

Анализ размерностей и теория подобия

Моделированием называется изучение объекта (оригинала) посредством создания и исследования его копии (модели).

Модель замещает оригинал только в тех характеристиках, которые составляют предмет познания, поэтому соответствует оригиналу только в тех свойствах, которые подлежат изучению, она исключает все остальные свойства и отношения оригинала, которые на данном этапе не являются актуальными, это и делает модель удобной для исследования.

Степень соответствия модели и оригинала определяют с помощью критериев подобия.

Критерии подобия различны по своей природе, так как являются отношениями разных физических величин (отношениями сил, мощностей, интенсивностей, скоростей, напоров, площадей, температур и т.д.).

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

При решении конкретной задачи необходимо констатировать следующее:

- как правило, **известны далеко не все определяющие параметры** данного явления;
- даже среди определяющих параметров можно выделить **факторы**, оказывающие более **значимое влияние**, и факторы, влияние которых сравнительно **невелико**;
- **практически невозможно** подобрать параметры природы таким образом, чтобы определяющие **критерии модели и природы были равнозначны**.

Поэтому **при моделировании** приходится:

- **использовать наиболее значимые параметры** и исключать из рассмотрения менее значимые параметры;
- пренебрегать необходимостью равенства некоторых критериев;
- пользоваться **усредненными** значениями переменных величин.

В этом случае **подобие между натурой** и построенной на ее основе **моделью является приближенным**.

Степень приближения в каждом конкретном случае различна.

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Критерии подобия, представляющие собой отношения одноимённых физических параметров системы (например, отношения длин, площадей, объемов), называются тривиальными и при установлении определяющих критериев подобия обычно не рассматриваются: равенство их для двух систем является определением физического подобия.

Тривиальная безразмерная комбинация: отношение суммарного объема рабочих цилиндров к объему ДВС - плотность компоновки.

Нетривиальные безразмерные комбинации, которые можно составить из определяющих параметров, и представляют собой критерии подобия.

Критерий в теоретической механике

Критерий подобия механического движения получается из уравнения, выражающего второй закон Ньютона Критерий подобия механического уравнения, $Ne = \frac{F \cdot t^2}{m \cdot l}$ получается из уравнения, в второй закон Ньютона и называется числом Ньютона:

где F — действующая на тело сила;

m — его масса;

t — время;

l — характерный линейный размер

КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ В ГИДРОГАЗОДИНАМИКЕ

В гидромеханике важнейшими критериями подобия являются:

- Число Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot l}{\mu} = \frac{ul}{\nu}$$

- Число Маха

$$M = \frac{u}{a^*}$$

- Число Фруда

$$Fr = \frac{u^2}{g \cdot l}$$

- Число Re характеризует отношение инерционных сил при движении жидкости или газа к силам вязкости,
- число Маха M отношение скорости газа к местной скорости звука,
- число Fr — отношение инерционных сил к силам тяжести.

Первая теоремы подобия

Подобные объекты и явления имеют одинаковые критерии подобия.

Критерии подобия можно определить двумя различными путями:

- **из анализа размерностей**, разновидностью которого является метод нулевых размерностей;
- **из условия тождественности уравнений**, описывающих процессы.

При этом различие состоит лишь в способах решения задачи, результат, в конечном счете, один и тот же.

Вторая теорема подобия

Функциональная зависимость между характеризующими процесс величинами может быть представлена в виде зависимости между составленными из них критериями подобия.

Применение безразмерных комплексов величин, позволяет распространить поученные результаты на все подобные процессы, а также уменьшить число величин, характеризующих функциональную зависимость.

Третья теорема подобия

Достаточным условием подобия двух систем является равенство любых двух соответствующих критериев подобия этих систем, составленных из их основных параметров и начальных (граничных) условий.

Определяющие критерии состояются из независимых между собой величин, которые входят в условия однозначности:

- геометрические соотношения;
- физические параметры;
- краевые, начальные и граничные условия.

Анализ размерностей.

Размерность физических величин

- Размерность физической величины физической величины — выражение, показывающее связь этой величины с основными величинами данной системы физических величин;
- **Безразмерная** (безразмерностная) **величина** (величина с размерностью единица) — физическая величина, в размерность которой все сомножители, соответствующие основным физическим величинам данной системы физических величин, входят в степени, равной нулю.
- **Безразмерностные величины** представляют собой отношения физических величин с одинаковыми размерностями.
- Говоря о размерности, следует различать понятия система физических величин Говоря о размерности, следует различать понятия система физических величин и система единиц.

