Раздел 2: Колебания и волны

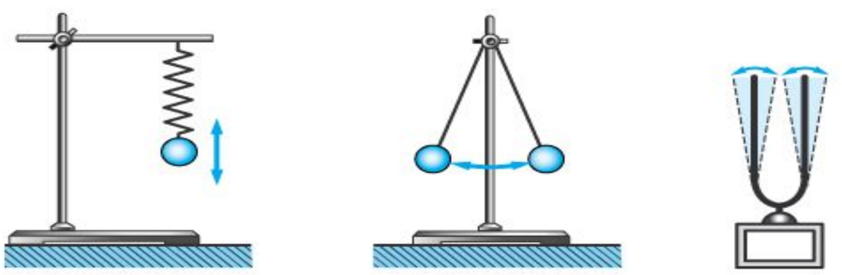
Тема7. Колебания

Тема 7. Колебания

1. Гармонические колебания.
2. Характеристики колебаний.
3. Представление колебаний в векторной и комплексной формах.
4. Сложение колебаний.

1 учебный вопрос: Гармонические колебания.

Колебательным называется такое движение, при котором тело многократно проходит через одно и то же устойчивое положение равновесия. При этом под устойчивым понимается такое положение, в котором тело может находиться бесконечно долго.



Виды колебаний:

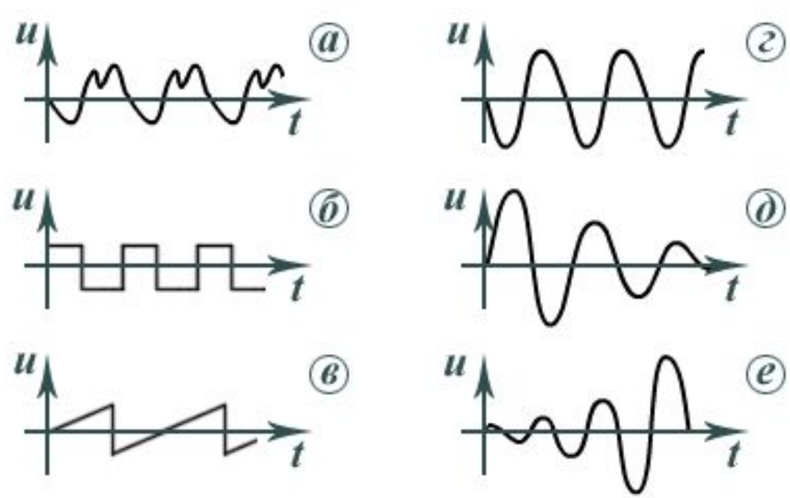


Рис. Представление колебаний: ***а*** – сложной формы, ***б*** – прямоугольные, ***в*** – пилообразные,

г – гармонические, ***д*** – затухающие, ***е*** – нарастающие

периодические *(изменяющиеся величины повторяются через равные промежутки времени);*
непериодические.

В зависимости от характера действующих сил различают колебания:
свободные (собственные), вынужденные, автоколебания, параметрические.

***Гармоническими называются колебания*, при которых изменение величин происходит по закону синуса или косинуса.**

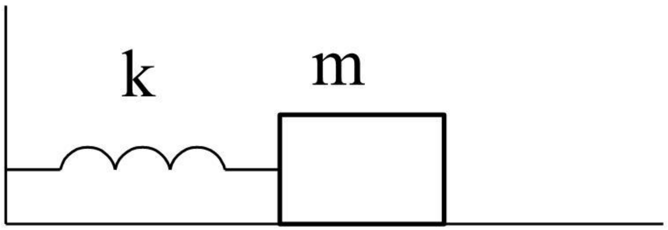
$$x = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad (1)$$

A – амплитуда

ω – циклическая частота

α – начальная фаза

Гармонический осциллятор



$$ma = -kx$$

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, где ω_0 – собственная частота колебаний **(2)**

дифференциальное уравнение гармонического осциллятора

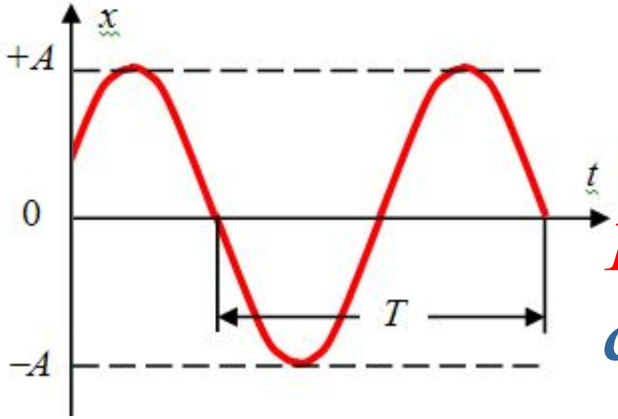
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$ – циклическая частота

Решение: $x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$

2 учебный вопрос: Характеристики колебаний

Кинематические характеристики**: смещение, амплитуда, фаза, частота, период, скорость, ускорение.**

Динамические характеристики**: сила, энергия.**



$$x = A\cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

1. Смещение x – отклонение системы от положения равновесия.

2. Амплитуда $A = x_{max}$ – максимальное отклонение системы от положения равновесия.

