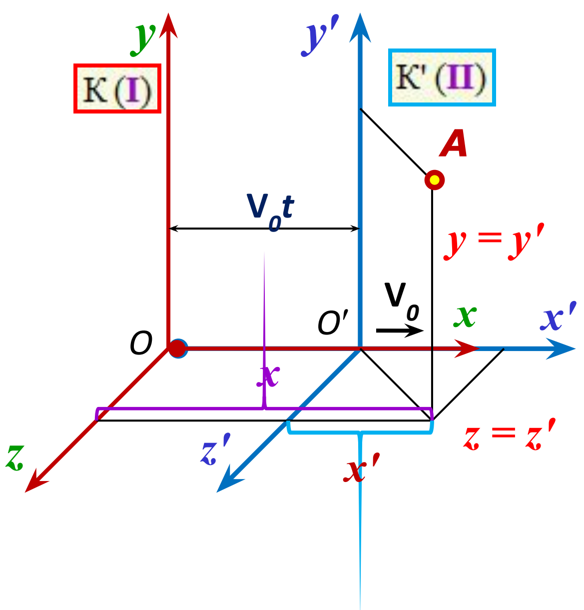
Кафедра физики БГТУ
доцент Крылов Андрей Борисович

Часть I.
ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ **РЕЛЯТИВИСТСКОЙ** МЕХАНИКИ

Лекция 11 (2 сем).
Элементы релятивистской механики-2



1. Импульс релятивистской частицы.
2. Законы Ньютона в релятивистской механике.
3. Кинетическая энергия. Энергия покоя. Закон взаимосвязи массы и энергии.
4. Связь между энергией и импульсом частицы.
5. Релятивистские инварианты

2017

1. Импульс релятивистской частицы

- В классической механике импульс : $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$, где m_0 - масса частицы.

- **Проекции импульса** в системе *K* и *K'*, движущейся относительно *K* вдоль оси *x* со скоростью υ_0 равны:

в системе *K* :
$$p_x = m_0\frac{dx}{dt} \qquad p_y = m_0\frac{dy}{dt} \qquad p_z = m_0\frac{dz}{dt}$$

в системе *K'* :
$$p_{x'} = m_0\frac{dx'}{dt'} \qquad p_{y'} = m_0\frac{dy'}{dt'} \qquad p_{z'} = m_0\frac{dz'}{dt'}$$

- В случае преобразований Галилея $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0$ и $\vec{p}' = \vec{p} - m_0\vec{\upsilon}_0$

Поэтому проекции:

по оси Ox
$$p_{x'} = p_x - m_0\upsilon_0$$

по оси Oy
$$p_{y'} = p_y$$

по оси Oz
$$p_{z'} = p_z$$

Вывод: проекции импульса на оси *y* и *z* **не зависят от скорости** движения системы *K'*.

Импульс релятивистской частицы-2

- В классической механике импульс : $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$, где m_0 - масса частицы.

Вспомним **преобразования Лоренца для скоростей**:

$$\boxed{\upsilon_x = \frac{\upsilon'_x + \upsilon_0}{1 + \upsilon_0\upsilon'_x / c^2}} \qquad \boxed{\upsilon_y = \frac{\upsilon'_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \upsilon_0\upsilon'_x / c^2}} \qquad \boxed{\upsilon_z = \frac{\upsilon'_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \upsilon_0\upsilon'_x / c^2}}$$

Применим преобразования Лоренца к определению **импульса** для системы K':

$$p_{x'} = \frac{p_x - m_0\upsilon_0}{1 - \upsilon_0\upsilon_x / c^2} \qquad p_{y'} = \frac{p_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \upsilon_0\upsilon_x / c^2} \qquad p_{z'} = \frac{p_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \upsilon_0\upsilon_x / c^2}$$

- Проекции импульса на оси y' и z' зависят от скорости υ_0 (**не инварианты!!!**):

$$p_{y'} \neq p_y \qquad p_{z'} \neq p_z$$

- Для закона сохранения импульса необходимо: **1)** чтобы составляющие импульса по осям y и z **не зависели от скорости** υ_0 ; **2)** чтобы выражение для импульса преобразовывалось **в соответствии с преобразованиями Лоренца**.

