

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

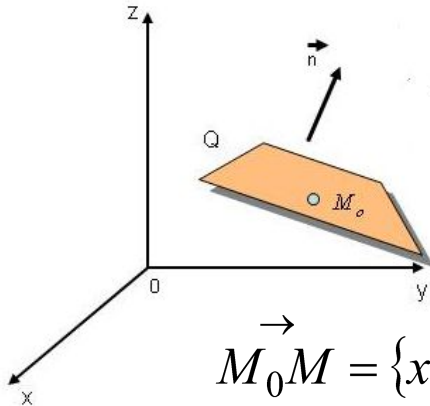
И.Г. Руцкова

Плоскость в пространстве

Электронный курс лекций «Линейная алгебра»,
часть 11

Оренбург 2016

1 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно ненулевому вектору $\vec{n} = \{A; B; C\}, A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.



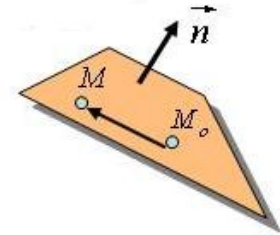
Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка пространства, а α - плоскость, удовлетворяющая указанным условиям, уравнение которой нам нужно составить

$$M(x; y; z) \in \alpha \Leftrightarrow$$

$$\vec{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_0M} \perp \vec{n} \Leftrightarrow$$

$$\left(\vec{n}, \vec{M_0M} \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$



Пример 1.

$$M_0(1; 7; 3);$$

$$\vec{n} = \{2; 3; 5\}$$

$$2 \cdot (x - 1) + 3 \cdot (y - 7) + 5 \cdot (z - 3) = 0,$$

$$2x - 2 + 3y - 21 + 5z - 15 = 0,$$

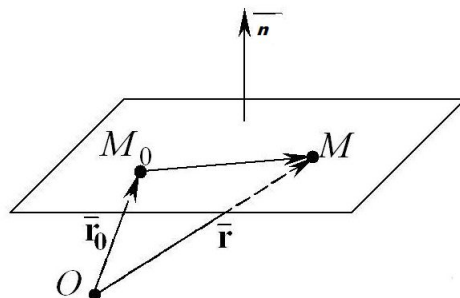
$$2x + 3y + 5z - 38 = 0$$

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

в координатной форме

Если использовать радиус-векторы точек $M(x; y; z)$ и $M_0(x_0; y_0; z_0)$: $\vec{r} = \vec{OM}$

и $\vec{r}_0 = \vec{OM}_0$



$$\left(\vec{n}, \vec{M_0M} \right) = 0 \Leftrightarrow \left(\vec{n}, \vec{r} - \vec{r}_0 \right) = 0,$$

$$\left(\vec{n}, \vec{r} \right) - \left(\vec{n}, \vec{r}_0 \right) = 0$$

в векторной форме.

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$$

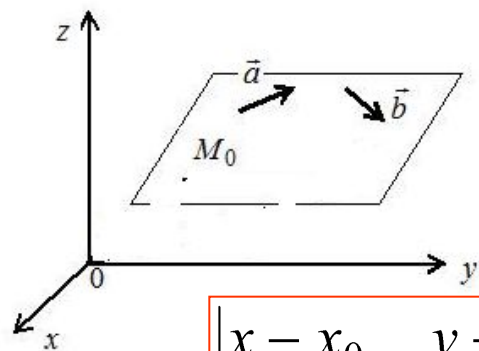
нормальное уравнение плоскости

p - расстояние от плоскости до начала координат,

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{OP}$, совпадающего с перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость.

2 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно двум ненулевым неколлинеарным векторам $\vec{a} = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{b} = \{m_2; n_2; p_2\}$

Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка пространства, а α - плоскость, удовлетворяющая указанным условиям, уравнение которой нам нужно составить



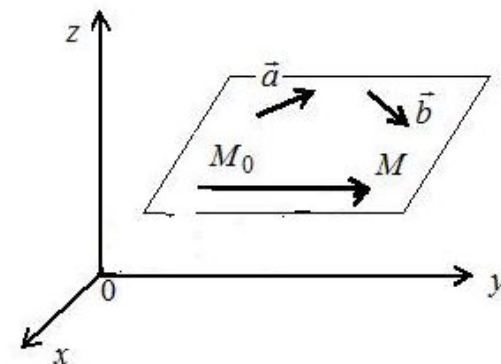
$$M(x; y; z) \in \alpha \Leftrightarrow \vec{M_0M} \in \alpha$$

$$\Leftrightarrow \vec{M_0M}, \vec{a}, \vec{b} \text{ - компланарны}$$

$$\Leftrightarrow \vec{M_0M} \vec{a} \vec{b} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

в координатной форме



$$\left(\vec{r} - \vec{r_0} \right) \vec{a} \vec{b} = 0$$

в векторной форме

Пример 2.

$$M_0(0; 1; 2),$$

$$\vec{a} = \{1; 3; 2\},$$

$$\vec{b} = \{2; 5; 4\}$$

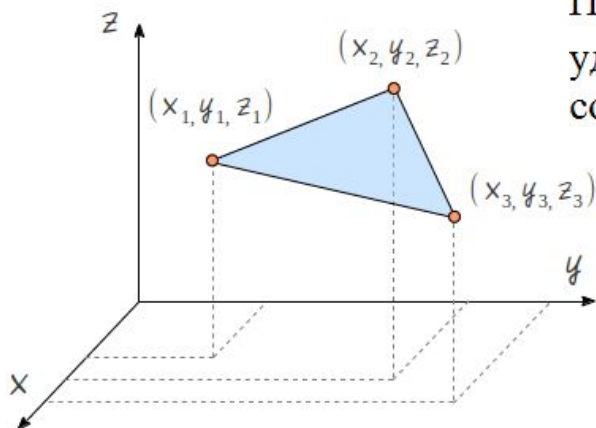
$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$12x + 5(z - 2) + 4(y - 1) - 6(z - 2) - 10x - 4(y - 1) = 0,$$

