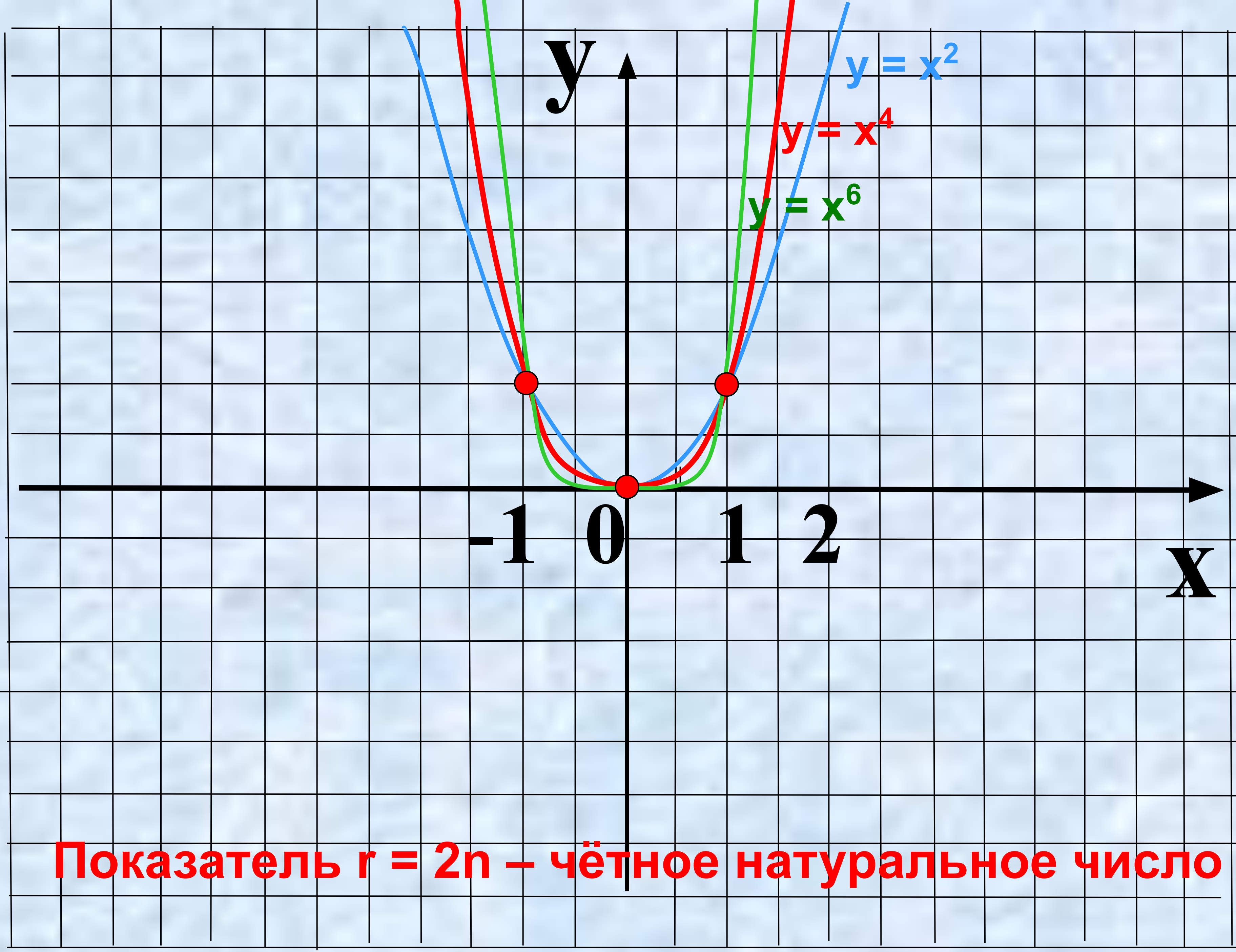
Степенные функции, их свойства и графики

Степенными функциями называются функции вида $y = x^r$, где r – заданное рациональное число



Показатель r = 2n – чётное натуральное число

Показатель r = 2n – чётное натуральное число

$y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, $y = x^8$, …

График чётной функции симметричен относительно оси Оу.

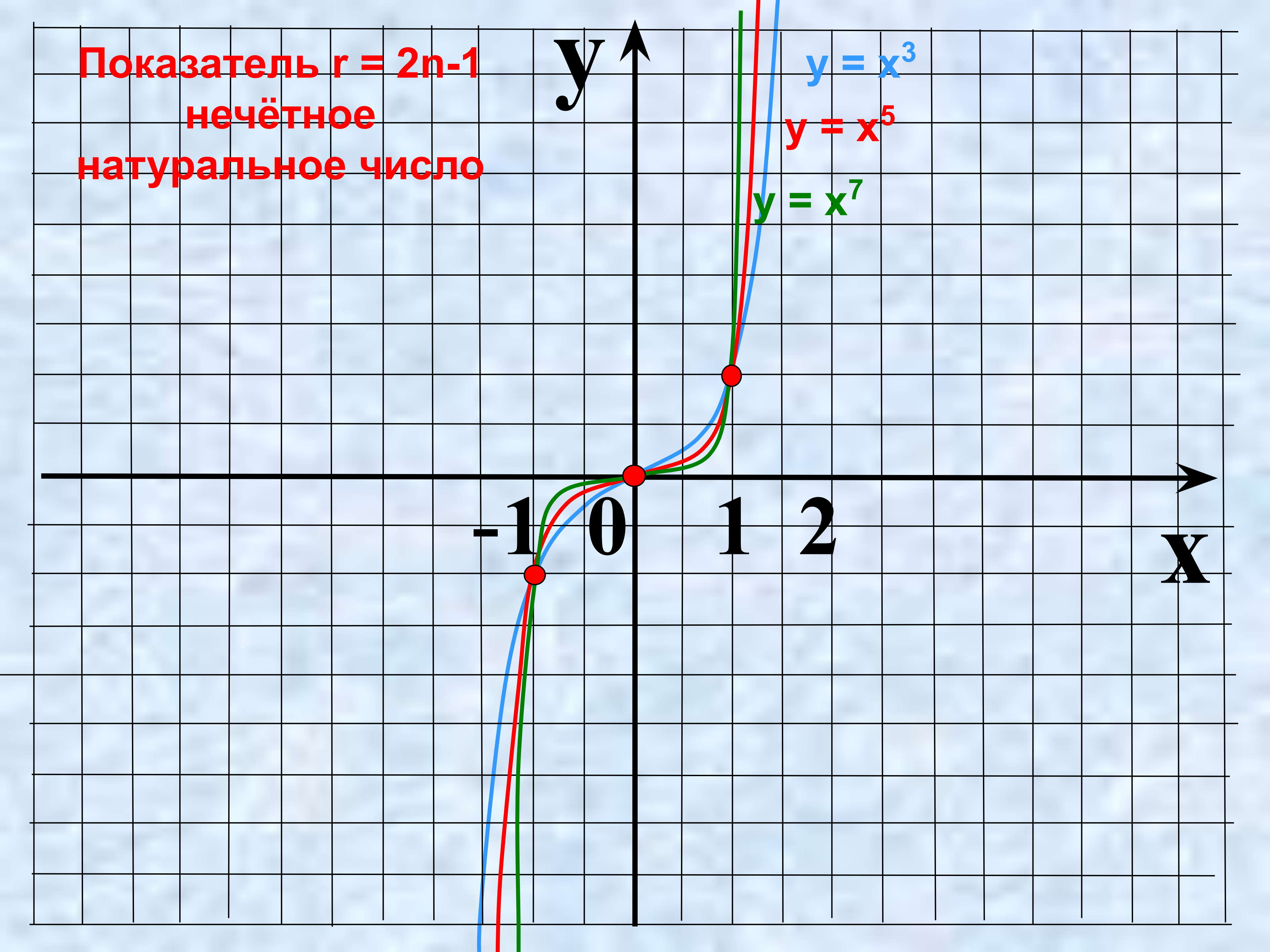
$D(y): x \in R$

$E(y): \; y \geq 0$

Функция $y=x^{2n}$ чётная, т.к. $(-x)^{2n} = x^{2n}$

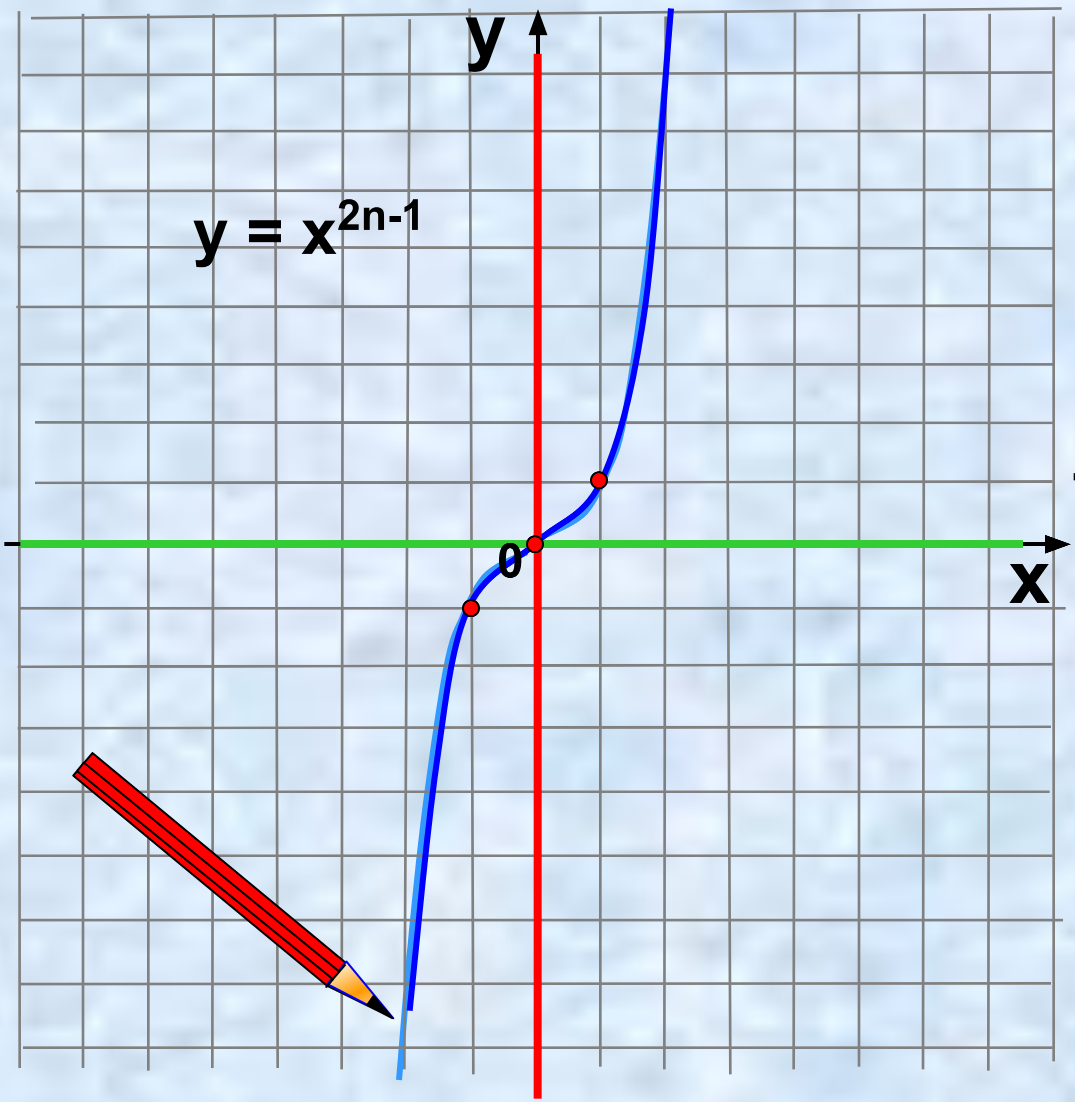
Функция убывает на промежутке $(-\infty;0]$

Функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$


Показатель r = 2n-1
нечётное
натуральное число
y
y = x3
y = x5
y = x7
-1
0
1
2
x

Показатель r = 2n-1 – нечётное натуральное число

$y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$, $y = x^9$, …



$D(y): x \in R$

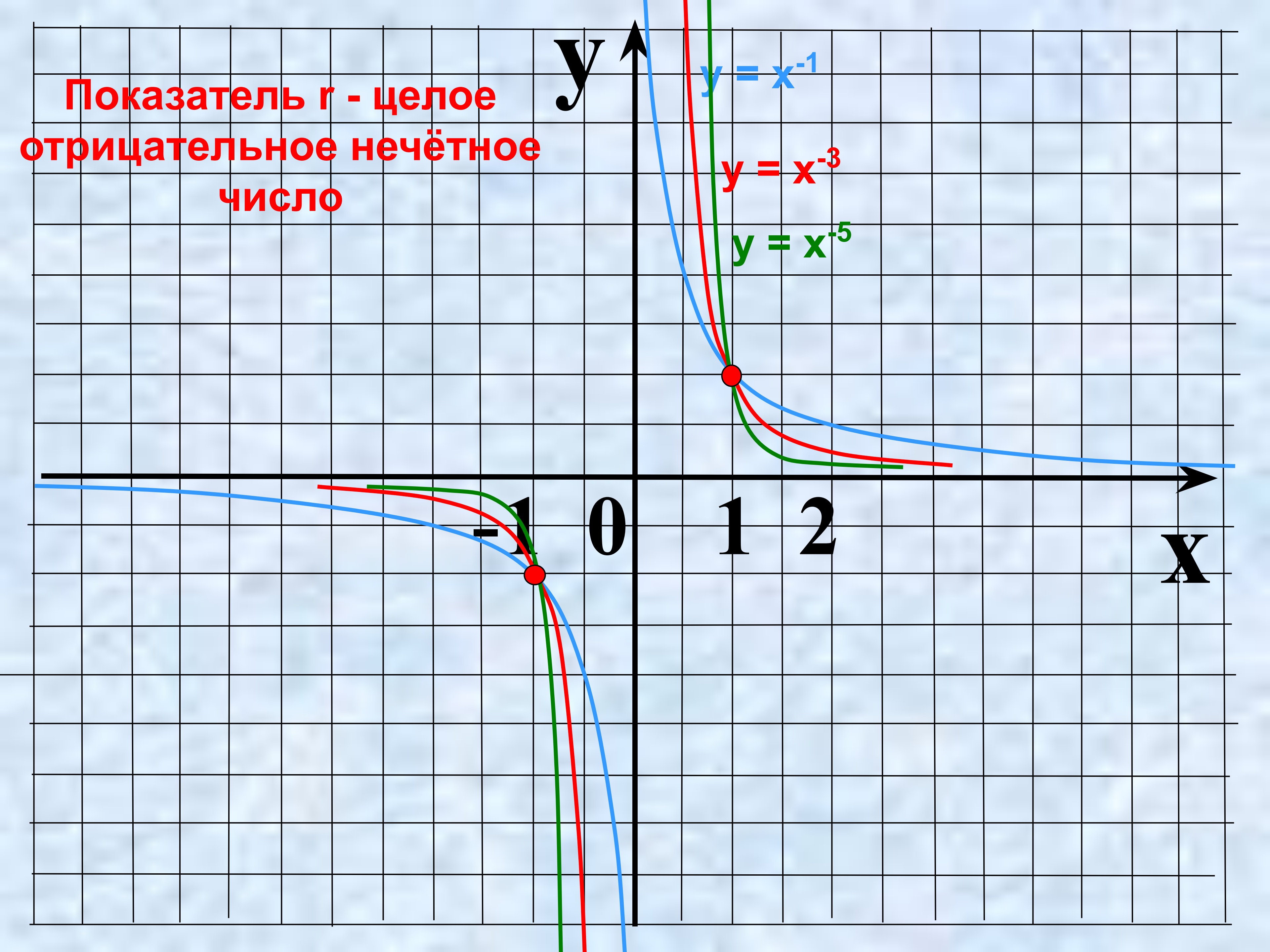
$E(y): y \in R$

Функция $y=x^{2n-1}$ нечётная, т.к. $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$

Функция возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$

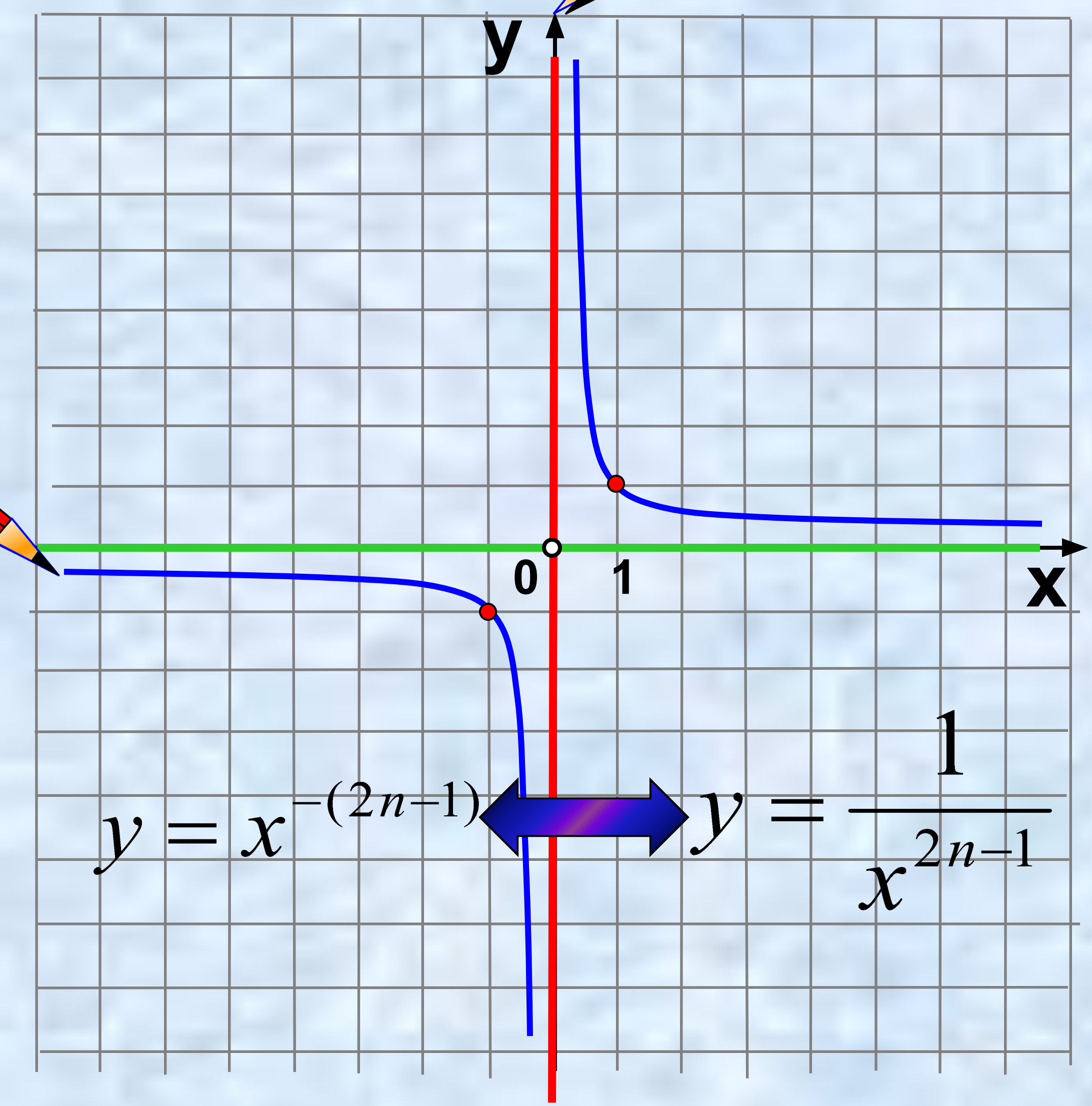
График нечётной функции симметричен относительно начала координат – точки О.