Проекции импульса релятивистской частицы

- Из преобразований Лоренца **для координат**:

$$x' = \frac{x - \upsilon_0 t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t' = \frac{t - \dfrac{\upsilon_0}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

следует, что ***dy'*** и **dz' не зависят** от скорости υ_0 движения системы ***K'*** относительно ***K*.**

- Кроме того, **вспомним, что собственное время τ**, связанное с движущимся телом, **не зависит от системы отсчета**.
- Тогда производные: $\dfrac{dy}{d\tau} = \dfrac{dy'}{d\tau}$ и $\dfrac{dz}{d\tau} = \dfrac{dz'}{d\tau}$
- Поэтому проекции релятивистского импульса:

$$p_x = m_0 \frac{dx}{d\tau}, \quad p_y = m_0 \frac{dy}{d\tau}, \quad p_z = m_0 \frac{dz}{d\tau}$$

- Вспомним также:

$$d\tau = dt\sqrt{1-\beta^2}$$

- Тогда проекции импульса можно выразить только через координаты и время в одной и той же системе отсчета ***K***:

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dx}{dt}, \quad p_y = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dy}{dt}, \quad p_z = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{dz}{dt}$$

Проекции импульса релятивистской частицы-2

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dx}{dt}, \quad p_y = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dy}{dt}, \quad p_z = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{dz}{dt}$$

В векторном виде уравнения примут вид:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{или} \quad \vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}$$

Величины в релятивистской механике называются **:**

m_0 -- **масса покоя**, ***m*** -- **релятивистская масса**.

Вывод: в релятивистской динамике масса частицы ***m*** зависит от скорости движения:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

При $\upsilon \ll c$ имеем $m \approx m_0$, что и принято в классической механике.

2. Законы Ньютона в релятивистской механике

- **Первый закон Ньютона**, являющийся выражением принципа относительности, **сохраняет свою классическую формулировку** в релятивистской динамике.
- Выражение для **второго закона Ньютона** в релятивистской механике также сохраняет свою классическую формулировку при условии, что импульс определяется по формуле:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\right)$$

Подробнее ниже

Это релятивистское уравнение инвариантно относительно преобразований Лоренца.

- **Третий закон Ньютона** в релятивистской динамике справедлив только для контактных сил.
  - **В классической механике** для сил, действующих на расстоянии, предполагается **мгновенная передача взаимодействия** без материального посредника.
  - Это несовместимо с релятивистским положением о том, что максимальная скорость передачи взаимодействия **не может быть больше** скорости света в вакууме.
  - Поэтому из-за взаимодействий с конечной скоростью распространения **третий закон Ньютона в своей классической формулировке неприменим**.

3. Виды энергии в релятивистской механике

Найдем выражение **для энергии** в релятивистской механике

- **Согласно второму постулату Эйнштейна** в любых **инерциальных** системах отсчета все физические явления при одних и тех же условиях протекают **одинаково**.
- **Второй закон динамики** будет выполняться во всех инерциальных системах отсчета, в том числе и в системах движущихся со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, если под импульсом понимать:

$$\vec{p} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\vec{\upsilon}$$

Иными словами, **второй закон динамики** является **неизменным** (**инвариантным**) **относительно преобразований Лоренца**.

- Поэтому **релятивистское выражение второго закона Ньютона** имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \vec{F}$$

Получим релятивистское выражение для энергии

- Для этого выражение умножим **скалярно** на перемещение частицы

$$d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$$

Тогда получим:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{\upsilon}dt = \vec{F}d\vec{r}}$$

Полная и кинетическая энергия в релятивистской механике-2

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{\upsilon}dt = \vec{F}d\vec{r}}$$

- Правая часть равенства представляет собой работу **δA**, совершаемую над частицей за время ***dt***.
- Величина этой работы равна **приращению** кинетической энергии частицы $dW_к$:

$$dW_к = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)\vec{\upsilon}dt = \vec{\upsilon}d\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Преобразуем: $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = d\left(\frac{\upsilon^2}{2}\right)$ и помним: $\beta = \frac{\upsilon}{c}$

После преобразований формулы получим:

$$dW_к = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Подробный вывод формулы в электронном конспекте ***Бобрович и др .2009***

$\boxed{\beta = \frac{\upsilon}{c}}$

Проинтегрируем данное выражение

$$dW_к = d\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \Rightarrow W_к = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const}$$

- **Постоянная интегрирования** = $(-m_0 c^2)$, поскольку при $\upsilon = 0$ кинетическая энергия равна **нулю**.
- Подставив это выражение вместо постоянной, получим формулу для кинетической энергии:

$$W_к = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - m_0c^2$$

Полная энергия свободной частицы:

Энергия покоя:

(*) $$\boxed{E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2}$$ так как $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$

$$E_0 = m_0\, c^2$$

Уравнение (*) выражает один из важнейших законов природы – **закон взаимосвязи (пропорциональности) массы и энергии**: **полная энергия системы равна произведению ее полной релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме**.

$$\boxed{E = mc^2}$$

Закон Эйнштейна

3. Полная E и кинетическая энергия $W_к$

Таким образом

Кинетическая энергия $W_к$ в релятивистской механике представляет собой **разность** между **полной энергией** и **энергией покоя**, т. е.

$$W_к = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = \Delta mc^2$$

где Δm - **изменение массы частицы** в результате движения

Полная энергия свободной частицы:

