Логика

Тема 3.

«Классическая логика высказываний»

А.И.Мигунов

Язык логики высказываний и семантика логических союзов

- Пропозициональные переменные
  - $p, q, r, s, t, p_1, q_1, \dots$
- Логические союзы (пропозициональные связки)

Логический союз	**Аналог в естественном языке**	**Знак**
Коньюнкция	«и»	**&, •, $\wedge$ $(p \wedge q)$**
Слабая дизьюнкция	«или»	**$p \vee q$**
Строгая дизьюнкция	«либо…, либо…»	$\veebar$, **$p \not\leftrightarrow q$**
Импликация	«если …, то …»	$\supset$, **$(p \rightarrow q)$**
Эквиваленция	«… тогда и только тогда, когда …»	**$\equiv$, $(p \leftrightarrow q)$**
Отрицание	«не …», «не верно, что …»	$\overline{P}$, $\neg p$, **~ p**

- Технические знаки – (,).

А.И.Мигунов

Определение формулы логики высказываний

1. Пропозициональная переменная есть формула;
2. если ***A*** – формула, то **~*A*** тоже формула;
3. если ***A*** – формула и ***B*** – формула, то

   $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \nleftrightarrow B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – тоже формулы;
4. любая последовательность знаков из алфавита языка логики высказываний есть формула только в силу пунктов 1, 2, 3 данного определения.