Показатель r - целое отрицательное нечётное число



Показатель r = – (2n-1), где n – натуральное число

$y = x^{-3}$, $y = x^{-5}$, $y = x^{-7}$, $y = x^{-9}$, …



$$y = x^{-(2n-1)} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^{2n-1}}$$

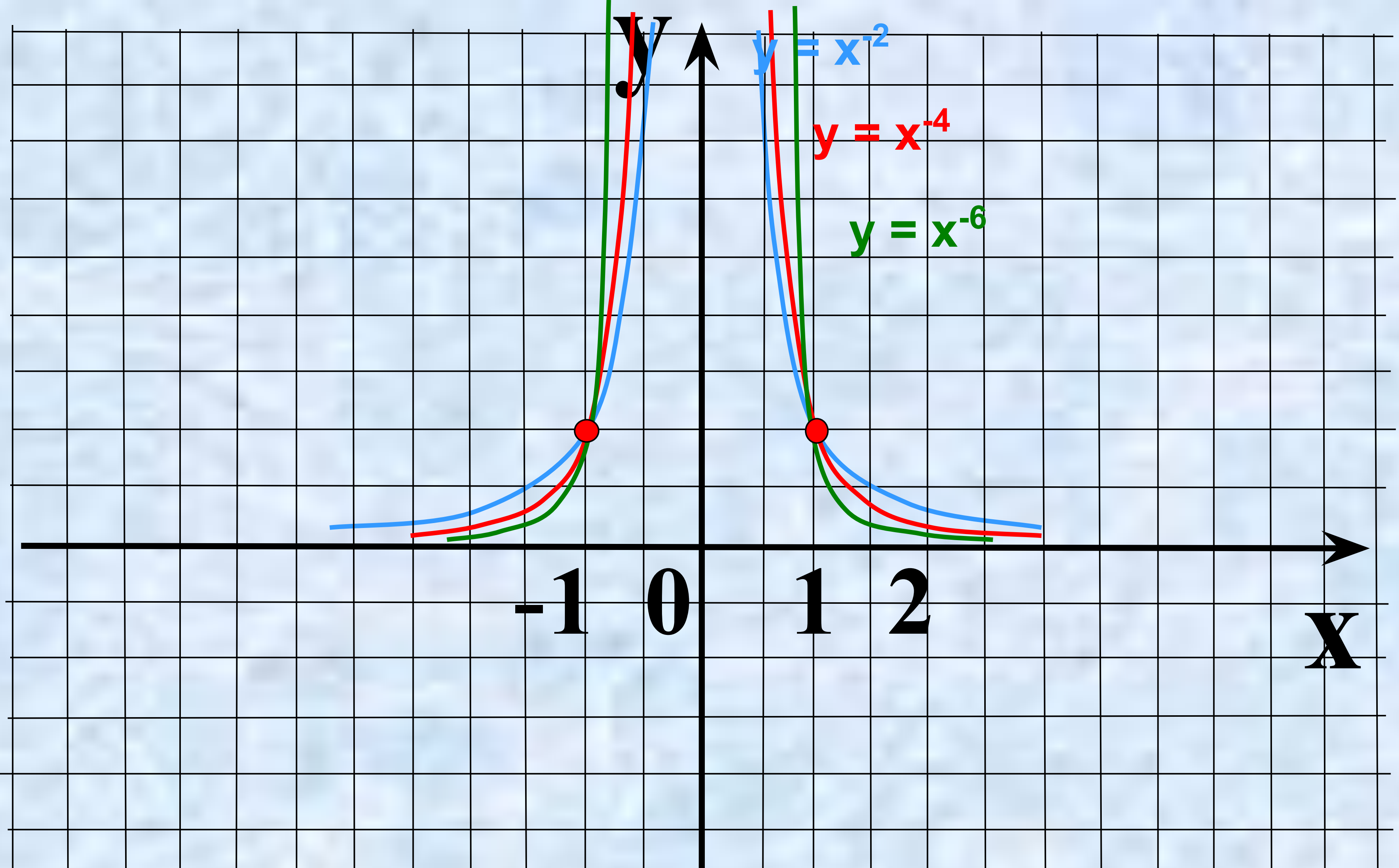
$$D(y): x \neq 0$$

$$E(y): \ y \neq 0$$

Функция $y=x^{-(2n-1)}$ нечётная, т.к. $(-x)^{-(2n-1)} = -x^{-(2n-1)}$

Функция убывает на промежутке $(-\infty;0)$

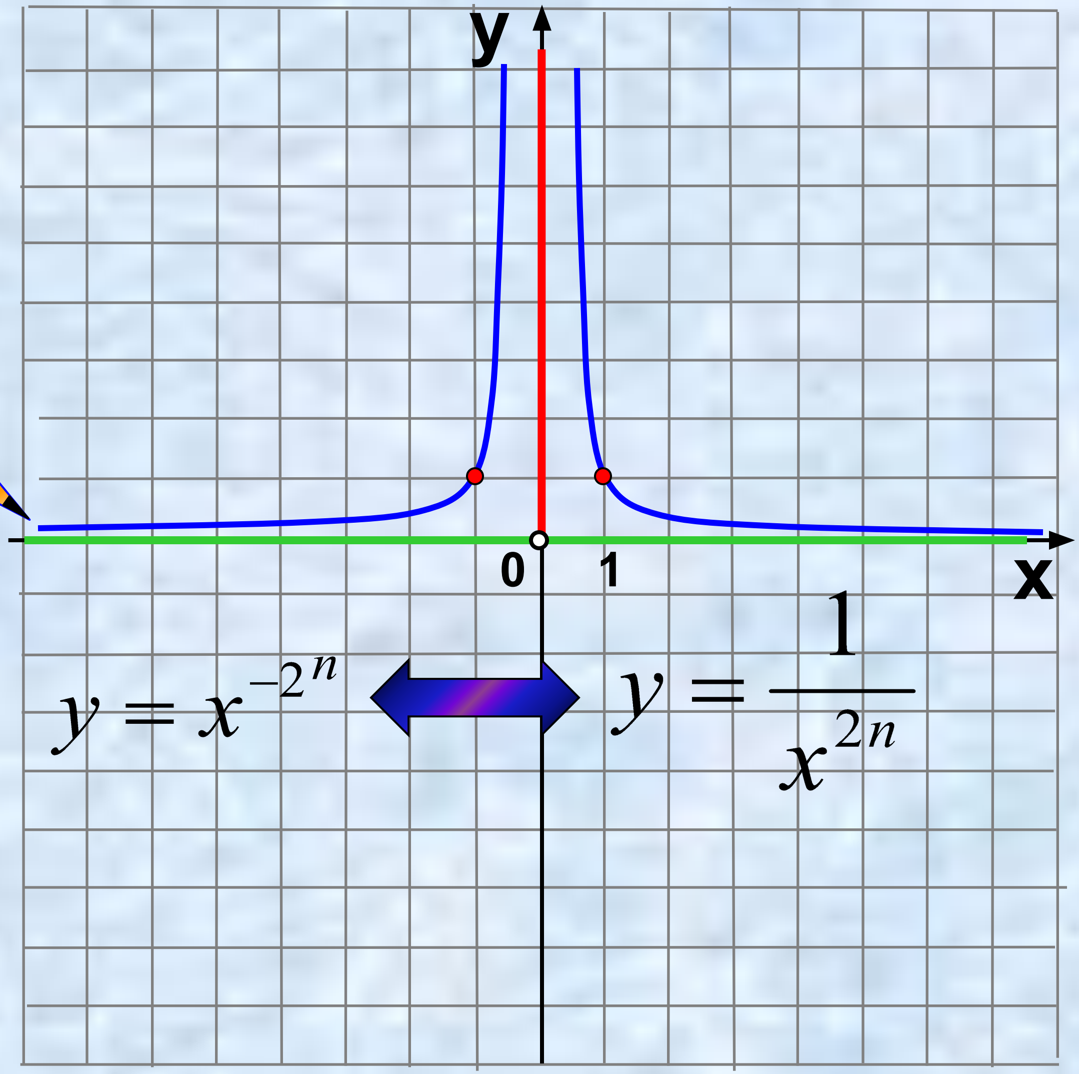
Функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$