3. Фаза $\phi = (\omega_0 t + \phi_0)$ − *угол, определяющий положение колеблющегося тела в данный момент времени* ***t;***

$\phi_0 = \phi(t = 0)$ − *начальная фаза (значение фазы в начальный момент времени).*

4. Циклическая частота колебаний $\omega_0 = d\phi/dt$ − *характеризует скорость изменения фазы.*

5. Период колебаний *T* − *промежуток времени одного полного колебания за который фаза колебания получает приращение, равное* 2π.

$$\omega_0 = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow dt = \frac{d\varphi}{\omega_0} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

6. Частота колебаний ν_0 – число полных колебаний, совершаемых в одну секунду

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}\ \text{с}^{-1} = [\text{Гц}] \qquad \omega_0 = 2\pi\nu_0$$

Для пружинного гармонического маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

7. Скорость колеблющегося тела $\upsilon = dx/dt$

$$\upsilon = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = -\upsilon_{\max} \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \upsilon_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\upsilon_{\max} = A\omega_0$ – **амплитуда скорости**

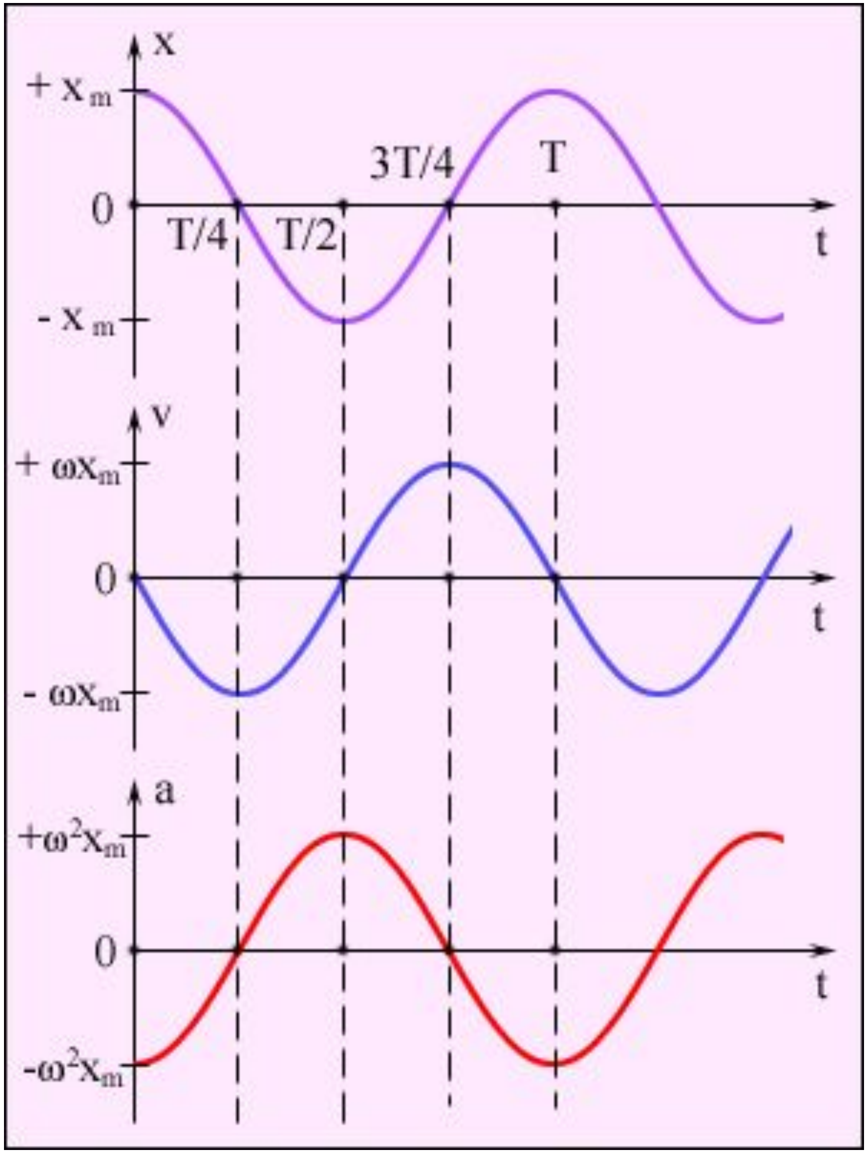
Скорость опережает смещение по фазе на $\pi/2$.

8. Ускорение колеблющегося тела $\upsilon = d^2x/dt^2 = d\upsilon/dt$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{d\upsilon}{dx} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = -a_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = a_{\max} \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi\right)$$

$a_{\max} = A\omega_0^2$ – **амплитуда ускорения**

Находится в противофазе со смещением



смещение

скорость

ускорение

9. Полная энергия незатухающих колебаний

$$E_{к} = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_{п} = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E = E_{к} + E_{п} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\left[\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\right] =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{2} = \mathrm{const}$$