$$12x + 5z - 10 + 4y - 4 - 6z + 12 - 10x - 4y + 4 = 0,$$

$$2x - z + 2 = 0$$

3 Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой



Пусть $M(x; y; z)$ - произвольная точка пространства, а α - плоскость, удовлетворяющая указанным условиям, уравнение которой нам нужно составить

$$M_0 = M_1, \quad \vec{a} = \vec{M_1M_2}, \quad \vec{b} = \vec{M_1M_3}.$$

Векторная форма

$$\begin{pmatrix} \vec{r} - \vec{r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r_2} - \vec{r_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{r_3} - \vec{r_1} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

в координатной форме

где $\vec{r}, \vec{r_1}, \vec{r_2}, \vec{r_3}$ - радиус-векторы точек M, M_1, M_2, M_3 .

Пример 3.

$$M_1(0; 8; 3),$$

$$M_2(-1; 2; 4),$$

$$M_3(5; 7; 1).$$

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 8 & z - 3 \\ -1 - 0 & 2 - 8 & 4 - 3 \\ 5 - 0 & 7 - 8 & 1 - 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y - 8 & z - 3 \\ -1 & -6 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$12x + (z - 3) + 5(y - 8) + 30(z - 3) - 2(y - 8) + x = 0,$$

$$13x + 3y + 31z - 3 - 40 - 117 = 0$$

Общее уравнение плоскости в пространстве

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A, B, C \in R \quad (11)$$

Теорема 1. Если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то уравнение вида (11) задает плоскость в пространстве.

Доказательство. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.

Следствие 1. Если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ перпендикулярен плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Доказательство

$$M_1(x_1; y_1; z_1) \in \alpha, \quad M_2(x_2; y_2; z_2) \in \alpha, \quad \vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\},$$

$$\left(\vec{n}, \vec{M_1M_2} \right) = A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = (Ax_2 + By_2 + Cz_2) - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$$

$$M_1 \in \alpha \Rightarrow Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D,$$

$$M_2 \in \alpha \Rightarrow Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0, \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D;$$

$$\left(\vec{n}, \vec{M_1M_2} \right) = (-D) - (-D) = 0, \quad \vec{n} = \{A; B; C\} \perp \vec{M_1M_2}, \quad \forall M_1, M_2 \in \alpha$$

Нормальный вектор к плоскости

Определение 1. Ненулевой вектор, перпендикулярный к плоскости α , называется *нормальным вектором* плоскости α .

Следствие 2. Если $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то для любого ненулевого $k \in \mathbb{R}$ вектор $\vec{n}' = \{kA; kB; kC\}$ является нормальным вектором плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Доказательство. Доказательство проведите самостоятельно.

Пример 4. Укажите один нормальный вектор для плоскости $2x - 3y + 5z + 4 = 0$.

Решение. $\vec{n} = \{2; -3; 5\}$

Замечание. Следствие 1 характеризует геометрический смысл коэффициентов A, B, C общего уравнения плоскости. Коэффициент D , в свою очередь позволяет определить проходит ли плоскость через начало координат $O(0; 0; 0)$: если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат, если $D \neq 0$, то начало координат плоскости не принадлежит.

Уравнение плоскости «в отрезках»

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$$

$$Ax + By + Cz = -D, \quad \frac{Ax}{D} + \frac{By}{D} + \frac{Cz}{D} = 1, \quad \frac{x}{\frac{D}{A}} + \frac{y}{\frac{D}{B}} + \frac{z}{\frac{D}{C}} = 1,$$

$$a = \frac{D}{A}, \quad b = \frac{D}{B}, \quad c = \frac{D}{C},$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

«в отрезках».

плоскость пересекает координатные оси OX, OY, OZ в точках $M_1(a;0;0), M_2(0;b;0), M_3(0;0;c)$ соответственно

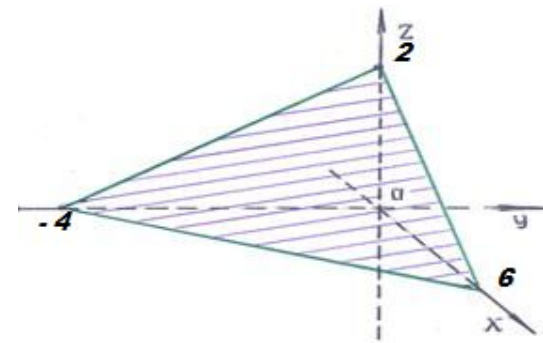
$|a|, |b|, |c|$ характеризуют длины отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях, а знаки — направления, в которых откладываются эти отрезки.

Пример 5. $2x - 3y + 6z - 12 = 0,$

$$2x - 3y + 6z = 12,$$

$$\frac{2x}{12} - \frac{3y}{12} + \frac{6z}{12} = 1,$$

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{-4} + \frac{z}{2} = 1$$



Взаимное расположение плоскостей в пространстве

$$\alpha_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0, \quad \vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \perp \alpha_1,$$

$$\alpha_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad A_2^2 + B_2^2 + C_2^2 \neq 0, \quad \vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \perp \alpha_2.$$

$$\alpha_1 \parallel \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2};$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

$$\alpha_1 \perp \alpha_2 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\vec{n}_1, \vec{n}_2 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{\left| \begin{pmatrix} \vec{n}_1 & \vec{n}_2 \end{pmatrix} \right|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|},$$

где φ - наименьший из двугранных углов, образуемых плоскостями α_1 и α_2