Система физических величин и система единиц

- Система физических величин - совокупность физических величин вместе с совокупностью уравнений, связывающих эти величины между собой.
- Система единиц - набор основных и производных единиц вместе с их кратными и дольными единицами, определенными в соответствии с установленными правилами для *данной системы физических величин*.

Например, в одной и той же системе единиц длина может быть выражена в микронах, сантиметрах, метрах и километрах.

В другой систем единиц длина может быть выражена в футах, ярдах, милях.

СИСТЕМА ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

- Все величины, входящие в систему физических величин, делят на основные и производные.
- Под основными понимают величины, условно выбранные в качестве независимых так, что никакая основная величина не может быть выражена через другие основные.
- Все остальные величины системы определяются через основные величины и называются *производными*.
- Каждой основной величине сопоставляется символ размерности в виде заглавной буквы латинского или греческого алфавита, далее размерности производных величин обозначаются с использованием этих символов.

Система физических величин

В международной системе величин (*International System of Quantities, ISQ*), на которой базируется Международная система единиц, в качестве основных величин выбраны **длина, масса, время, электрический ток, термодинамическая температура, сила свет и количество вещества.**

В общем случае **размерность физической величины** представляет собой **произведение размерностей основных величин, возведённых в различные (положительные или отрицательные, целые или дробные) степени.**

Система физических величин.

Размерности основных физических величин

Название и обозначение величины		Единица измерения	Обозначение		Формула	Показатели степени						
			русское	Международное		м	кг	с	А	К	кд	
Длина	L	метр	м	m	L	1						
Масса	m	килограмм м	кг	kg	m		1					
Время	t	секунда	с	s	t			1				
Сила электрического тока	I	Ампер	А	A	I				1			
Термодинамическая температура	T	Кельвин	К	K	T					1		
Сила света	I _v	Кандела	кд	cd	J							1

Размерности физических величин

- Показатели степеней в этом выражении называют *показа-телями размерности* физической величины.
- Если в размерности величины хотя бы один из показателей размерности не равен нулю, то такую величину называют *размерной*, если все показатели размерности равны нулю — *безразмерной*.
- В формулах, имеющих физический смысл, только величины, имеющие одинаковую размерность, могут складываться, вычитаться или сравниваться.
- Например, сложение массы какого-либо предмета с длиной другого предмета не имеет смысла.
- Также невозможно сказать, что больше: 1 килограмм или 3 секунды.
- Из этого правила, в частности, следует, что левые и правые части уравнений должны иметь одинаковую размерность.

Размерности физических величин

Аргументы экспоненциальных, логарифмических и тригонометрических функций должны быть безразмерными величинами.

Эти правила используются для проверки правильности физических формул.

Если в полученном уравнении какое-то из них нарушается, то это свидетельствует, что в вычислениях была допущена ошибка.

При этом, однако, проверка размерности не может служить доказательством его правильности.

Система физических величин. Размерности производных физических величин

Для указания размерностей производных величин используют символ **dim** (от [англ.](#) *dimension* — размер, размерность).

Например, для скорости при равномерном движении выполняется

$$V = \frac{S}{t}$$

где S — длина пути, пройденного телом за время t .

Для того, чтобы определить размерность скорости, в данную формулу следует вместо длины пути и времени подставить их размерности:

$$\dim V = LT^{-1}$$

Теория размерностей

В тех случаях, когда известен только набор физических параметров, характеризующих процесс, но неизвестны уравнения, связывающие их между собой, целесообразно применять теорию размерностей.

При этом **выбор номенклатуры физических параметров зависит от исследователя**, и данный этап в процедуре построения критериев подобия является наиболее ответственным.

Для выбора определяющих физических параметров можно использовать методы планирования экспериментов или экспертные методы.

Нахождение вида формул и критериев подобия с помощью анализа размерностей

- Анализ размерности — метод, используемый для построения обоснованных гипотез о взаимосвязи различных размерных параметров сложной системы.
- Совместно с представлениями о физическом смысле явлений или с привлечением опытных данных он приводит к результатам, дающим предварительную ориентировку в рассматриваемом круге явлений.
- Суть метода размерности заключается в том, что искомая закономерность может быть представлена в виде произведения степенных функций физических величин, от которых зависит искомая характеристика.