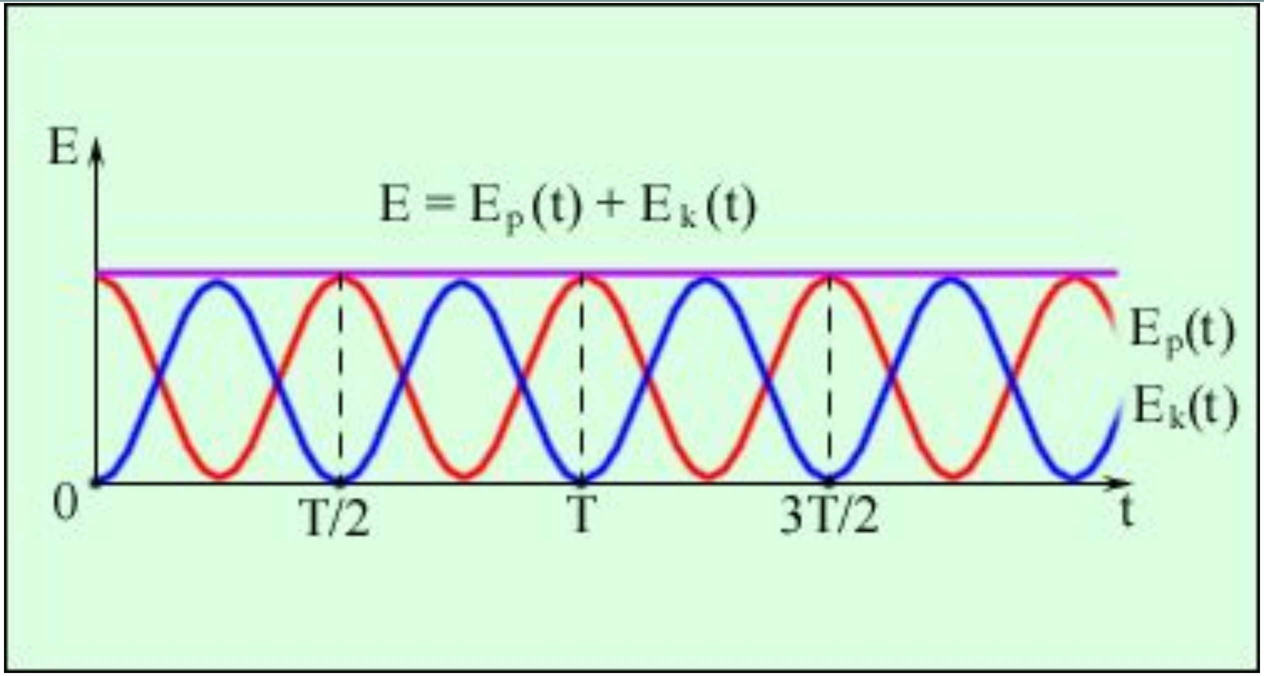
$$\boxed{E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}} \qquad (3)$$

Свойства энергии

1. Период изменения кинетической и потенциальной энергии в 2 раза меньше периода изменения смещения, скорости и т.д.

$$E_{п} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right) = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\left[1 - \sin2\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)\right]$$

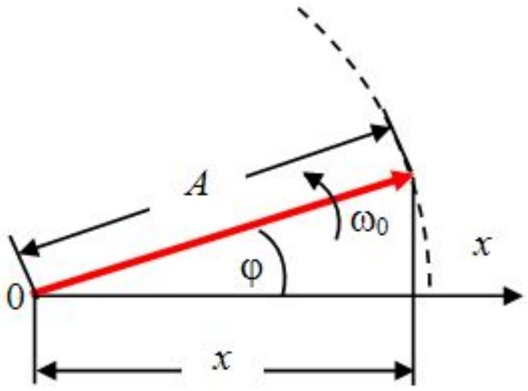
2. При свободных незатухающих колебаниях полная энергия системы сохраняется постоянной, что выражает консервативность системы. Происходит лишь превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.



3. Полная энергия колеблющегося тела пропор циональна квадрату амплитуды.

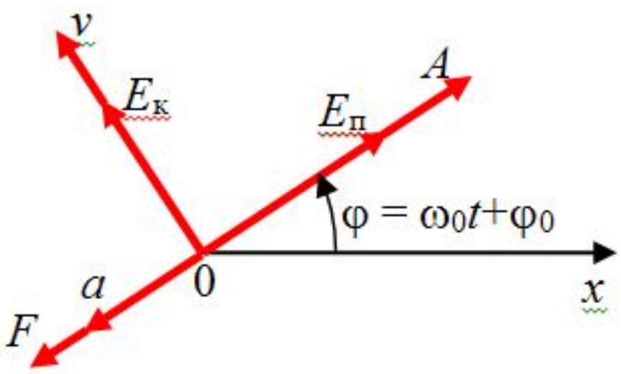
4. Полная энергия пропорциональна квадрату частоты колебаний.

