Лекция 2-13.

12.4. Системы дифференциальных уравнений.

12.4.1. Общие определения. Нормальные системы дифференциальных уравнений.

- Существуют процессы, где одной функции недостаточно для описания процесса. Далее
  t - независимая переменная;
  $x_1(t),\ldots,x_n(t)$ (или $x(t),\ y(t),\ z(t)$ если функций не больше трех) - неизвестные функции.

Определение. Системой дифференциальных уравнений называют совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные, искомые функции и их производные.

Примеры.

- 1) $\begin{cases} x' = 2x + y + t + 1, \\ y' = 3x - 4y + 6t. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} tx_1'' + 3x_2' - 2x_1x_3 = 0, \\ 2x_2'' + x_3'' - 2tx_1 = 0, \\ x_3' + 2x_1 + tx_2 = 0. \end{cases}$
- Решением системы дифференциальных уравнений называют совокупность функций $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$, которая при подстановке в уравнения превращает их в тождества.
- **Определение.** Нормальной системой дифференциальных уравнений называется система уравнений вида

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \dots, x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Многие системы дифференциальных уравнений можно привести к нормальной системе.

- **Пример.** $$\begin{cases} x' + 2y' - x = 0, \\ x' - 3y' + y = t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{5}\left(3x - 2y + 2t\right), \\ y' = \dfrac{1}{5}\left(x + y - t\right). \end{cases}$$

- Некоторые системы дифференциальных уравнений нельзя привести к нормальной системе. Их рассматривать не будем.
- **Пример.** $$\begin{cases} x' + y' - tx = 0, \\ x' + y' + y = 0. \end{cases}$$

Система дифференциальных уравнений, содержащая производные высших порядков, может быть приведена к нормальной системе.

- **Пример.** $\begin{cases} x_1'' + tx_2 = 0, \\ x_2'' + 2x_1' - x_2 = 0. \end{cases}$
- Введем дополнительные функции $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4. \end{cases}$
- Тогда

$$\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_4, \\ x_3' = -tx_2, \\ x_4' = x_2 - 2x_3. \end{cases}$$

- Одно дифференциальное уравнение n - го порядка может быть сведено к нормальной системе дифференциальных уравнений.
- **Пример.** $x''' = f\left(t, x, x', x''\right).$

$$y = x',\ z = y' = x''.$$

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = f\left(t, x, y, z\right). \end{cases}$$

Нормальная система дифференциальных уравнений, обычно, может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен числу уравнений системы.

- **Пример** $\begin{cases} x' = y, \\ y' = z, \\ z' = x - y + z. \end{cases}$ $x'' = y' = z,\ x''' = z' = x - y + z,\ \Rightarrow$ $\Rightarrow x''' = x - x' + x''.$

$$r^3 - r^2 + r - 1 = \left(r^2 + 1\right)\left(r - 1\right) = 0.$$

$$r_{1,2} = \pm i,\ \alpha = 0,\ \beta = 1,\ s = 1. \qquad r_3 = 1,\ \alpha = 1,\ \beta = 0,\ s = 1.$$

$$x = C_1 e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t.$$

$$y = C_1 e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t,\ z = C_1 e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t.$$

Обратный случай, когда система дифференциальных уравнений не может быть сведена к одному дифференциальному уравнению.

- **Пример**

$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$$

- Первое уравнение не зависит от остальных.

$$x' = x, \;\; y'' = z' = y.$$

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \; z = y' = C_1 e^t - C_2 e^{-t}, \; x = C_3 e^t.$$

Теорема.

- Общее решение нормальной системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(t, x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$ имеет вид $\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \varphi_n(t, C_1, \ldots, C_n), \end{cases}$ где $C_1, \ldots, C_n$ - произвольные постоянные.
- $C_1, \ldots, C_n$ могут входить не во все уравнения.
- Задание начальных условий $x_1\big|_{t=t_0} = x_{10}, \ldots,\ x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$

дает частное решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(t_0, C_1, \ldots, C_n) = x_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(t_0, C_1, \ldots, C_n) = x_{n0}. \end{cases}$$

Теорема.

- Если правые части нормальной системы дифференциальных уравнений непрерывны вместе со своими частными производными в окрестности значений $t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, то в достаточно малом интервале $\left[t_0 - h, t_0 + h\right]$ существует единственная система функций $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, являющаяся решением системы и удовлетворяющая начальным условиям.

12.4.2. Системы линейных дифференциальных уравнений.

- Однородная система линейных дифференциальных уравнений $\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n, \end{cases}$
- где $a_{ij}(t)$ - непрерывные функции.
- 1) Если известно частное решение системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t), \ldots, x_{n1}(t)$, то $C_1 x_{11}(t), \ldots, C_1 x_{n1}(t)$ тоже является решением системы, где C_1 - произвольная постоянная.