Метаязык

$$A \to B$$

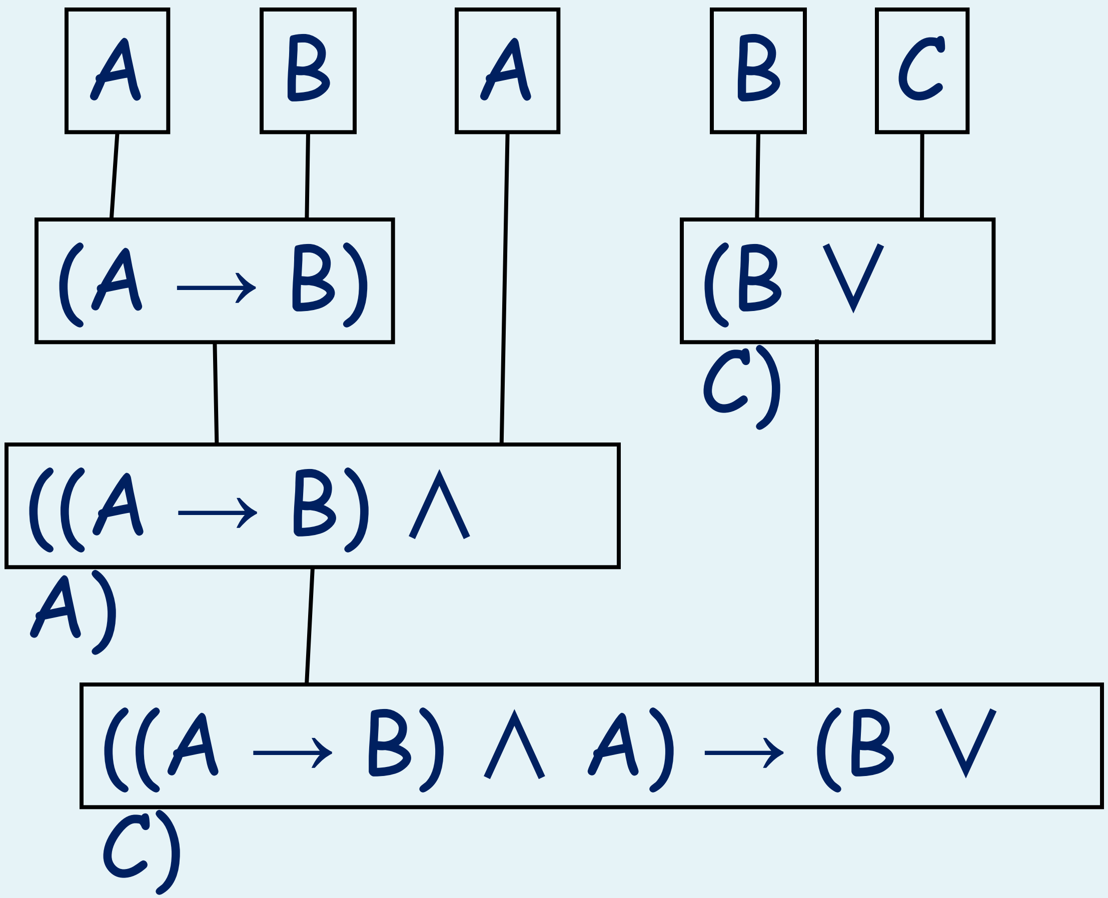
$p \to q$

$((p \to q) \wedge p) \to (q \vee r)$

$(p \vee r) \to q$

Построение дерева формулы

- $((A \to B) \wedge A) \to (B \vee C)$



Семантика логических союзов

A	B	~A	A∧B	A∨B	A→B	A↔B	A $\nleftrightarrow$ B
И	И	Л	И	И	И	И	Л
И	Л	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	Л	Л	И	И	Л

- Студент А должен сдать все экзамены вовремя или взять академический отпуск, и, если он берет академический отпуск, то сможет продолжить обучение в следующем году.
- Студент А должен сдать все экзамены вовремя - p
- Студент А должен взять академический отпуск - q
- Студент А сможет продолжить обучение в следующем году – t

$$(p \vee q) \wedge (q \rightarrow t)$$

- Или Сэм пойдет на вечеринку, и Макс не пойдет на нее, или Сэм не пойдет на вечеринку, и Макс отлично проведет время
- $(p \wedge \sim q) \nleftrightarrow (\sim p \wedge r)$

- Необходимые и достаточные условия счастья для шейха состоит в том, чтобы иметь вино, женщин и услаждать свой слух пением.
- $p \leftrightarrow (q \wedge r \wedge s)$

- Фиорелло ходит в кино только в том случае, когда там показывают комедию
- $(p \rightarrow q)$

Таблицы истинности формул логики высказываний

Некто А говорит: «Я лжец, а В не лжец».

Кто А и кто В?

«А рыцарь» – ***A***

«А лжец» - ***~A***

$\sim A \land B$

A	B	~A	~A Λ B
~~И~~	~~И~~	~~Л~~	~~Л~~
~~И~~	~~Л~~	~~Л~~	~~Л~~
~~Л~~	~~И~~	~~И~~	~~И~~
Л	Л	И	Л

- Некто А говорит: «Если я рыцарь, то съем свою шляпу»

А рыцарь – А
А ест шляпу - С

А → С

А	**С**	***А* → *С***
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

«Это была первая наша встреча с Планом. В тот день я мог бы оказаться в совершенно другом месте. Если бы в тот день я не встретился на улице с Бельбо, сейчас бы я мог... Продавать на рынке в Самарканде кунжутное семя. Готовить в печать издания произведений классической литературы для слепых по Брайлю. Возглавлять филиал Ферст Нейшнл Бэнк на Земле Франца Иосифа... Условно-противительные предложения с недостоверной посылкой всегда истинны, благодаря тому что ирреальна предпосылка. Но в тот день я был не где-нибудь, а там, так что теперь я действительно здесь»

У. Эко Маятник Фуко

A	**C**	***A* → *C***
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Если я рыцарь, то 2 х 2 = 4

A →

А	*И*	*А → И*
И	И	И
Л	И	И

Если я рыцарь, то 2 х 2 = 5

A →

А	*Л*	*А → Л*
И	Л	Л
Л	Л	И

«Сокровища на острове есть в том и только в том случае, если я рыцарь»

$$A \leftrightarrow S$$

A	S	$A \leftrightarrow S$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

Пример 1
Где сидит принцесса?