3 учебный вопрос: Представление колебаний в векторной и комплексной формах



Векторная диаграмма изображает колебания графически с помощью векторов, вращающихся с угловой скоростью ω_0, равной собственной частоте колебания.

$$x = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$$



- фазы

Комплексным числом называется выражение вида

$$z = x + i \cdot y$$

где $\boldsymbol{x}$ ***и*** $\boldsymbol{y}$ ***– действительные числа,***

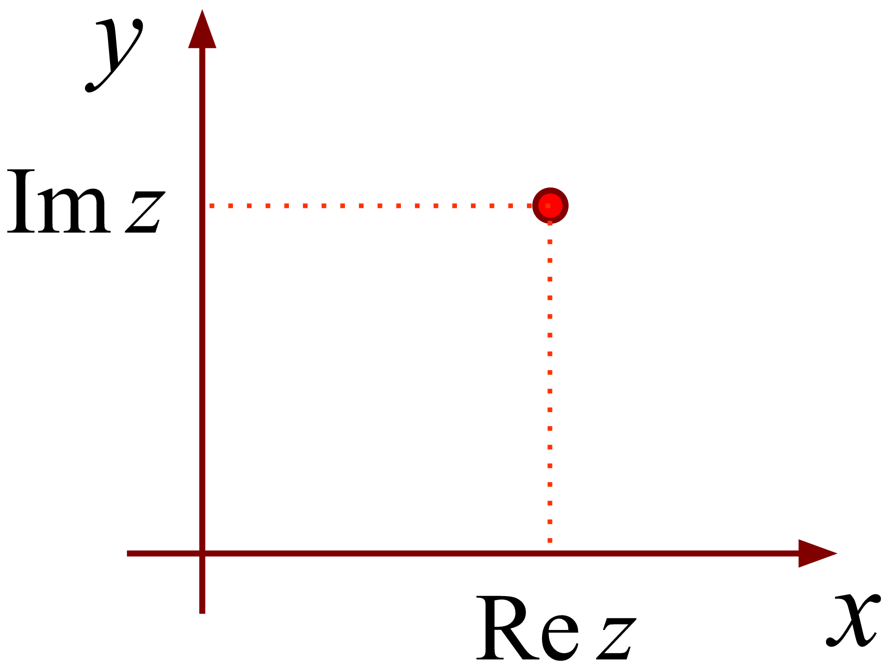
$\boldsymbol{i}$ ***– мнимая единица:*** $i^2 = -1$

Число $\boldsymbol{x}$ ***называется действительной частью числа z:*** $x = Re(z)$

Число $\boldsymbol{y}$ ***называется мнимой частью числа z:*** $y = Im(z)$

Геометрическое изображение комплексных чисел

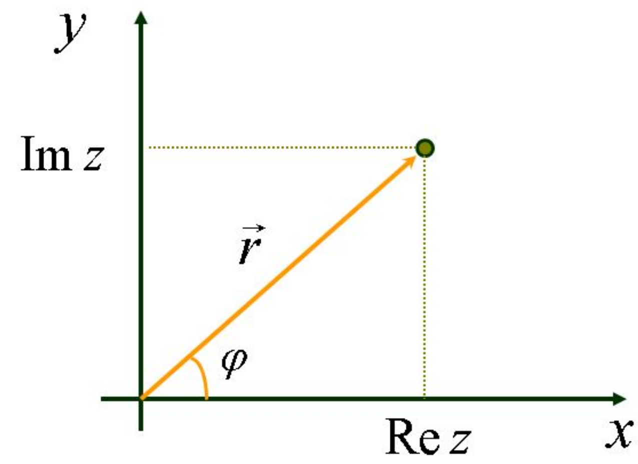
Для изображения комплексных чисел используются точки координатной плоскости ХОУ.



По оси абсцисс откладывается действительная часть комплексного числа Re z, а по оси ординат – мнимая Im z,

Ось x называется действительной, а ось y – мнимой.

С каждой точкой комплексной плоскости связан радиус-вектор точки $\vec{r} = \overrightarrow{OZ}$

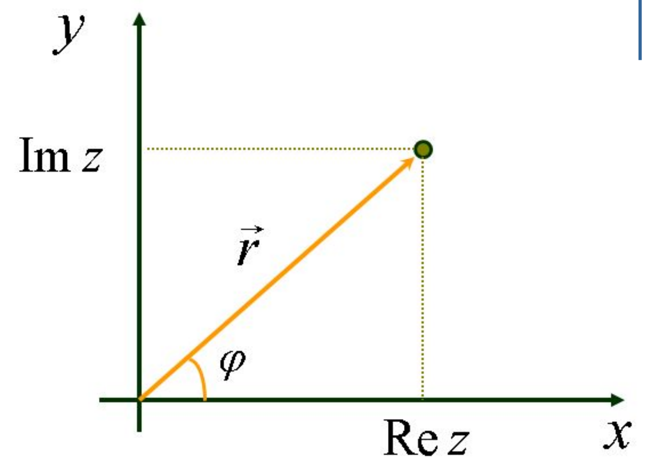


Длина этого вектора называется модулем комплексного числа z и обозначается $|z|$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Угол, образованный радиус-вектором точки и осью x называется аргументом комплексного числа z и обозначается $\varphi = Arg\ z$

Выражение *z=x+iy* называется алгебраической формой комплексного числа.



$$z = x + i \cdot y = r \cdot \cos\varphi + i \cdot r \cdot \sin\varphi =$$

$$= r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Выражение *z=r(cosϕ+isin ϕ)* называется тригонометрической формой комплексного числа.