Показатель r –целое отрицательное чётное число

Показатель r = – 2n, где n – натуральное число

$y = x^{-2}$, $y = x^{-4}$, $y = x^{-6}$, $y = x^{-8}$, …



$$y = x^{-2^n} \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^{2n}}$$

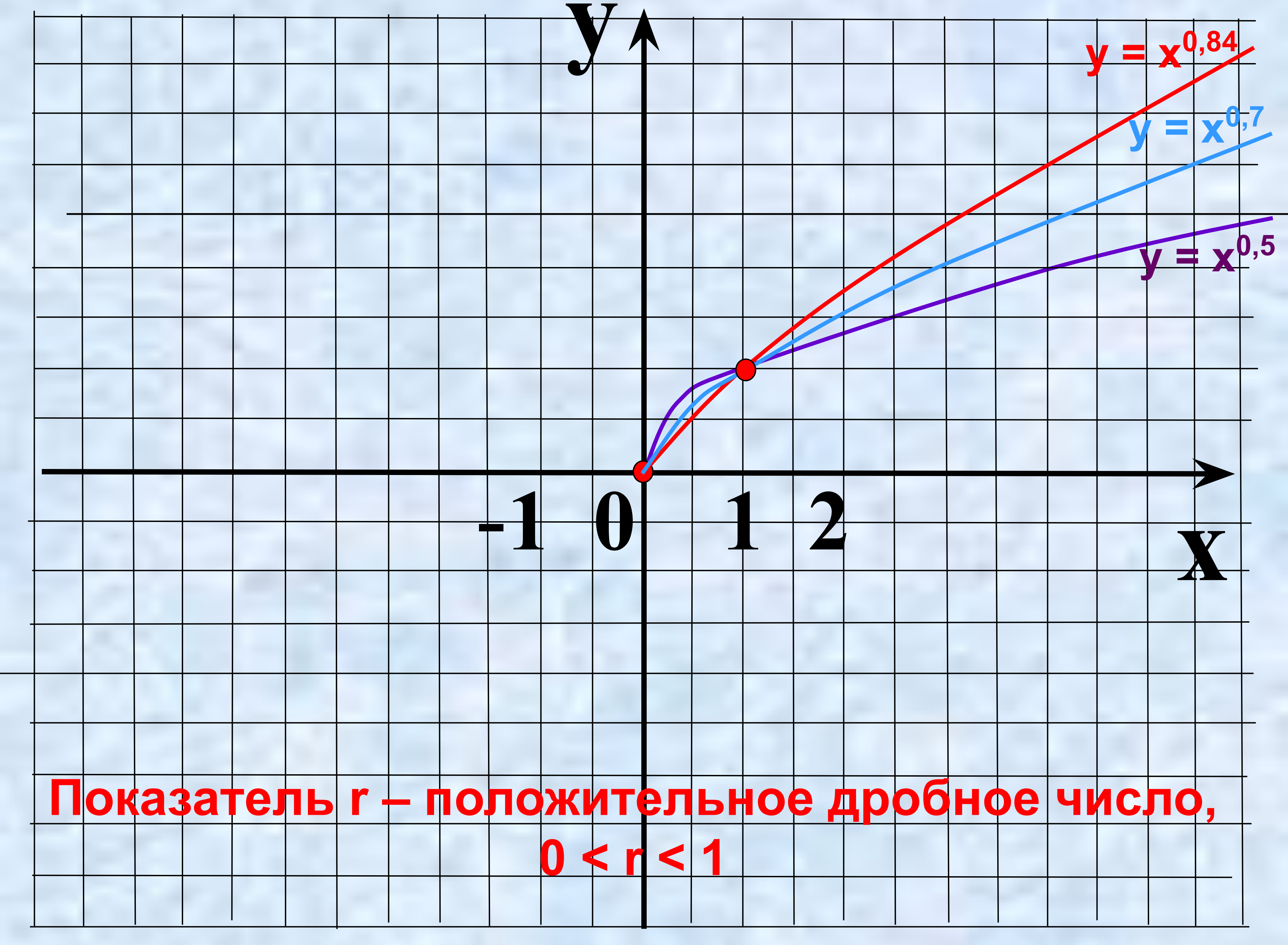
$$D(y): x \neq 0$$

$$E(y):\ y > 0$$

Функция $y=x^{2n}$ чётная, т.к. $(-x)^{-2n} = x^{-2n}$

Функция возрастает на промежутке $(-\infty;0)$

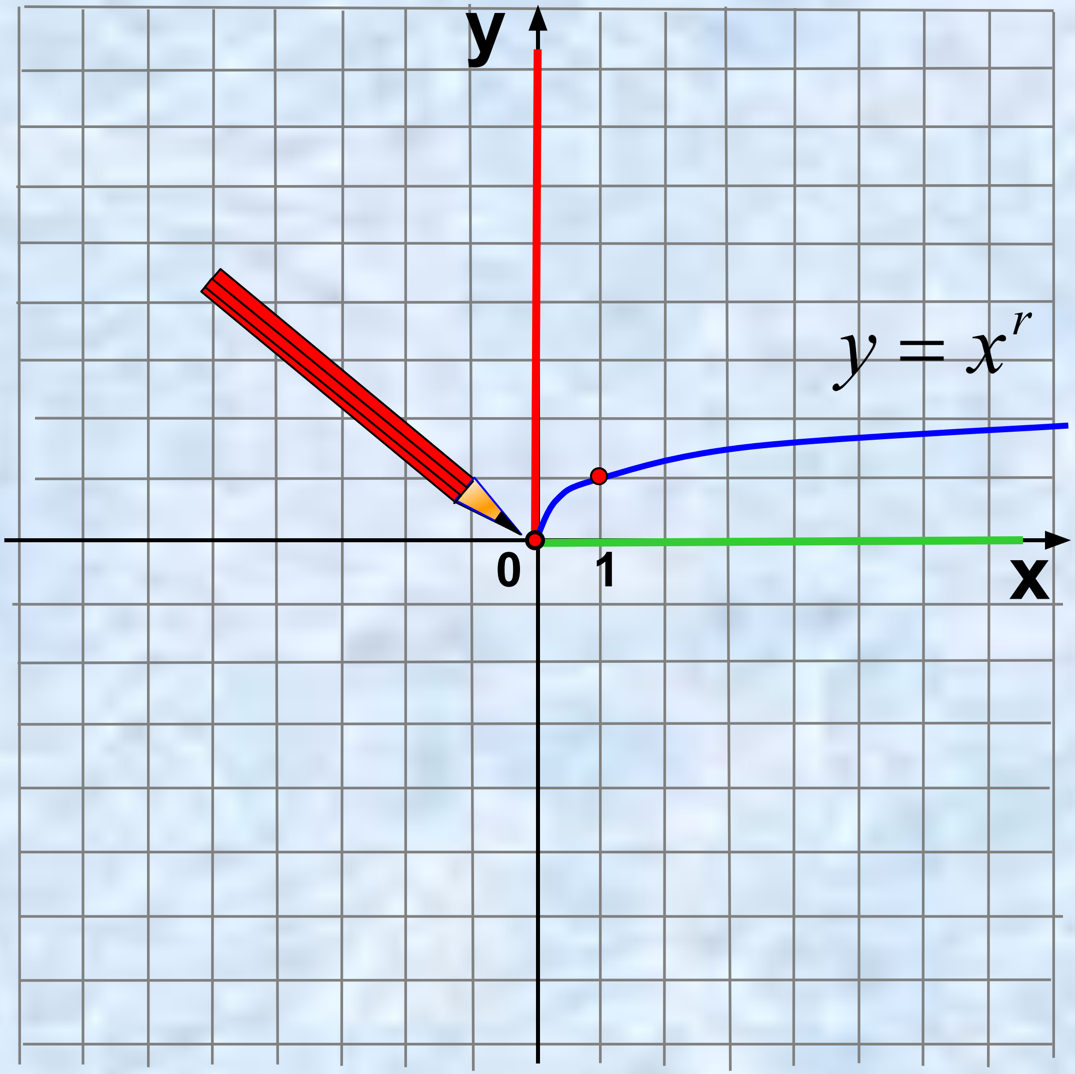
Функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$



Показатель r – положительное дробное число, $0 < r < 1$

Показатель r – положительное дробное число, 0 < r < 1

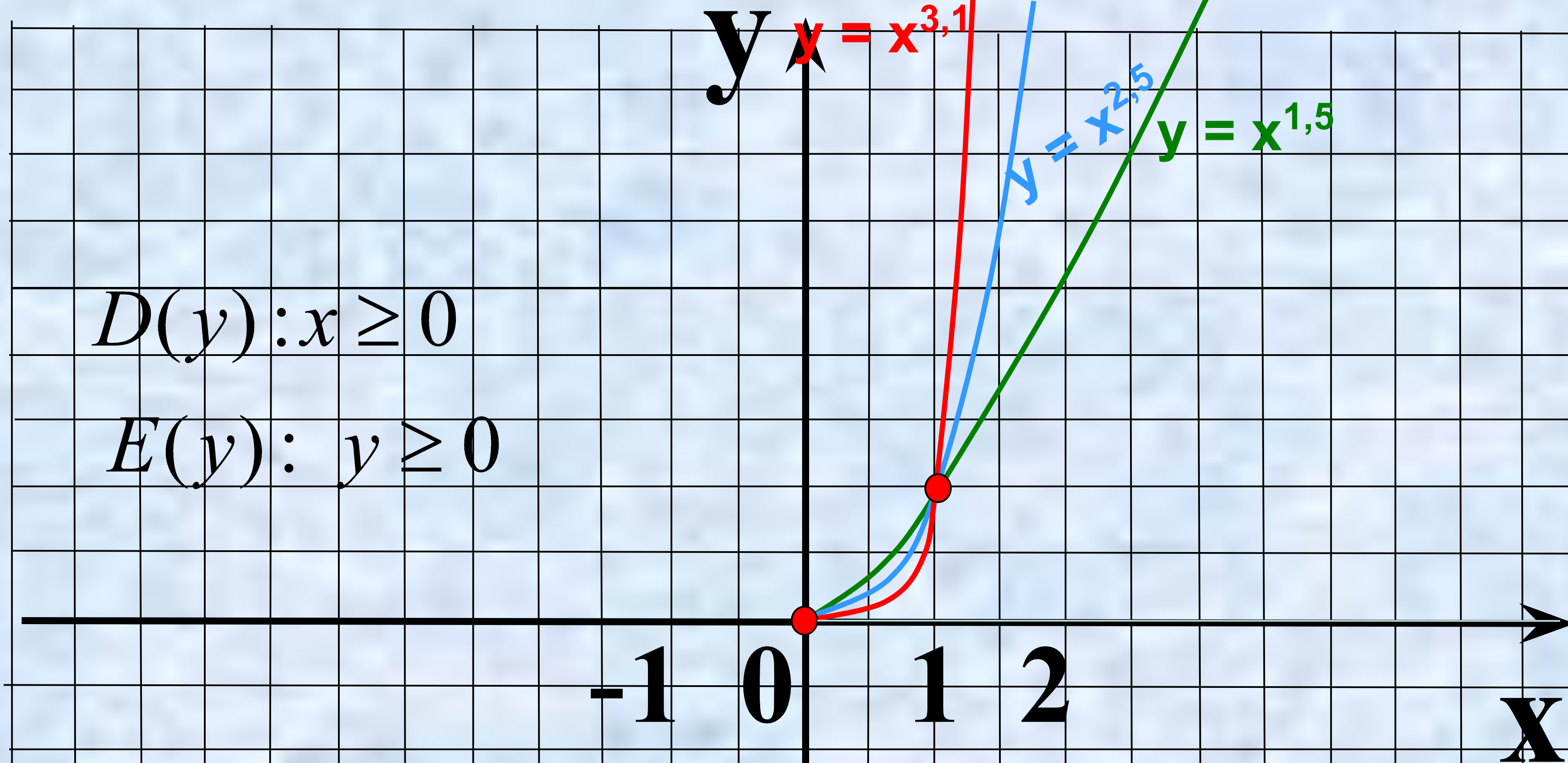
$y = x^{0,3}$, $y = x^{0,7}$, $y = x^{0,12}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$ …