1
По крайней мере, в одной из этих комнат находится принцесса

2
Тигр сидит в другой комнате

Истинны ли утверждения на дверях комнат? - спросил узник
Может, оба истинны, а может, оба ложны – ответил король.

Принцесс комнате 1 - $\mathbf{p_1}$
Принцесс комнате 2 - $\mathbf{p_2}$
Тигр в к $\mathbf{t_1}$

$(p_1 \vee p_2) \quad \leftrightarrow \quad t_1$

Где сидит принцесса?

$$(p_1 \vee p_2) \quad \leftrightarrow \quad t_1$$

p_1	p_2	t_1	$p_1 \vee p_2$	$(p_1 \vee p_2) \leftrightarrow t_1$
Л	И	И	И	И

- Если магнит нагревать, то он размагнитится. Этот магнит нагревали, следовательно, он размагничен.
- $((A \to B) \land A) \to B$

A	B	$A \to B$	$((A \to B) \land A$	$((A \to B) \land A) \to B$
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И
л	Л	И	Л	И

А.И.Мигунов

Т.-и., общезначимые

Нейтральные

Т.-л., невыполнимые

Только «и»

Хотя бы одно значение «и»
Хотя бы одно значение «л»

Только «л»

выполнимые

необщезначимые

Отношение логического следования

- Формула $\boldsymbol{B}$ логически следует из формул $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ ($\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B}$), если и только если в каждой пропозициональной интерпретации, в какой все формулы $\boldsymbol{A_1, A_2, \ldots, A_n}$ принимают значение «***и***», формула $\boldsymbol{B}$ также есть «***и***».

$$A_1, A_2 \vdash B$$

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

Отношение логического следования
(Теорема дедукции)

- Задача установления того, следует ли высказывание B из высказываний A_1, A_2,…, A_n (имеет ли место $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$) сводится к задаче выяснения является ли высказывание $((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B)$ тождественно-истинным (тавтологией, законом логики).

Формула логики высказываний является тождественно-истинной формулой, если при любых интерпретациях вхордящих в ее состав пропозициональных переменных она принимает значение «истина».

Отношение логического следования

- Формула ***B*** логически следует из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ($A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$), если и только если в каждой пропозициональной интерпретации, в какой все формулы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ принимают значение «***и***», формула ***B*** также есть «***и***».

$$A_1, A_2 \vdash B \qquad (A_1 \wedge A_2) \to B$$

$p \to q$

$\sim q$

$\sim p$

$$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$$

А.И.Мигунов

p	q	~p	~q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \sim q$	$((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$
И	И	Л	Л	И	Л	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	Л	И
Л	Л	И	И	И	И	И

$$\frac{\begin{array}{l} p \to q \\ \sim q \end{array}}{\sim p}$$

А.И.Мигунов

Основные модусы логики высказываний

MODUS PONENS	$A \to B$ $\underline{A}$ B	$((A \to B) \land A) \to B$
MODUS TOLLENS	$A \to B$ $\underline{\sim B}$ $\sim A$	$((A \to B) \land \sim B) \to \sim A$

A	B	$A \to B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

A	B	~A	~B	$A \to B$
И	И	Л	Л	И
И	Л	Л	И	Л
Л	И	И	Л	И
Л	Л	И	И	И

А.И.Мигунов

$$\cancel{\begin{array}{l} A \to B \\ \underline{B \qquad\quad} \\ A \end{array}}$$

?

$$((A \to B) \land B) \to A$$

A	B	A → B	((A → B) ∧ B	((A → B) ∧ B)→A
И	И	И	И	И
И	Л	Л	Л	И
Л	И	И	И	Л
Л	Л	И	Л	И

Я заплатил бы за работу по ремонту телевизора, если бы он стал работать. Он же не работает. Поэтому я платить не буду.