Модуль $r = |z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Например, $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$

Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}.$$

Так как $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, то из формулы $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$ получаем, что

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} & \text{для внутренних точек} \\ & \text{I, IV четвертей,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi & \text{для внутренних точек} \\ & \text{II четверти,} \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} - \pi & \text{для внутренних точек} \\ & \text{III четверти.} \end{cases}$$

Комплексные числа

$$z = x + i \cdot y \qquad \overline{z} = x - i \cdot y$$

называются сопряженными

$$z\overline{z} = r^2 \equiv |z|^2$$

- квадрат модуля комплексного числа

Используя *формулу Эйлера*

$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi,}$$

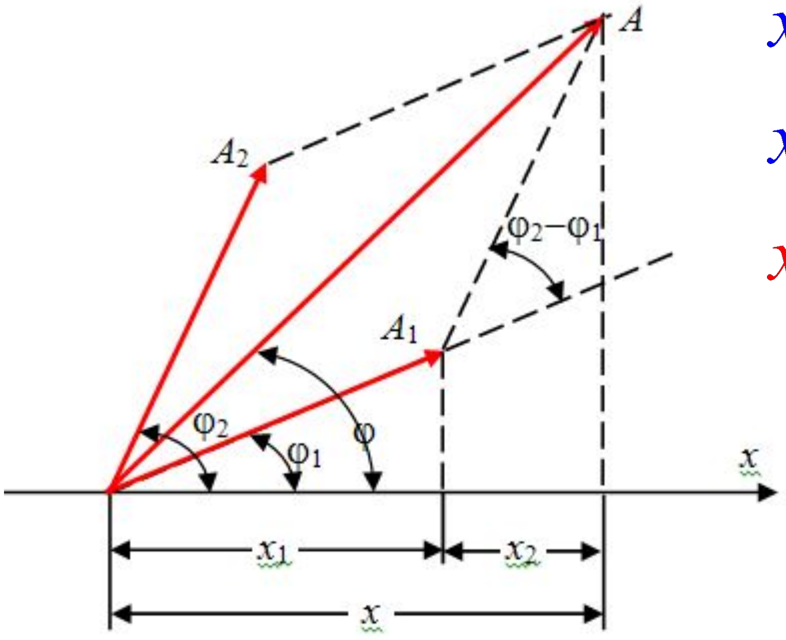
комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в так называемой ***показательной*** (или ***экспоненциальной***) ***форме***

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

где $r = |z|$ — модуль комплексного числа, а угол $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi$ $(k = 0, -1, 1, -2, 2, \ldots)$.

4 учебный вопрос: Сложение колебаний

а) <u>Сложение колебаний одной частоты, направленных вдоль одной прямой.</u>

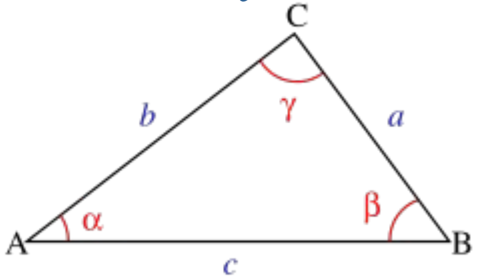


$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi) \qquad (4)$$

Теорема косинусов:

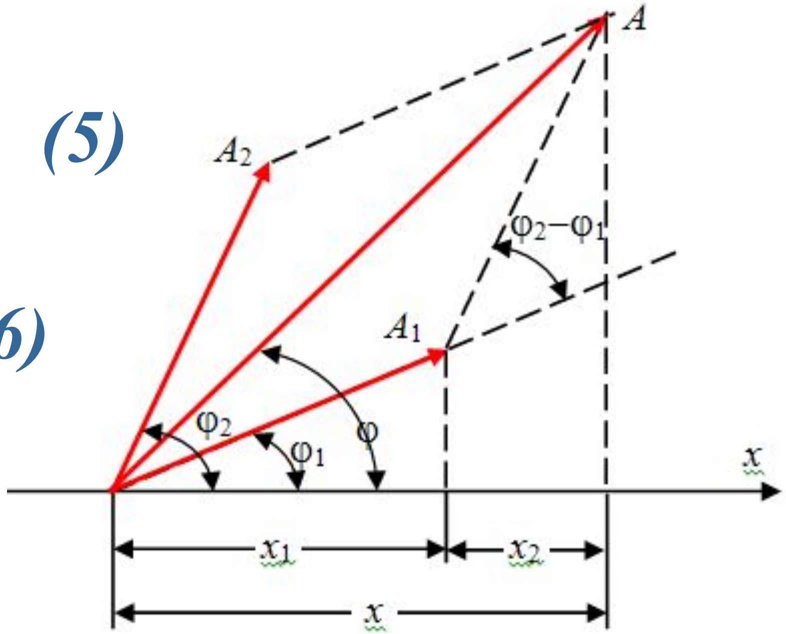


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos\left[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)\right]$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad \textbf{(5)}$$

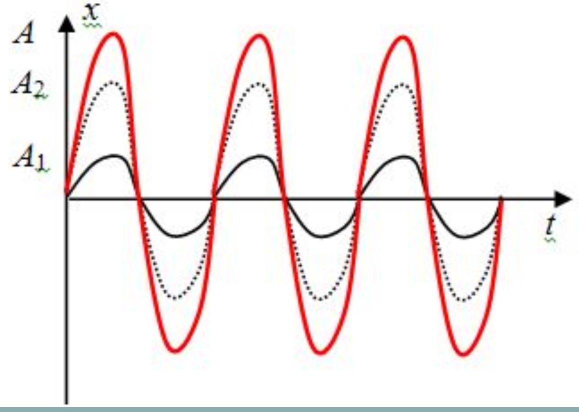
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \quad \textbf{(6)}$$