$$D(y): x \geq 0$$

$$E(y):\ y \geq 0$$

Функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$

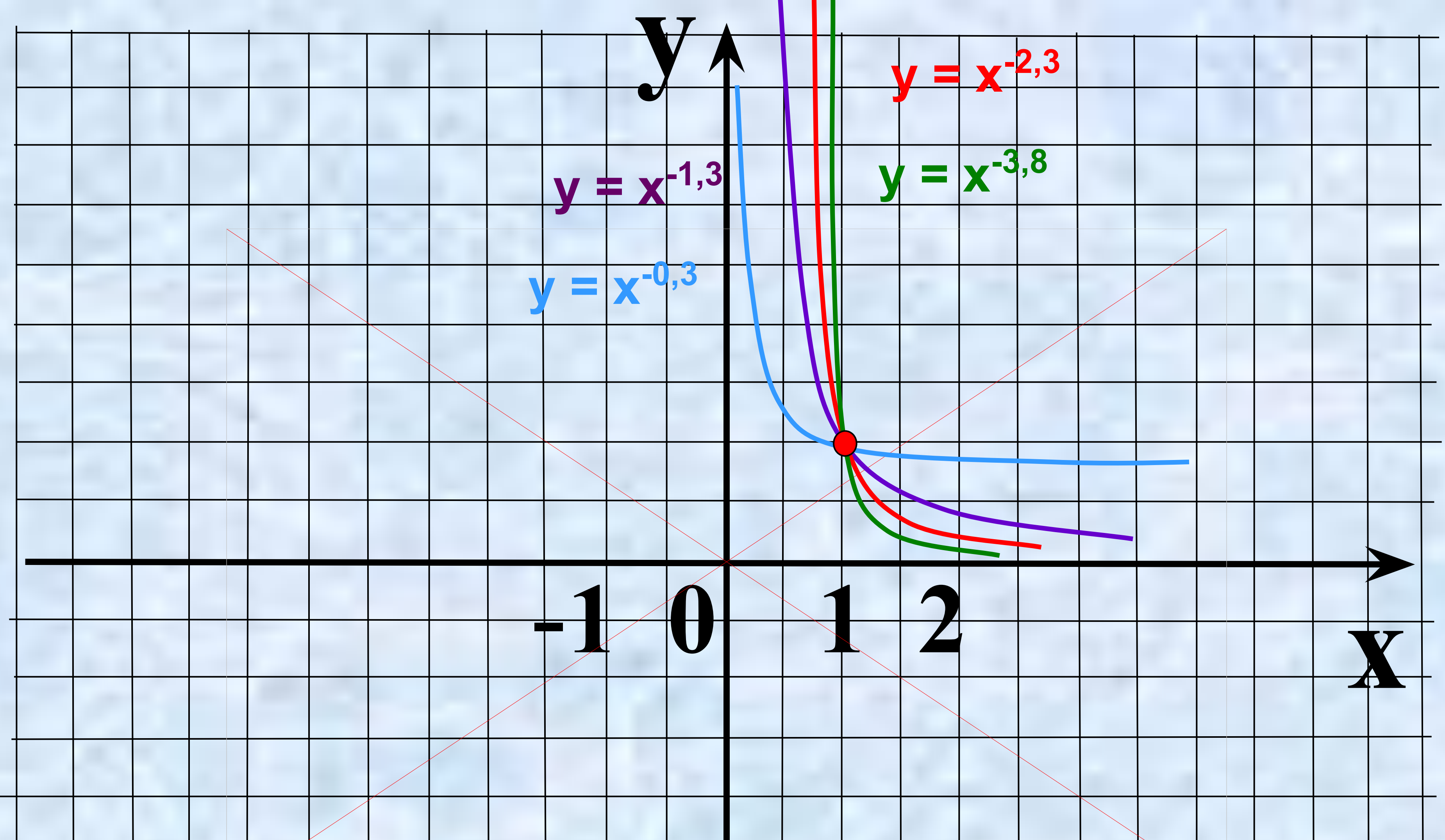


$D(y): x \geq 0$

$E(y): \; y \geq 0$

Функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$

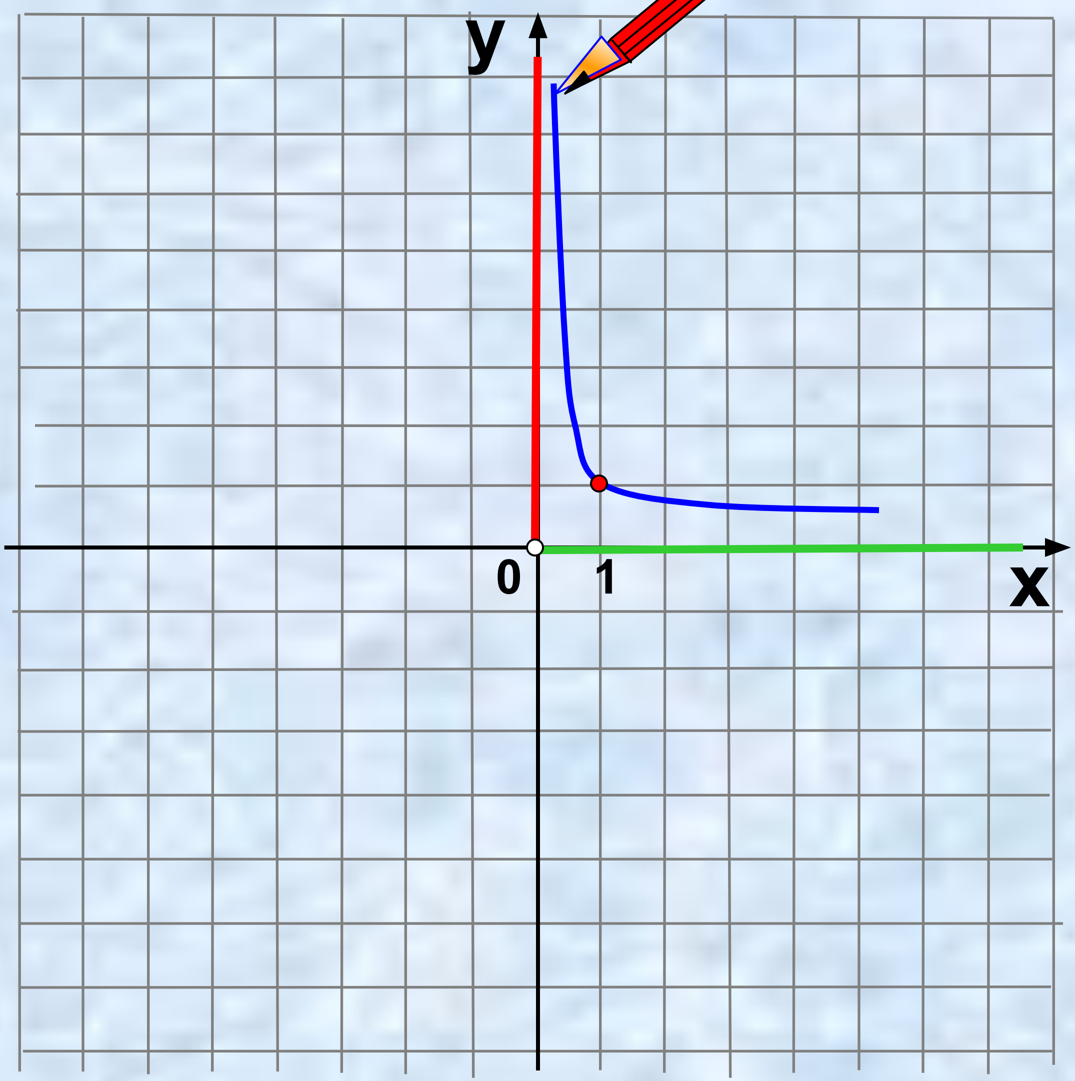
Показатель r – положительное дробное число, r >1



Показатель r – отрицательное дробное число, $r < 0$

Показатель r – отрицательное дробное число

$y = x^{-1,3}$, $y = x^{-0,7}$, $y = x^{-2,12}$, $y = x^{-\frac{1}{3}}$ …

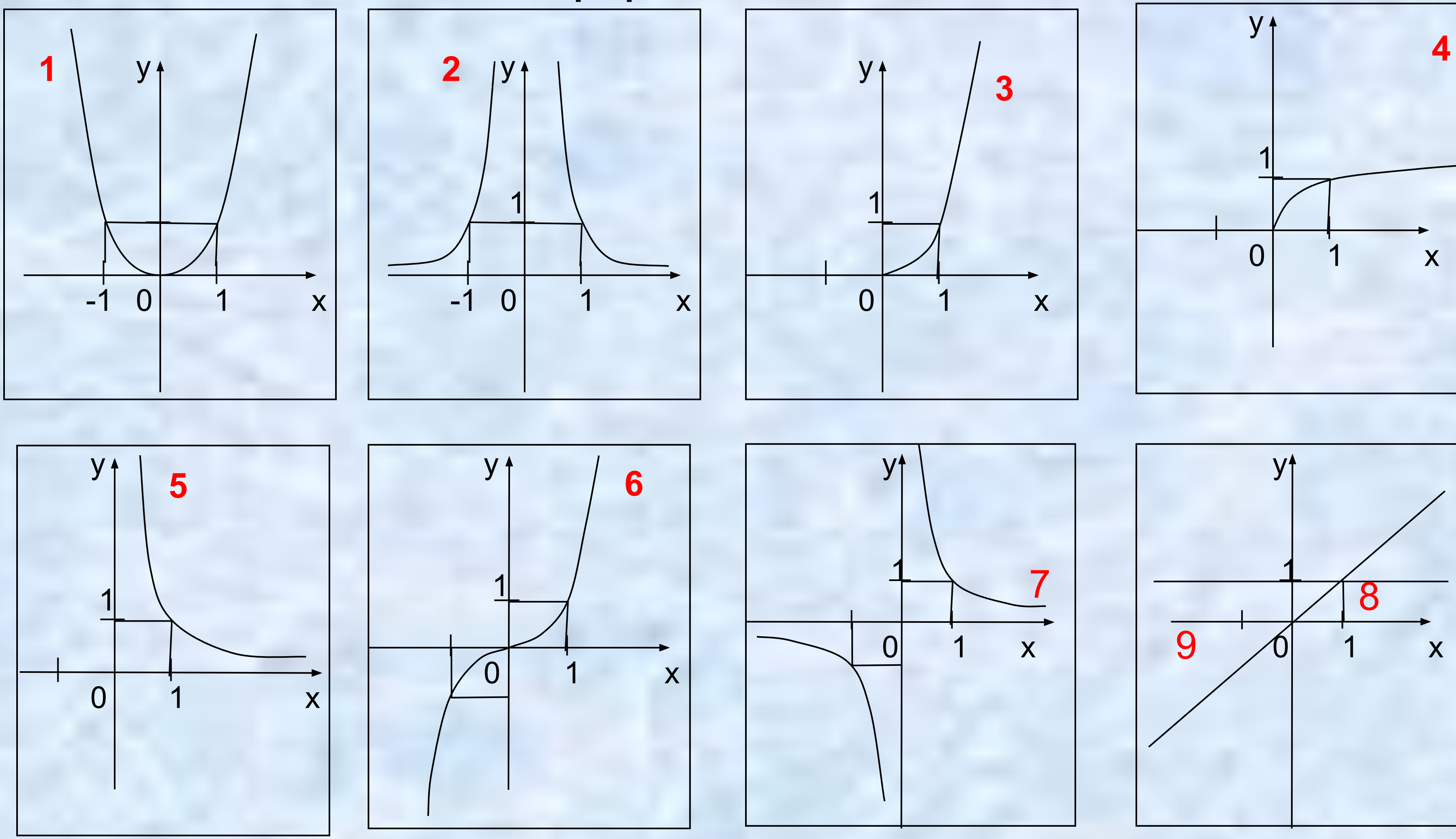


$D(y): x > 0$

$E(y): \; y > 0$

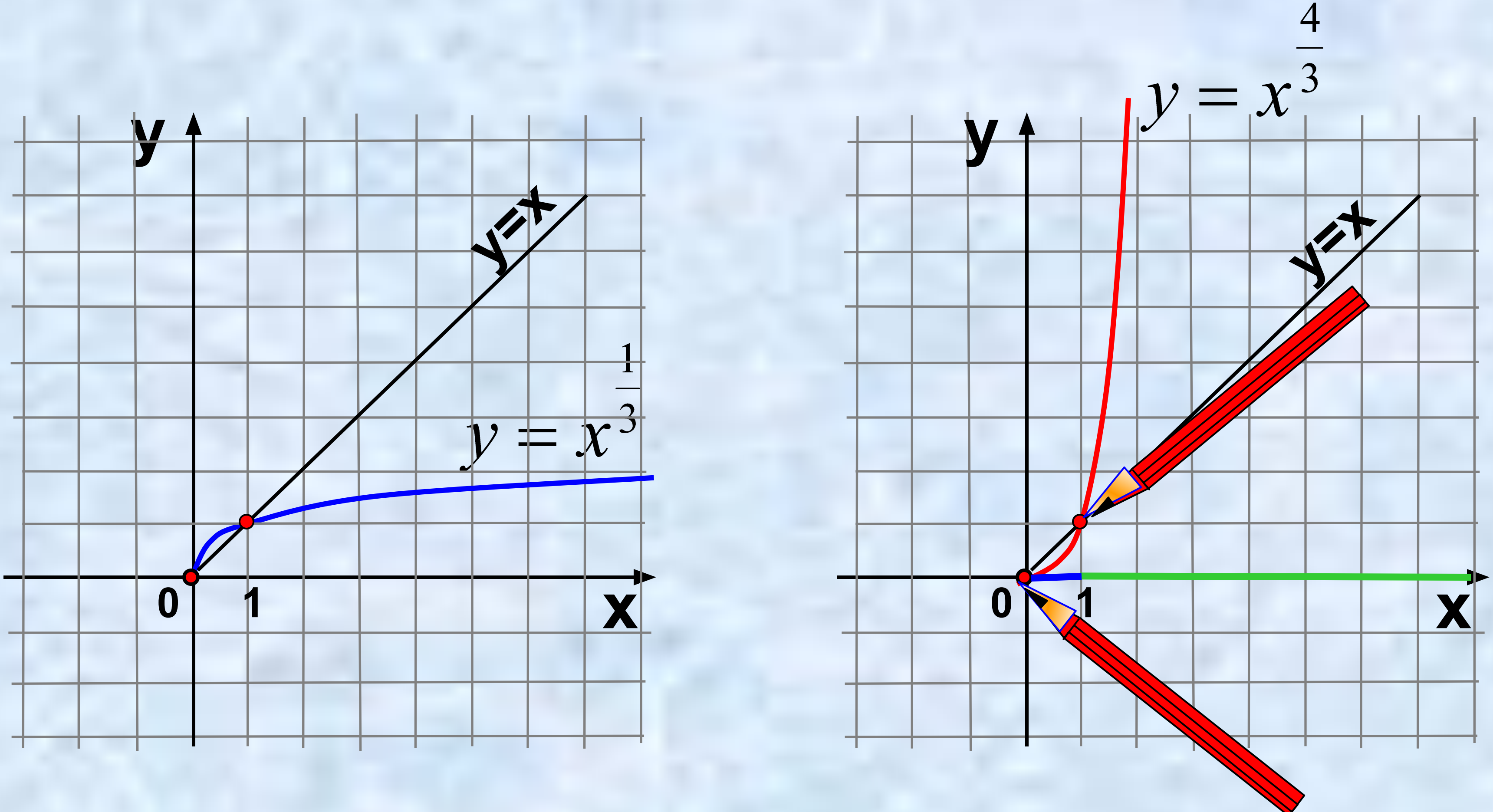
Функция убывает на промежутке $(0;+\infty)$

Графическое лото.