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = mc^2$$

Энергия покоя:

$$E_0 = m_0 c^2$$

4. Взаимосвязь между энергией и импульсом для релятивистских тел

- Для установления связи между энергией и релятивистским импульсом воспользуемся выражением для релятивистской массы ***m***:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Возведем в квадрат это выражение:

$$\left(m\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}\right)^2 = m_0^2 \Rightarrow m^2c^2 - m^2\upsilon^2 = m_0^2c^2$$

- Домножим на **c²** :

$$m^2c^4 - m^2\upsilon^2c^2 = m_0^2c^4 \Rightarrow E^2 - p^2c^2 = E_0^2$$

$$E = mc^2$$

Полная энергия

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$$

Импульс

$$E_0 = m_0 c^2$$

Энергия покоя

$$E^2 - p^2c^2 = E_0^2 = \mathrm{inv}$$

Энергия покоя является **инвариантом**

только в квадрате

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2 \Rightarrow E = \sqrt{E_0^2 + p^2c^2}$$

Или импульс через энергию:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2}$$

Взаимосвязь между энергией и импульсом для релятивистских тел -2

Импульс через полную энергию: $$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-E_0^2}$$

Импульс через кинетическую энергию:

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{E^2-E_0^2}=\frac{1}{c}\sqrt{\underbrace{(E-E_0)}_{W_к=E-E_0}(E+E_0)}=\frac{1}{c}\sqrt{W_к(W_к+2E_0)}$$

$W_к = E - E_0$ **кинетическая энергия**

Из

$$E=\sqrt{E_0^2+p^2c^2}$$

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Импульс:

$$\vec{p}=\frac{E\vec{\upsilon}}{c^2}$$

Для фотона

υ= c,

E = hν

Импульс: $$p=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}$$

- **Энергия покоя** фотона $E_0 = 0$ и масса покоя фотона: $$m_0=\frac{E_0}{c^2}=0$$

При переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой скорость тела, его масса, импульс и полная энергия **изменяются**.

- Но **не изменяется относительно преобразования Лоренца** (т. е. одинакова во всех инерциальных системах отсчета) **разность** :

$$W^2-(pc)^2=m_0^2c^4$$

5. Релятивистские инварианты

- Величина, которая не меняет своего значения при переходе из одной системы координат в другую, называется **инвариантом**.
- Рассмотрим два события **1** и **2**, которые в инерциальной системе отсчета K совершаются соответственно в точке **A** (x_1, y_1, z_1) в момент времени t_1 и в точке **B** (x_2, y_2, z_2) в момент времени t_2.
- В системе отсчета K' эти события происходят в точке **A** (x_1', y_1', z_1') в момент времени t_1' и в точке **B** (x_2', y_2', z_2') в момент времени t_2'.
- С помощью формул **преобразования Лоренца** можно показать, что при переходе из одной инерциальной системы в другую **выполняется равенство**:

$$l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2 = l_{12}'^2 - c^2 t_{12}'^2$$

где:

$$l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$l_{12}'^2 = (x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2$$

– квадраты расстояний между точками **A** и **B** в системах K и K'

$$t_{12} = t_2 - t_1$$

$$t_{12}' = t_2' - t_1'$$

– промежутки времени между событиями в системах K и K'

Тогда **интервал** между двумя событиями: $s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} \Rightarrow s_{12} = s_{12}'$

Интервал между двумя событиями ***одинаков во всех инерциальных системах отсчета***

5. Релятивистские инварианты -2

- **В классической физике неизменным** является расстояние между двумя точками пространства.
- Как следует из $$l_{12}^2 - c^2 t_{12}^2 = l_{12}'^2 - c^2 t_{12}'^2$$
  - расстояние l_{12} **не изменяется** при переходе из одной инерциальной системы координат в другую при равенстве промежутков времени между событиями t_{12}' и t_{12}.
  - Однако **в релятивистской физике** эти промежутки времени равны только при $v = 0$.
  - Таким образом, интервал $$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$$ является **релятивистским инвариантом**.
- Интервал в системе отсчета, связанной с **равномерно движущимся телом** равен:

$$s^2 = c^2 t_0^2$$

, где t_0 – время в собственной системе отсчета (**собственное время**).

Вывод: собственное время t_0 **инвариантно** по отношению к любой инерциальной системе.

- **Релятивистскими инвариантами** также являются **скорость света в вакууме**, энергия покоя $m_0 c^2$, соотношение между полной энергией и импульсом, масса покоя m_0.

Суммируем про инварианты

Релятивистскими инвариантами являются:

1. **интервал** между двумя событиями $s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$
2. собственное время t_0 по отношению к любой инерциальной системе.
3. **скорость света в вакууме c**,
4. масса покоя m_0
5. **энергия покоя** $E_0 = m_0 c^2$,
6. соотношение между полной энергией и импульсом:

$$W^2 - (pc)^2 = m_0^2 c^4$$

Спасибо за внимание!