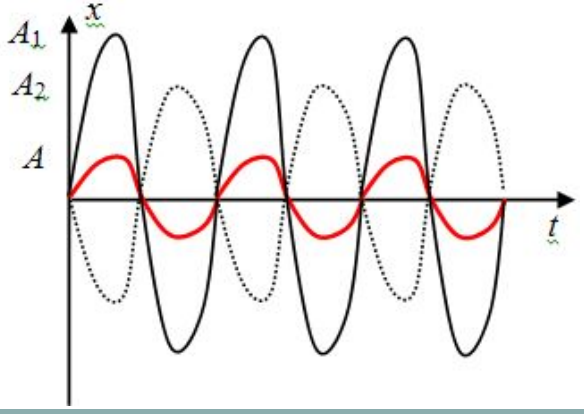


Частные случаи:

1. Колебания совпадают по фазе: $\phi_2 - \phi_1 = 0 \qquad A = A_1 + A_2$

2. Колебания находятся в противофазе: $\phi_2 - \phi_1 = \pm\pi \quad A = |A_1 - A_2|$





б) Сложение колебаний одного направления близких частот (биения)

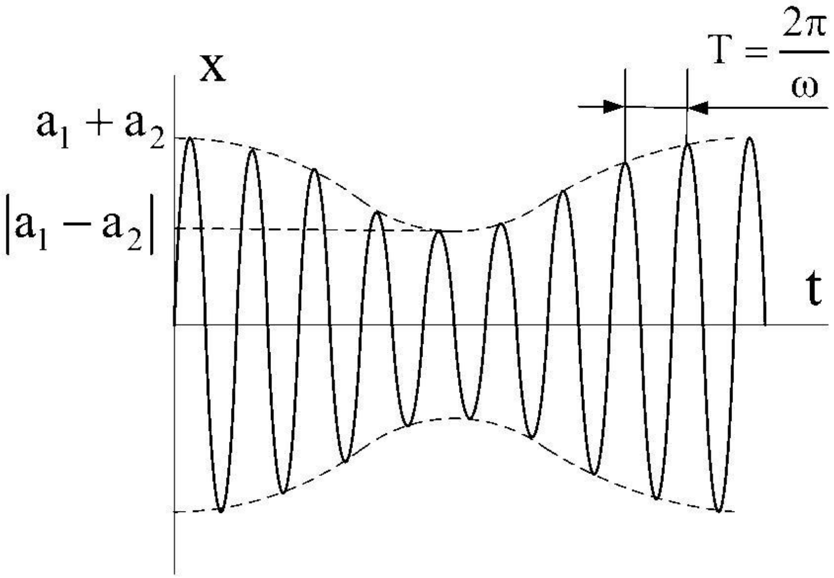
$x_1 = a_1 \cos(\omega t)$

$x_2 = a_2 \cos(\omega + \Delta\omega)t$

$\Delta\omega << \omega$

$x = x_1 + x_2 \approx A(t)\cos(\omega t)$

ãäå $A^2(t) = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\omega t)$ (7)

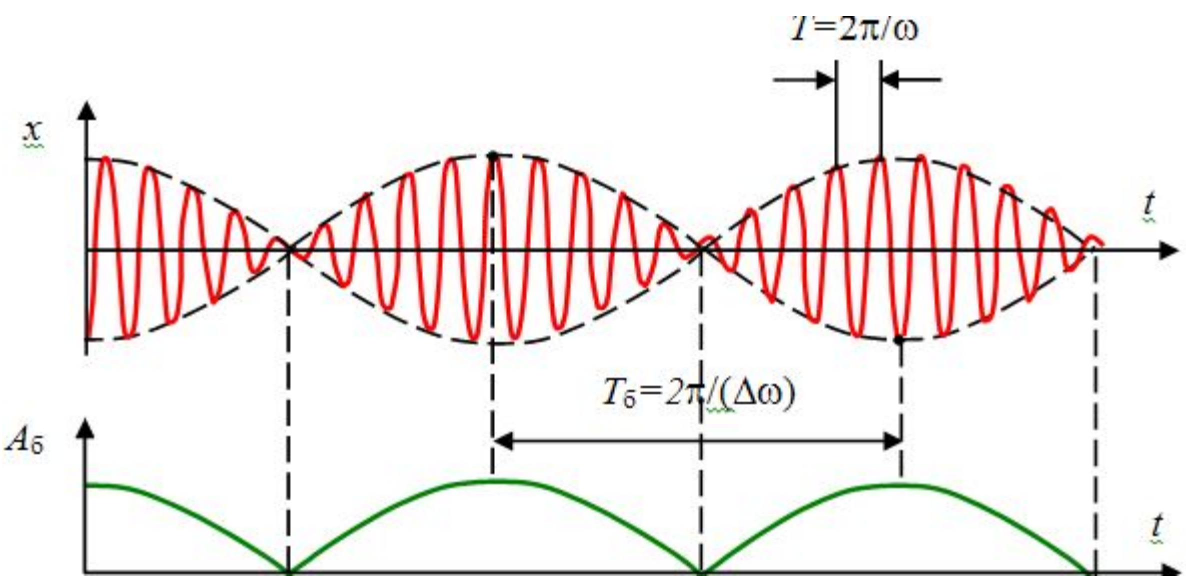


Частный случай: биения при сложении колебаний одинаковых амплитуд ($A_1=A_2=a$)

$$A^2(t) = 2a^2(1+\cos\Delta\omega t) = 4a^2\cos^2\frac{\Delta\omega t}{2} \qquad (8)$$

$$x(t) = \left|2a\cos\frac{\Delta\omega t}{2}\right|\cdot\cos\omega t \qquad (9)$$