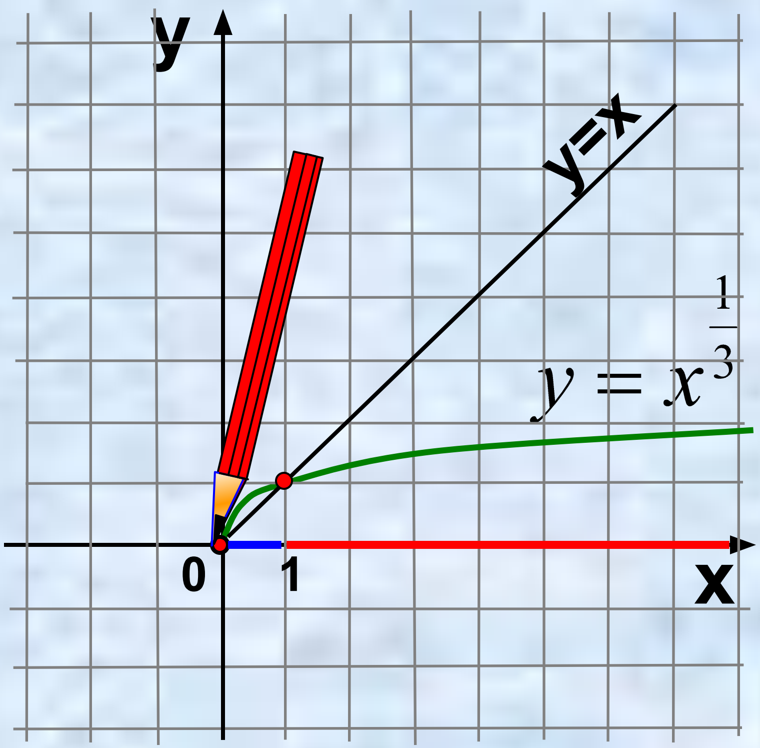


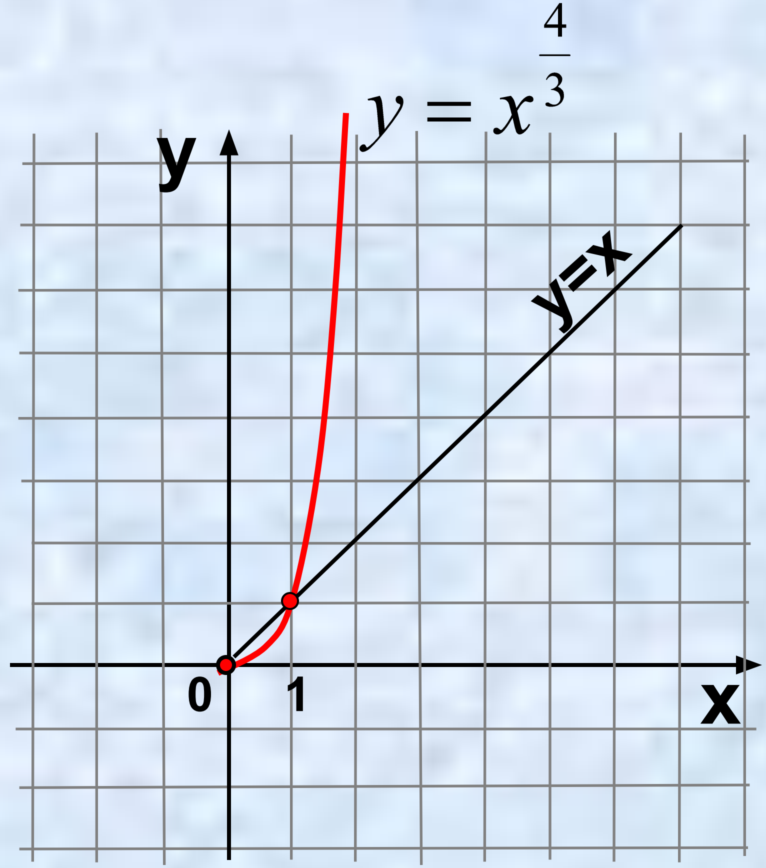
1) $y = x^{-0,7}$ 2) $y = x^{-7}$ 3) $y = x$ 4) $y = x^{7}$ 5) $y = x^{0,6}$

6) $y = x^{3,14}$ 7) $y = x^{8}$ 8) $y = 1$ 9) $y = x^{-6}$



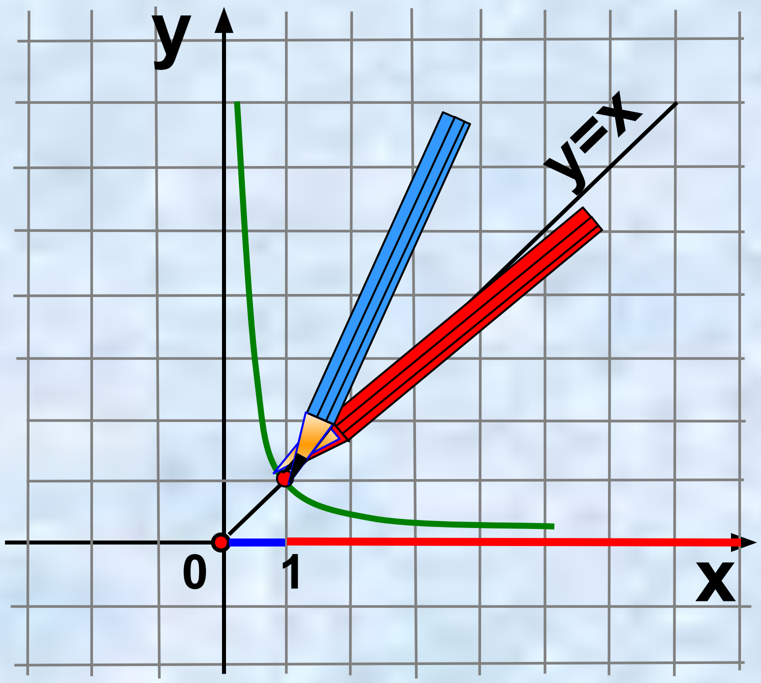
Пользуясь рисунком, найти промежутки, на которых график функции $y = x^{\pi}$ лежит выше (ниже) графика функции y = x.





Пользуясь рисунком, найти промежутки, на которых график функции $y = x^{\sin 45^0}$ лежит выше (ниже) графика функции y = x.

Пользуясь рисунком, найти промежутки, на которых график функции $y = x^{1-\pi}$ лежит выше (ниже) графика функции y = x.



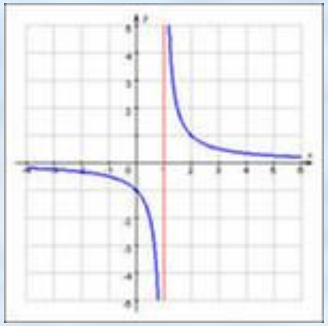
Преобразования графиков степенных функций

