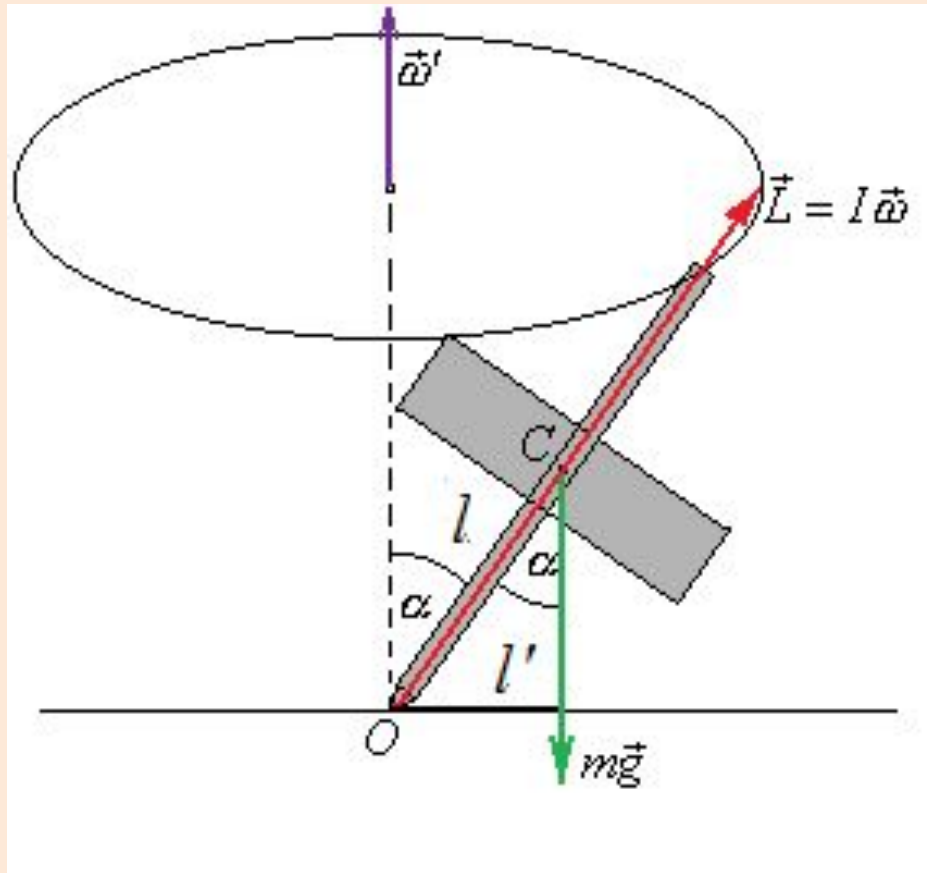
$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$d\vec{L} = \vec{M} dt$$

**Движение оси, вдоль
которой направлен момент
импульса гироскопа, под
действием внешних сил,
называют
прецессией.**

Прецессия гироскопа под действием силы тяжести.



$$d\varphi = \frac{|dL|}{L}$$

$$|dL| = Mdt$$

$$d\varphi = \frac{Mdt}{L}$$

$$\omega' = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L}$$

ω' — угловая скорость прецессии гироскопа

$$\overset{\boxminus}{M} = \left[\overset{\boxminus}{\omega}', \overset{\boxminus}{L} \right]$$

$$M = \omega' L \sin \alpha$$

$$M = mg\ell' = mg\ell \sin \alpha$$

$$\omega' L \sin \alpha = mg\ell \sin \alpha$$

$$\omega' = \frac{mg\ell}{L}$$