Амплитуда и частота биений



$$A_б = \left|2a\cos\frac{\Delta\omega}{2}t\right|$$

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

в)Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний

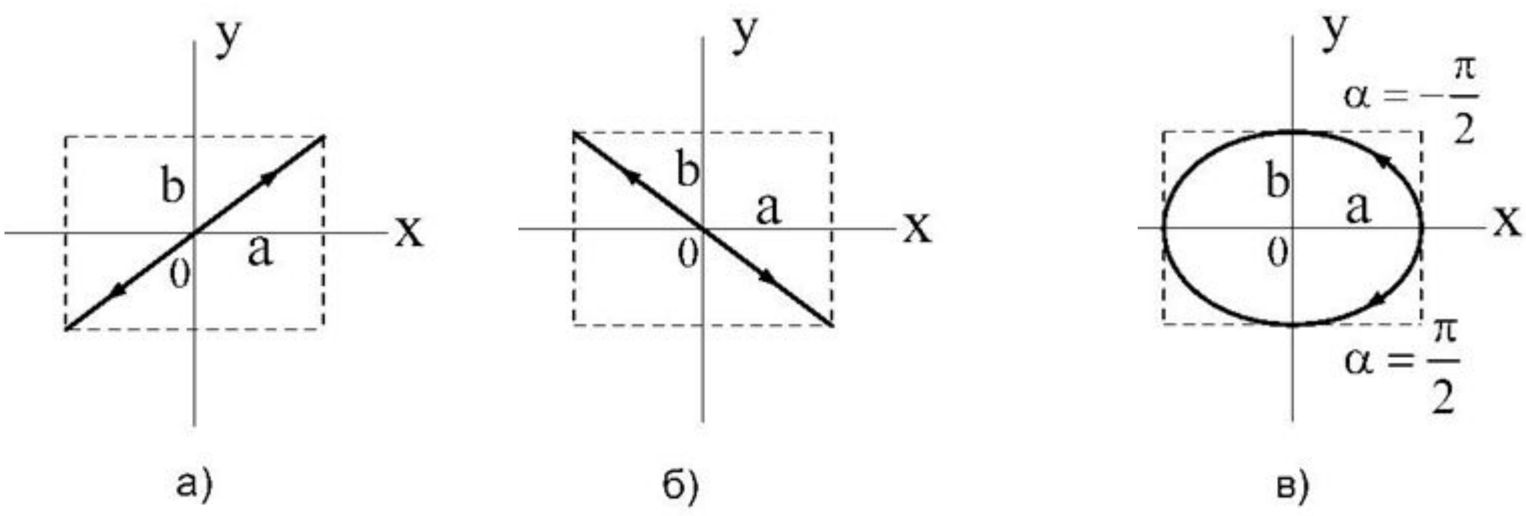
$$x = a\cos\omega t$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\alpha = \sin^2\alpha \qquad (10)$$

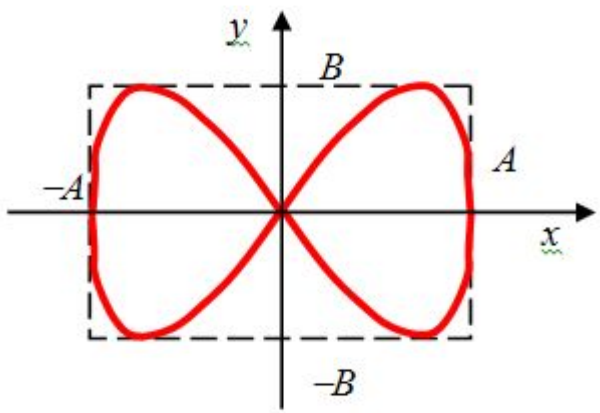
$$y = b\cos(\omega t + \alpha)$$

Частные случаи:

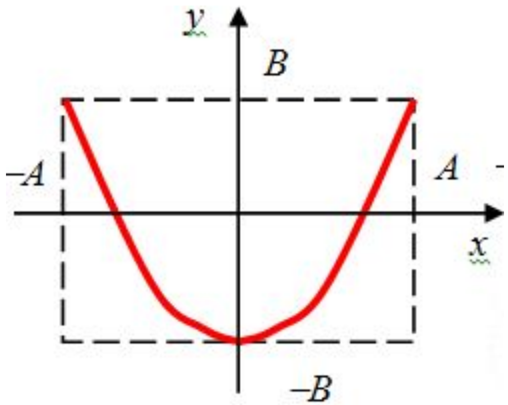
$а)\quad \alpha = 0 \quad y = \frac{b}{a}x,\quad б)\quad \alpha = \pm\pi \quad y = -\frac{b}{a}x,\quad в)\quad \alpha = \pm\pi/2 \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