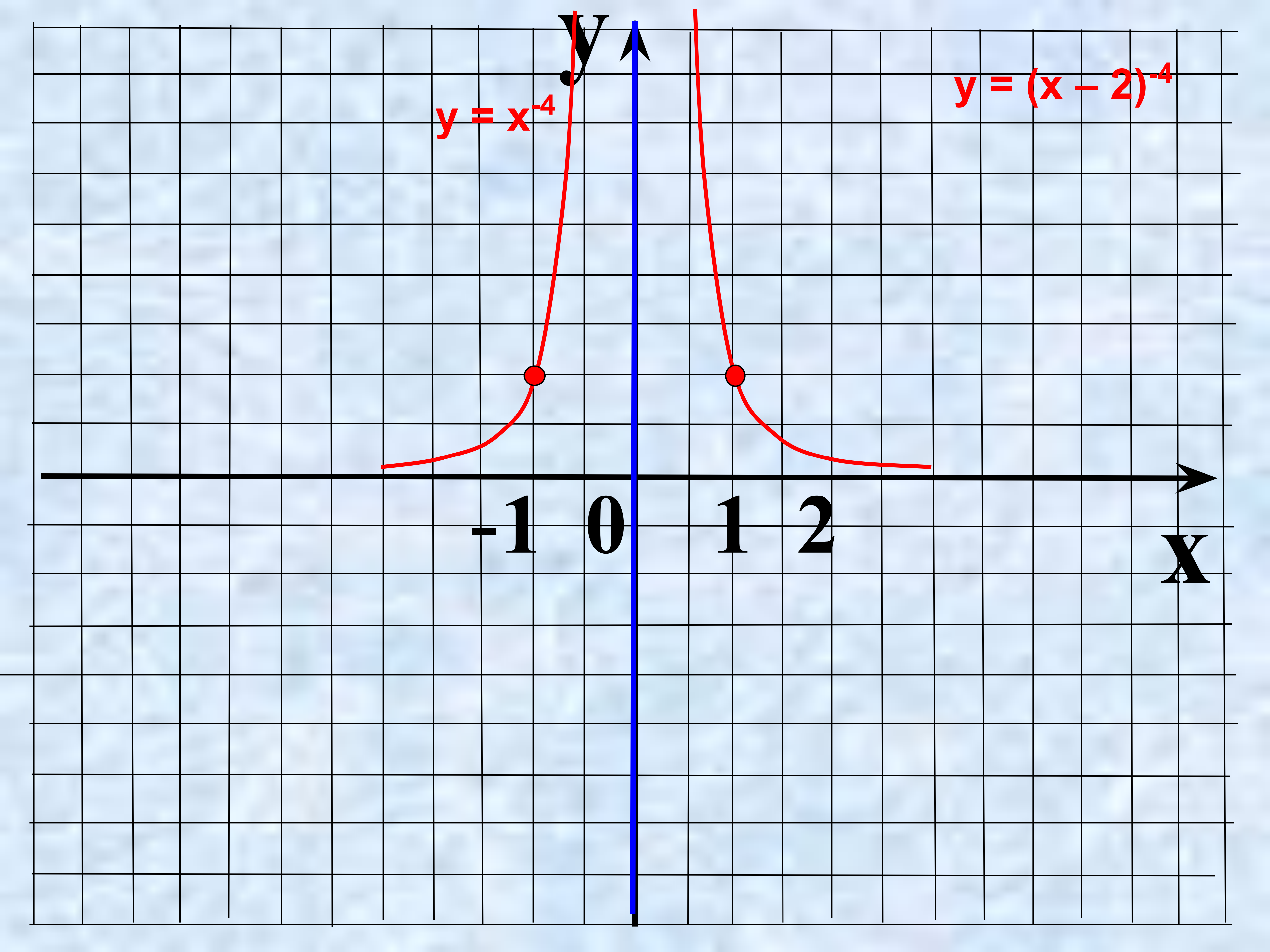
Как построить график функции

$y = f(x + l)$,

если известен график функции

$y = f(x)$





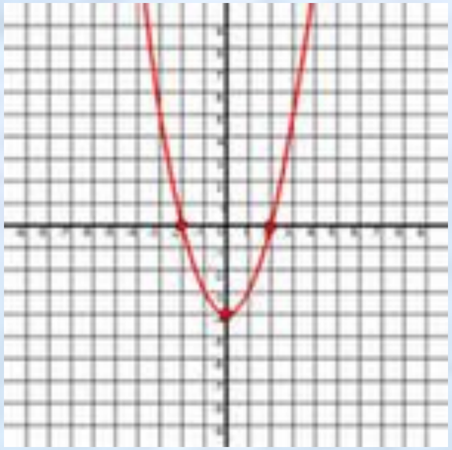
y
y = x-4
y = (x – 2)-4
-1
0
1
2
x

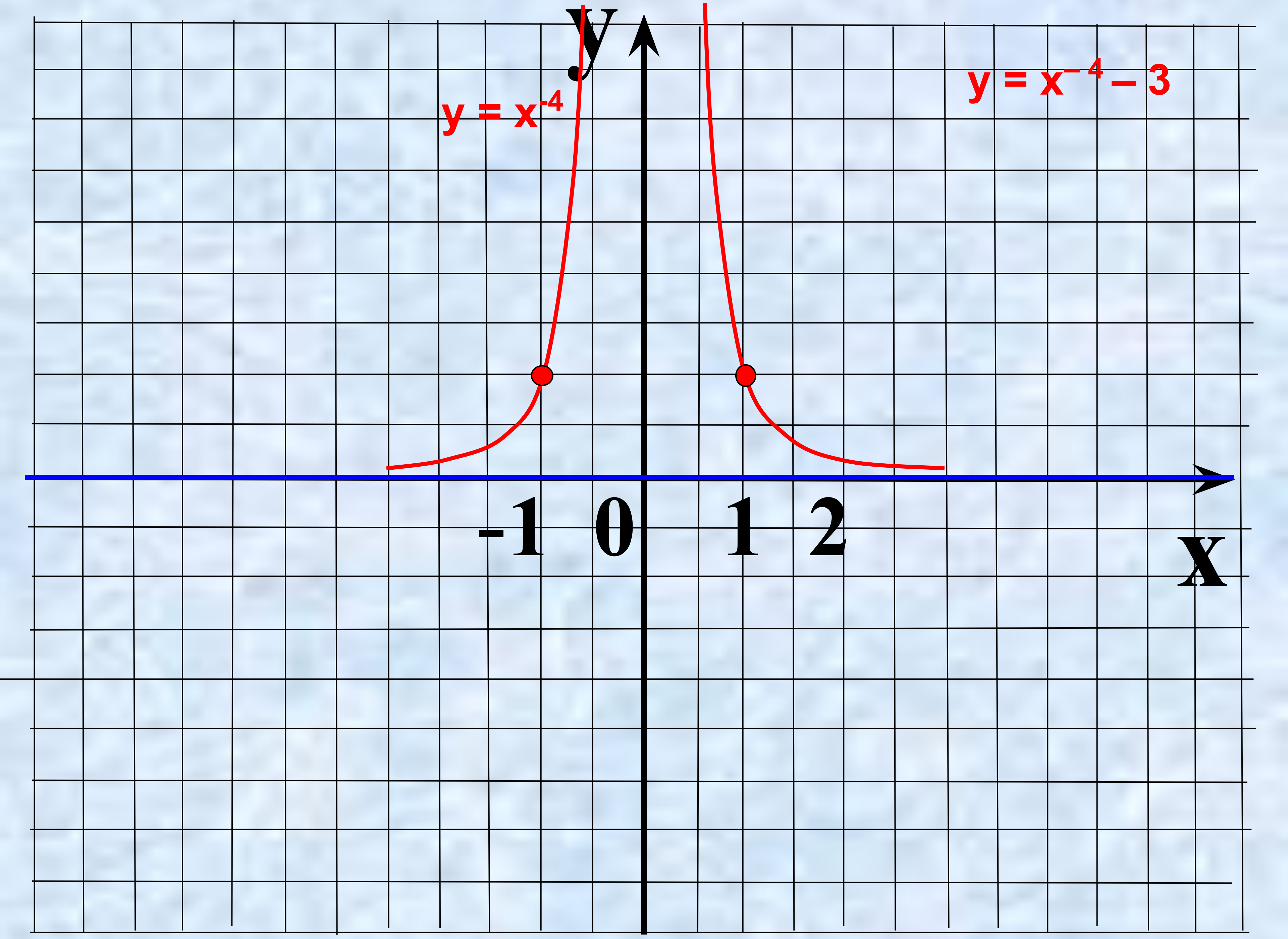
Как построить график функции

$y = f(x) + m$,

если известен график функции

$y = f(x)$



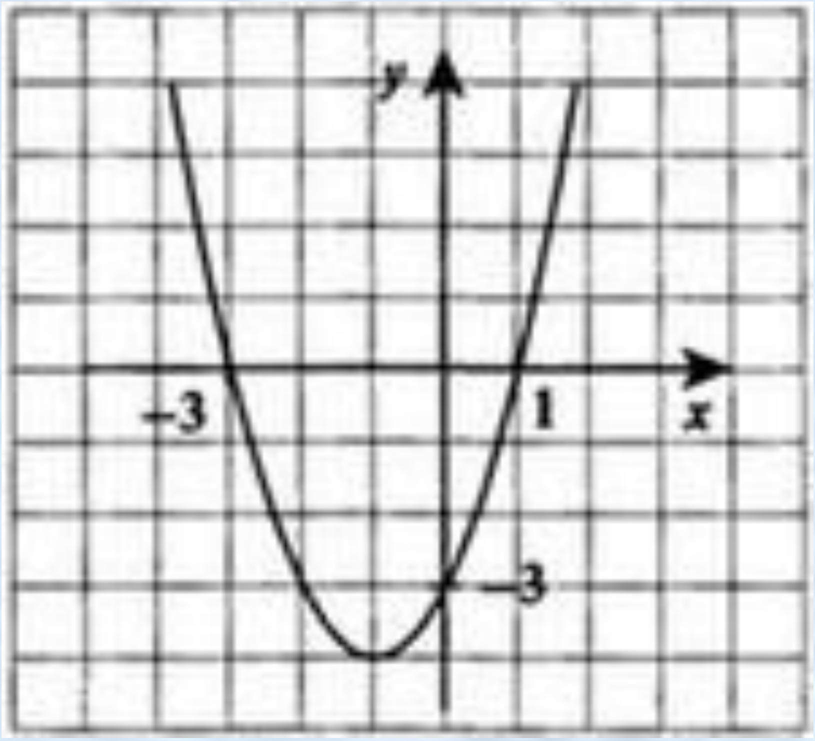

y
y = x-4
y = x– 4 – 3
-1
0
1
2
x

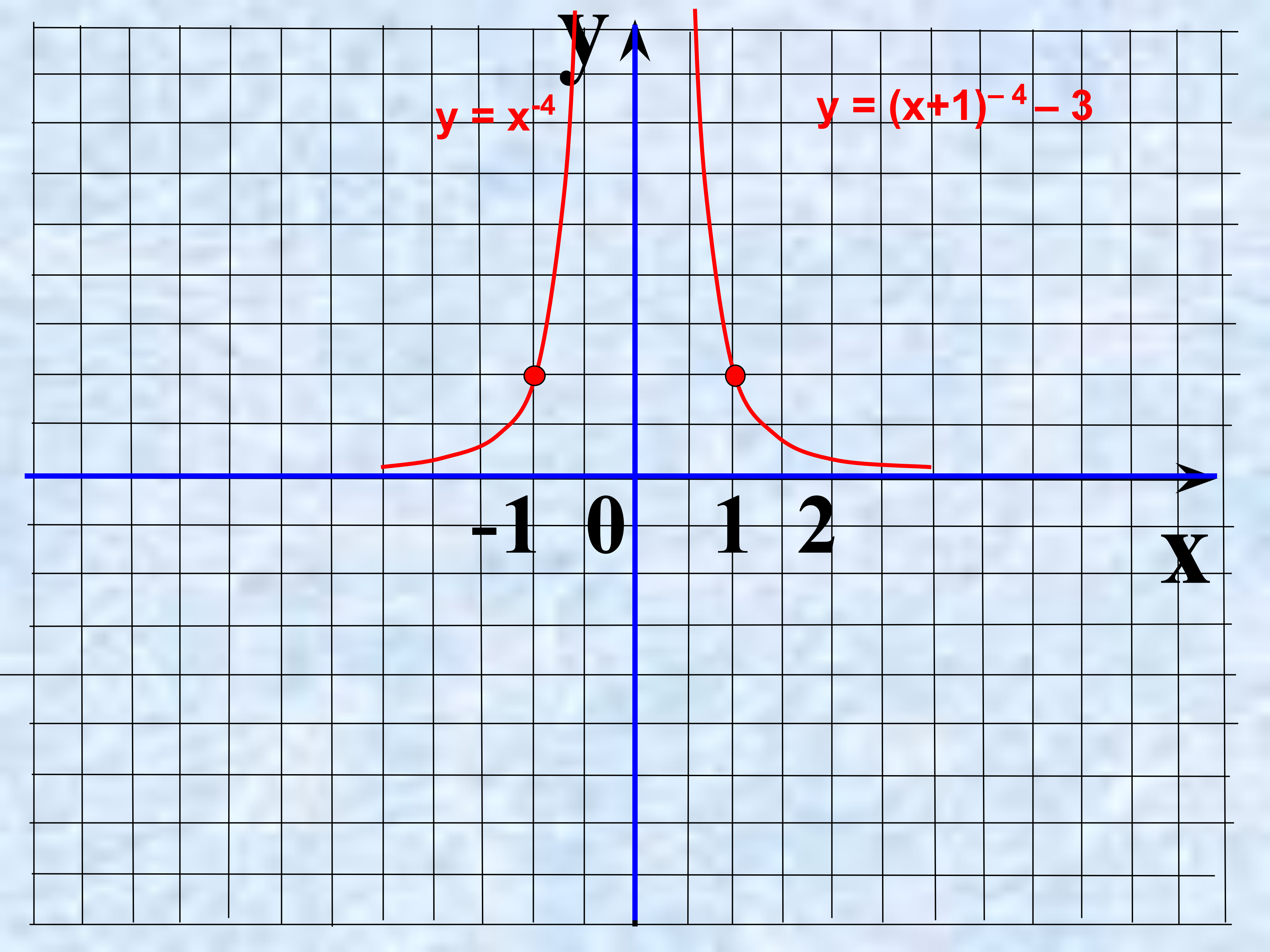
Как построить график функции

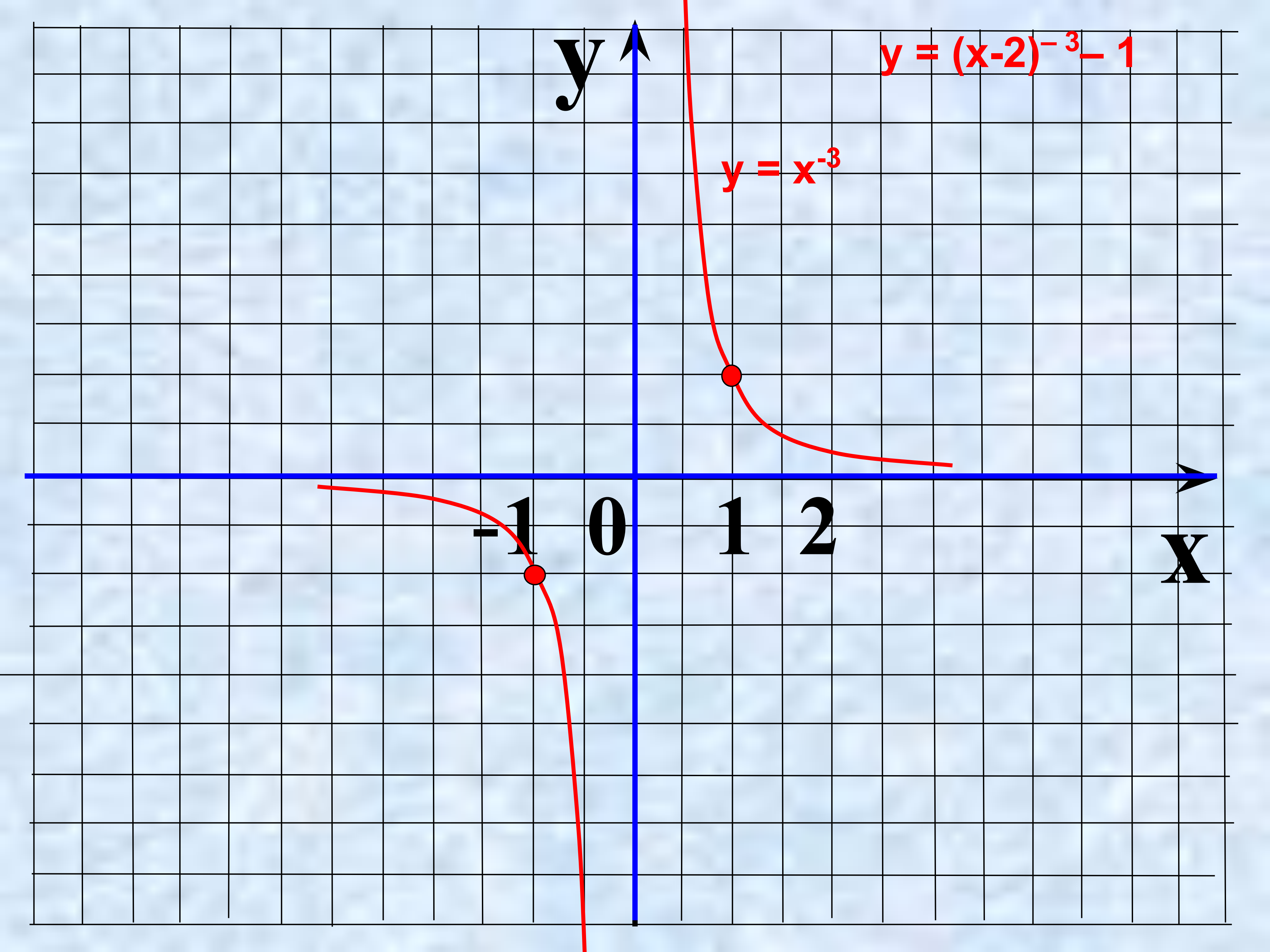
$y = f(x + l) + m$,

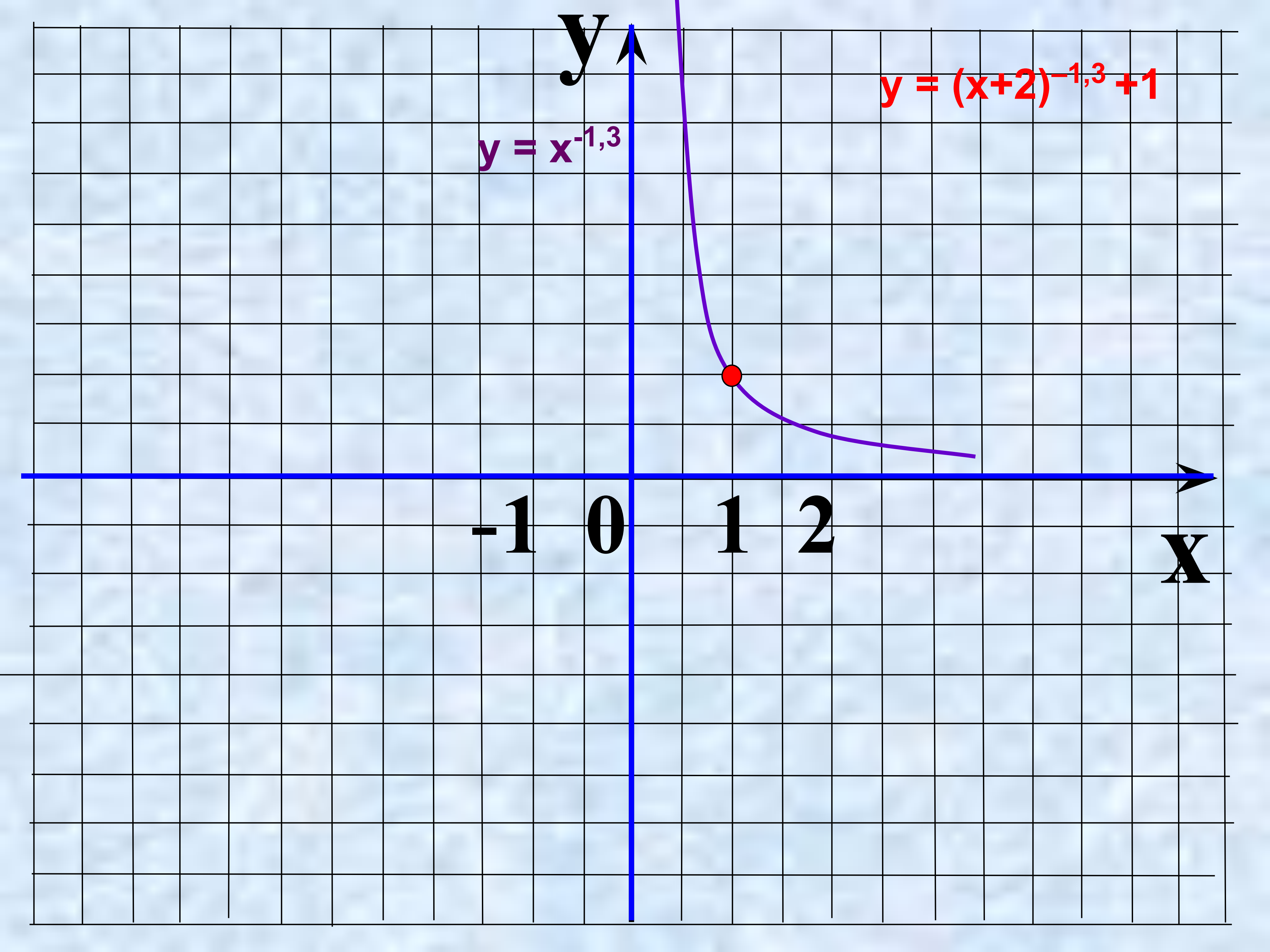
если известен график функции

$y = f(x)$




y
$y = x^{-4}$
$y = (x+1)^{-4} - 3$
-1
0
1
2
x


y = (x-2)^{– 3} – 1
y = x^{-3}
y
x
-1
0
1
2


y
$y = (x+2)^{-1,3} + 1$
$y = x^{-1,3}$
-1
0
1
2
x

Пример 1. Найдём производную функции:

$$а)\quad y=3x^{\frac{2}{3}};\quad y'=3\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=2x^{-\frac{1}{3}};$$

$$б)\quad y=7x^{-\frac{4}{7}};\quad y'=7\cdot\left(x^{-\frac{4}{7}}\right)'=7\cdot\left(-\frac{4}{7}\right)\cdot x^{-\frac{11}{7}}=-4x^{-\frac{11}{7}};$$

$$в)\quad y=8(6x-5)^{\frac{5}{8}};\quad y'=8\left((6x-5)^{\frac{5}{8}}\right)'=8\cdot 6\cdot\frac{5}{8}96x-5)^{-\frac{3}{8}}=$$

$$30(6x-5)^{-\frac{3}{8}}.$$

При этом было использовано правило дифференцирования

$$(f(ax+b))'=af'(ax+b).$$

Пример 2. *Исследуем функцию* $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}$

На монотонность и экстремумы и построим её график.

