Методы проверки тождественной истинности формул

Основные методы проверки тождественной истинности формул:

1. Прямой метод.
2. Алгебраический метод.
3. Алгоритм Квайна.
4. Алгоритм редукции.
5. Метод семантических таблиц.
6. Метод резолюций.

Метод резолюций в алгебре высказываний

Определение. Пусть для некоторой переменной X дизъюнкты D_1, D_2 представимы в виде $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. Тогда дизъюнкт $D_1' \vee D_2'$ называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 по переменной X и обозначается $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Резольвента дизъюнктов D_1, D_2 по некоторой переменной X называется *резольвентой дизъюнктов* D_1, D_2 и обозначается $\mathrm{Res}(D_1, D_2)$. По определению $\mathrm{Res}(X, \neg X) = 0$.

Свойство. Если $D_1 = D_1' \vee X$, $D_2 = D_2' \vee \neg X$. выполнимы, то выполнима $\mathrm{Res}_X(D_1, D_2)$.

Определение. *Резолютивным выводом формулы* Ф из множества дизъюнктов $S=\{D_1,\ldots,D_m\}$ называется такая последовательность формул $\Phi_1,\ldots,\Phi_n$, что:

1) $\Phi_n=\Phi$;
2) каждая из формул Φ_i $(i=1,\ldots,n)$ либо принадлежит множеству S, либо является резольвентой $\Phi_i=\mathrm{Res}(\Phi_j,\Phi_k)$ предыдущих формул Φ_j, Φ_k при некоторых $1\leq j,k\leq i$.

Теорема. Множество дизъюнктов $S=\{D_1,\dots,D_m\}$ противоречиво в том и только том случае, если существует резолютивный вывод значения 0 из множества S.

Так как по критерию логического следования соотношение

$$\Phi_1,\dots,\Phi_n \models \Phi$$

равносильно условию

$$\Phi_1,\dots,\Phi_n,\neg\Phi \models,$$

то справедлив следующий результат.

Следствие (Проверка логического следования формул).

Пусть для формул $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \Phi$ формула $\Psi = \Phi_1 \wedge \dots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$ имеет КНФ $\Psi = D_1 \wedge \dots \wedge D_m$.

Тогда логическое следование $\Phi_1, \dots, \Phi_n \models \Phi$ равносильно существованию резолютивного вывода значения 0 из множества дизъюнктов $S = \{D_1, \dots, D_m\}$.

Алгоритм проверки логического следования формул $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Phi$:

1. Составить формулу

$$\Psi = \Phi_1 \wedge \ldots \wedge \Phi_n \wedge \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m.$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \models \Phi$.

Пример. Методом резолюций проверим логическое следование:

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V \models X \vee \neg Y.$$

Данное соотношение равносильно условию

$$(\neg X \Rightarrow Z),(Y \Rightarrow W),((W \wedge Z) \Rightarrow V),\neg V ,\neg(X \vee \neg Y) \models,$$

т.е. условию противоречивости формулы

$$\Psi = (\neg X \Rightarrow Z) \wedge (Y \Rightarrow W) \wedge ((W \wedge Z) \Rightarrow V) \wedge \neg V \wedge \neg(X \vee \neg Y).$$

Найдем КНФ этой формулы:

$$\Psi = (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg(W \wedge Z) \vee V) \wedge \neg V \wedge (\neg X \wedge Y) =$$
$$= (X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee W) \wedge (\neg W \vee \neg Z \vee V) \wedge \neg V \wedge \neg X \wedge Y .$$

Рассмотрим множество дизъюнктов

$$S = \{X \vee Z, \neg Y \vee W, \neg W \vee \neg Z \vee V, \neg V, \neg X, Y\} .$$

Построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S:

$$\Phi_1 = \mathrm{Res}_X(X \vee Z, \neg X) = Z,$$

$$\Phi_2 = \mathrm{Res}_Y(\neg Y \vee W, Y) = W,$$

$$\Phi_3 = \mathrm{Res}_Z(\neg W \vee \neg Z \vee V, Z) = \neg W \vee V,$$

$$\Phi_4 = \mathrm{Res}_W(\Phi_2, \Phi_3) = V,$$

$$\Phi_5 = \mathrm{Res}(\Phi_4, \neg V) = 0.$$

Таким образом, множество дизъюнктов формулы Ψ противоречиво и, значит, выполняется исходное логическое следование.

Алгоритм проверки тождественной истинности формулы Φ:

1. Рассмотреть формулу

$$\Psi = \neg\Phi$$

и найти ее КНФ

$$\Psi = D_1 \wedge \ldots \wedge D_m .$$

2. Найти резолютивный вывод значения 0 из множества $S = \{D_1, \ldots, D_m\}$.

3. Если такой вывод существует, то выполняется $\models \Phi$.

Решение логических задач

Задача. Методом резолюций проверьте справедливость следующих рассуждений.

Допустим, что если руководство вуза действует по закону высшей школы, то студент-задолжник не отчисляется, если он является задолжником не более одного месяца или преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск. Не будет ли отчислен студент-задолжник, если руководство вуза действует по закону высшей школы и сессия только что закончилась?

Решение. Введем обозначения для следующих высказываний:

D = «руководство вуза действует по закону высшей школы»;

S = «студент-задолжник отчисляется»;

P = «преподаватель-экзаменатор уходит в отпуск»;

T = «студент является задолжником не более одного месяца».

Первое утверждение задачи

$$\Phi_1 = D \Rightarrow \left((T \vee P) \Rightarrow \neg S\right)$$

Сформулированное в вопросе задачи утверждение выражается следующим сложным высказыванием:

$$\Phi_2 = D \wedge T \Rightarrow \neg S$$

По условию задачи требуется определить, выполняется ли логическое следование

$$\Phi_1 \models \Phi_2$$

$$\Psi = \Big(D \Rightarrow \big((T \vee P) \Rightarrow \neg S\big)\Big) \wedge \neg(D \wedge T \Rightarrow \neg S) =$$

$$= \big(\neg D \vee (\neg(T \vee P) \vee \neg S)\big) \wedge \neg(\neg(D \wedge T) \vee \neg S) =$$

$$= \big(\neg D \vee \neg S \vee (\neg T \wedge \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S =$$

$$= \big((\neg D \vee \neg S \vee \neg T) \wedge (\neg D \vee \neg S \vee \neg P)\big) \wedge D \wedge T \wedge S.$$

Рассмотрим множество дизъюнктов полученной КНФ формулы Ψ

$$S = \{\neg D \vee \neg S \vee \neg T, \neg D \vee \neg S \vee \neg P, D, T, S\}$$

и построим резолютивный вывод значения 0 из этого множества S.