Я плачу за работу по ремонту телевизора – p
Телевизор работает - r

$$\frac{r \rightarrow p,\ \sim r}{\sim p}$$

$$((r \rightarrow p) \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$$

r	p	$\sim r$	$\sim p$	$r \rightarrow p$	$(r \rightarrow p) \wedge \sim r$	$((r \rightarrow p) \wedge \sim r) \rightarrow \sim p$
И	И	Л	Л	И	Л	И
И	Л	Л	И	Л	Л	И
Л	И	И	Л	И	И	Л
Л	Л	И	И	И	И	И

Необходимые и достаточные условия

Я плачу за ремонт телевизора, если он работает.

P – я плачу за ремонт

R – телевизор работает

~~Если **R**, то **P**~~

~~**R** → **P**~~

Если **P**, то **R**

P → **R**

P	R	P → R
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Необходимые и достаточные условия

$$\begin{array}{l} P \to R \\ \underline{P} \\ R \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \to R \\ \underline{\sim R} \\ \sim P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \to R \\ \underline{\sim P} \\ \sim R\ (?) \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \to R \\ \underline{R} \\ P\ (?) \end{array}$$

Основные модусы логики высказываний

MODUS TOLENDO PONENS	$A \vee B$ $\underline{\sim A}$ B	$((A \vee B) \wedge \sim A) \rightarrow B$
MODUS PONENDO TOLLENS	$A \not\leftrightarrow B$ $\underline{A}$ $\sim B$	$((A \not\leftrightarrow B) \wedge A) \rightarrow \sim B$

A	B	~A	~B	$A \vee B$	$A \not\leftrightarrow B$
И	И	Л	Л	И	Л
И	Л	Л	И	И	И
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	Л

А.И.Мигунов

Основные модусы логики высказываний

ПРОСТАЯ КОНСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА	$\dfrac{\begin{array}{c}A \to B \\ C \to B \\ A \vee C\end{array}}{B}$	$((A \to B) \wedge (C \to B) \wedge (A \vee C)) \to B$
СЛОЖНАЯ КОНСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА	$\dfrac{\begin{array}{c}A \to B \\ C \to D \\ A \vee C\end{array}}{B \vee D}$	$((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \to (B \vee D)$

Основные модусы логики высказываний

ПРОСТАЯ ДЕСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА	$\dfrac{A\to B \quad A\to D \quad \sim B\vee\sim D}{\sim A}$	$((A\to B)\wedge(A\to D)\wedge(\sim B\vee\sim D))\to\sim A$
СЛОЖНАЯ ДЕСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА	$\dfrac{A\to B \quad C\to D \quad \sim B\vee\sim D}{\sim A\vee\sim C}$	$((A\to B)\wedge(C\to D)\wedge(\sim B\vee\sim D))\to(\sim A\vee\sim C)$

«Если ваши книги согласуются с Кораном, то они излишни. Если ваши книги не согласуются с Кораном, то они вредны. Но они либо согласуются с Кораном, либо нет. Следовательно, они либо излишни, либо вредны»

СЛОЖНАЯ КОНСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА	$\dfrac{A \to B \quad C \to D \quad A \vee C}{B \vee D}$	$((A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C)) \to (B \vee D)$

А.И.Мигунов

Зенон:
Если тело находится в движении, то оно должно двигаться или там, где оно есть, или там, где его нет.
Но тело не может двигаться ни там, где оно есть, ни там, где его нет.
Следовательно,
оно вообще не может двигаться, т.е. движение невозможно»

ПРОСТАЯ ДЕСТРУКТИВНАЯ ДИЛЕММА ?	$\dfrac{p \to (q \vee r) \quad \sim(q \vee r)}{\sim p}$	$((p \to (q \vee r)) \wedge \sim(q \vee r)) \to \sim p$

$$\dfrac{A \to B \quad \sim B}{\sim A}$$

Modus Tollens

$$((A \to B) \wedge \sim B) \to \sim A$$