Лекция 4
Количество и сумма натуральных делителей числа.
Критерий простоты.
Решето Эратосфена

Количество натуральных делителей числа

Теорема

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ ***- каноническое разложение натурального числа n (n>1)***

Количество натуральных делителей числа n равно $\tau(n) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_s+1)$

Пример

$\tau(60)= \tau(2^2\cdot 3\cdot 5)=(2+1)(1+1)(1+1)=12$

Сумма натуральных делителей числа

Теорема

Если $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_s^{\alpha_s}$ - каноническое разложение натурального числа n (n>1), то сумма всех натуральных делителей числа n равна

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_s^{\alpha_s+1}-1}{p_s-1}$$

Примеры

$$\tau(1000000) = \tau\left(2^6 \cdot 5^6\right) = 7 \cdot 7 = 49;$$

$$\sigma(1000000) = \frac{2^7 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{5^7 - 1}{5 - 1};$$

$$\tau(4050) = \tau\left(2 \cdot 3^4 \cdot 5^2\right) = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30;$$

$$\sigma(4050) = \frac{2^2 - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} \cdot \frac{5^3 - 1}{5 - 1} = 11253.$$

Теорема (Евклида)
Множество простых чисел бесконечно

$$2 \cdot 3 + 1 = 7,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 = 2311,$$

$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Доказательство теоремы Евклида

- ***Предположим, что P – последнее, самое большое простое число***
- ***Рассмотрим натуральное число $M=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot P+1$***
- ***Если число M составное, то оно должно иметь по крайней мере один простой делитель***
- ***Но этим делителем не может быть ни одно из простых чисел 2, 3, 5, …, P, поскольку при делении M на каждое из них получается остаток 1***
- ***Следовательно, число M либо само простое, либо делится на простое число, большее P***
- ***Значит, предположение, что существует наибольшее простое число P, неверно и множество простых чисел бесконечно***

Теорема (критерий простоты)

Если число n>1 и не имеет простых делителей $p \le \sqrt{n}$, то n – простое

Доказательство

- **Если бы n было составным, то n=ab, где 1<a<n и 1<b<n**
- **Оба множителя не могут быть больше $\sqrt{n}$, иначе их произведение ab было бы больше n**
- **Следовательно, хотя бы одно из чисел a и b не превышает $\sqrt{n}$**
- **Если, например, число $a \le \sqrt{n}$, то его простой делитель** $p \le \sqrt{n}$.
- **Таким образом, любое составное число имеет простой делитель, не превышающий $\sqrt{n}$**

Решето Эратосфена

Эратосфе́н Кире́нский (276 - 194 гг. до н.э.) — греческий математик, астроном, географ, филолог и поэт. Первый известный ученый, доказавший, что Земля имеет форму шара

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~


2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
43
47
53
59
61
67
71
73
79
83
89
97