1. Найдём производную функции:

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}} - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = \frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

2. Функция существует при $x \geq 0$, производная существует при $x>0$. Поэтому критических точек у функции нет. Стационарную точку найдём из условия $y' = 0$ или $\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}} = 0$, откуда $x=1$.

3. Очевидно, что при $x \in (0;1]$, значение $y' \leq 0$ и функция $y(x)$ убывает на этом промежутке. При $x \in [1;+\infty)$ значение $y' \geq 0$ и функция $y(x)$ возрастает. В точке $x = 1$ функция $y(x)$ имеет минимум

$$y_{\min} = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$$

Пример 2. *Исследуем функцию* $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}$ *На монотонность и экстремумы и построим её график.*

1. Найдём производную функции:

$$y'=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

2. Функция существует при *x* ≥ *0*, производная существует при *x*>*0*. Поэтому критических точек у функции нет. Стационарную точку найдём из условия $y'=0$ или $\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}=0$, откуда *x*=*1*.

3. Очевидно, что при *x* є *(0;1]*, значение *y'*≤*0* и функция *y(x)* убывает на этом промежутке. При *x* є *[1;+∞)* значение *y'*≥*0* и функция *y(x)* возрастает. В точке *x* = *1* функция *y(x)* имеет минимум

$$y_{\min}=\frac{2}{3}-2=-\frac{4}{3}$$