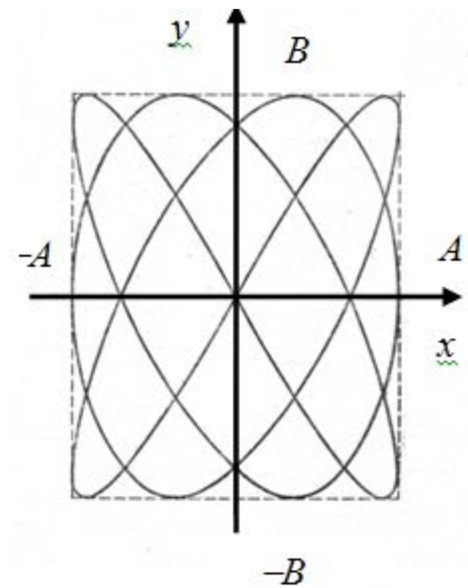
При неодинаковых частотах взаимно перпендикулярных колебаний траектория результирующего движения имеет вид сложных кривых, называемых <u>фигурами Лиссажу</u>.



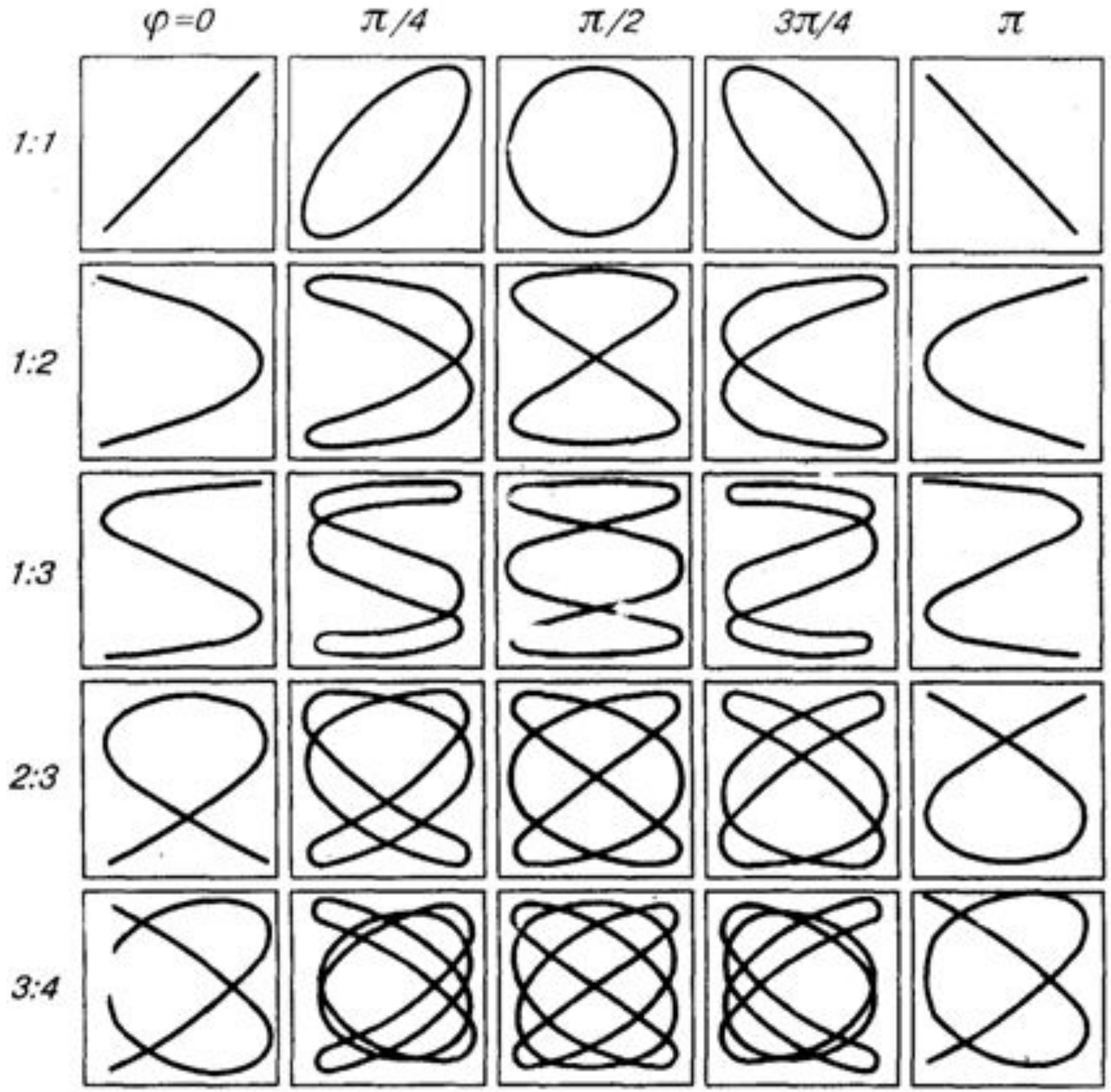
$\omega_1/\omega_2 = 1/2; \varphi = \pi/2$



$\omega_1/\omega_2 = 1/2; \varphi = 0$



$\omega_1/\omega_2 = 3/4; \varphi = \pi/2$


φ=0
π/4
π/2
3π/4
π
1:1
1:2
1:3
2:3
3:4