2) Если известны два частных решения системы линейных дифференциальных уравнений $x_{11}(t),...,x_{n1}(t)$ и $x_{12}(t),...,x_{n2}(t),$ то $x_{11}(t)+x_{12}(t),...,x_{n1}(t)+x_{n2}(t)$ тоже является решением системы.

- 3) Если известны n частных решений системы $x_{11}(t),...,x_{n1}(t);\ \ldots;\ x_{1n}(t),...,x_{nn}(t),$ то

$$\begin{cases} x_1 = C_1 x_{11} + ... + C_n x_{n1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = C_1 x_{1n} + ... + C_n x_{nn} \end{cases} \qquad (*)$$

  тоже является решением системы линейных дифференциальных уравнений.
- Совокупность *n* линейно независимых решений образует фундаментальную систему решений.
- Решение (*) является общим решением однородной системы линейных дифференциальных уравнений.

Общее решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + \ldots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + \ldots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

есть сумма общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы.

•

- При заданных начальных условиях

$$x_1\big|_{t=t_0} = x_{10},\ x_n\big|_{t=t_0} = x_{n0}$$

можно получить частное решение системы линейных дифференциальных уравнений. Для этого необходимо подставить начальные условия в общее решение системы (*). Получим алгебраическую систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 x_{110} + \ldots + C_n x_{n10} = x_{10}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 x_{1n0} + \ldots + C_n x_{nn0} = x_{n0}. \end{cases}$$

- Решая систему, получим частное решение системы линейных дифференциальных уравнений. Для того, чтобы система алгебраических уравнений имела единственное решение, необходимо, чтобы определитель

$$W = \begin{vmatrix} x_{110} & \cdots & x_{n10} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n0} & \cdots & x_{nn0} \end{vmatrix} \neq 0.$$

12.4.3. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

- Рассмотрим однородную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{cases} \quad a_{ij} = const.$$

- Систему можно свести к одному дифференциальному уравнению n - го порядка. Будем искать частные решения в виде $x_1 = k_1 e^{rt}, \ldots, x_n = k_n e^{rt}$, где $k_1, \ldots, k_n, r$ - неопределенные постоянные.

Дифференцируя, получим $\begin{cases} k_1 r e^{rt} = a_{11} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{1n} k_n e^{rt}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ k_n r e^{rt} = a_{n1} k_1 e^{rt} + \ldots + a_{nn} k_n e^{rt}. \end{cases}$

- Отсюда $\begin{cases} (a_{11} - r) k_1 + \ldots + a_{1n} k_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} k_1 + \ldots + (a_{nn} - r) k_n = 0. \end{cases}$

- Чтобы система однородных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, определитель системы равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - r) & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & (a_{nn} - r) \end{vmatrix} = 0.$$

- Раскрыв определитель, получим характеристическое уравнение.

Предположим, что корни действительные и простые.

Рассмотрим решение на примере системы трех уравнений.

Пусть корень равен r_1

$$\begin{cases} (a_{11}-r_1)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22}-r_1)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33}-r_1)k_3 = 0. \end{cases}$$

- Определитель системы равен нулю. Примем, что если r_1 - простой корень, то, по крайней мере, один из миноров 2-го порядка не равен нулю. Тогда одно из уравнений следует из остальных. Решение системы зависит от одной произвольной постоянной.
- Пусть первые два уравнения линейно независимы. Тогда одно из решений будет

$$k_1^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{12} & C_1 \\ a_{22}-r_1 & C_2 \end{vmatrix}, \quad k_2^{(1)} = \begin{vmatrix} C_1 & a_{22}-r_1 \\ C_2 & a_{12} \end{vmatrix}, \quad k_3^{(1)} = \begin{vmatrix} a_{11}-r_1 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-r_1 \end{vmatrix}.$$

- Все остальные решения получаются умножением чисел $k_1^{(1)},\ k_2^{(1)},\ k_3^{(1)}$ на одну и ту же произвольную постоянную.

Поступая так со всеми корнями характеристического уравнения, найдем три системы функций, каждая из которых является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$k_1^{(1)}e^{r_1t},\ k_2^{(1)}e^{r_1t},\ k_3^{(1)}e^{r_1t};$$
$$k_1^{(2)}e^{r_2t},\ k_2^{(2)}e^{r_2t},\ k_3^{(2)}e^{r_2t};$$
$$k_1^{(3)}e^{r_3t},\ k_2^{(3)}e^{r_3t},\ k_3^{(3)}e^{r_3t}.$$

- Общее решение системы линейных дифференциальных уравнений имеет вид

$$x_1 = C_1k_1^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_1^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_1^{(3)}e^{r_3t},$$
$$x_2 = C_1k_2^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_2^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_2^{(3)}e^{r_3t},$$
$$x_3 = C_1k_3^{(1)}e^{r_1t} + C_2k_3^{(2)}e^{r_2t} + C_3k_3^{(3)}e^{r_3t}.$$