Нахождение вида формул и критериев подобия с помощью анализа размерностей

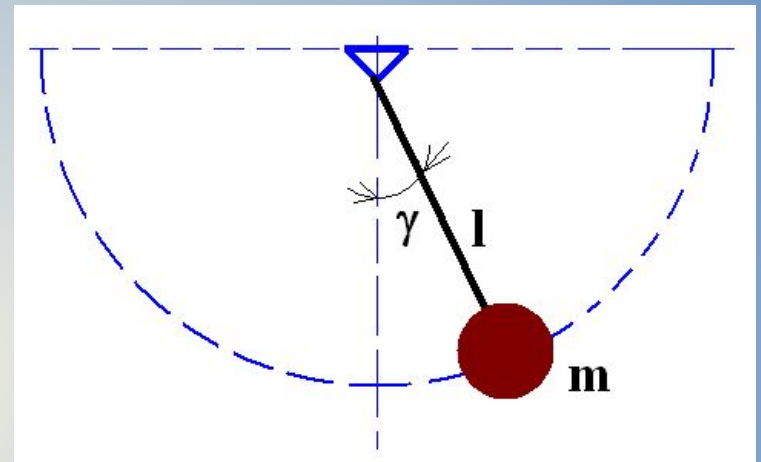
- Суть метода заключается в том, что из параметров, характеризующих систему, составляется выражение, имеющее нужную размерность.
- При анализе размерностей формул размерность левой части уравнения должна быть равна размерности правой части уравнения. Отсутствие такого равенства говорит о неверности формулы.
- Однако наличие такого равенства не даёт стопроцентной гарантии верности формулы.

Процедура нахождения вида формулы для расчета периода колебаний математического маятника

- Рассмотрим получение формулы для периода T колебаний математического маятника, который может зависеть от длины нити l , масса на конце маятника m , угла отклонения маятника α и ускорение свободного падения g .
- Он может также зависеть от сопротивления воздуха (мы будем использовать здесь вязкость воздуха), силы гравитационного притяжения Солнца, Луны и т.д.
- Однако известно, что сила притяжения к Земле значительно превышает все остальные силы, поэтому ими пренебрежем.

Процедура нахождения вида формулы для расчета периода колебаний математического маятника

Предположим, что период колебаний T является функцией длины нити l , массы груза m , угла отклонения α и силы ускорения земного притяжения g , причем каждая из этих величин возведена в некоторую степень.



$$T = c \cdot l^{\alpha} \cdot m^{\beta} \cdot g^{\delta}$$

где c – безразмерная постоянная;
 α , β , и δ – показатели степени, которые
нужно определить

Процедура нахождения вида формулы для расчета периода колебаний математического маятника

Запишем формулу
размерности для этого
соотношения:

$$[T] = c [L]^{\alpha} [M]^{\beta} \left[\frac{L}{T^2} \right]^{\delta}$$

После очевидных упро-
щений мы получаем

$$[T] = c [L]^{\alpha + \delta} [M]^{\beta} [T]^{-2\delta}$$

Процедура нахождения вида формулы для расчета периода колебаний математического маятника

В силу того, что семь основных величин системы СИ являются независимыми, для согласования размерностей в обеих частях равенства необходимо положить

$$1 = -2\delta,$$

$$0 = \alpha + \delta,$$

$$0 = \beta.$$

Решая эти уравнения, получаем:

$$\delta = -1/2, \alpha = 1/2, \beta = 0.$$

Процедура нахождения вида формулы для расчета периода колебаний математического маятника

Таким образом, искомое соотношение имеет вид:

$$T = c \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot f(\gamma)$$

где $f(\gamma)$ – некоторая функция угла γ , которую нельзя определить с помощью рассматриваемого нами метода.

Этот метод не позволяет определить безразмерную постоянную c .

Процедура нахождения вида формулы для расчета периода колебаний математического маятника

Этот метод не позволяет определить безразмерную постоянную C .

Для того чтобы найти значение C (оно оказывается равным 2π) и вид функции f ($f \approx 1$ для малых α), необходимо проделать такой анализ, основанный на законах Ньютона.

По существу, с помощью физической интуиции мы определили, какие физические величины (параметры) в этой задаче существенны, а какие нет.

Заметим, что любое выражение, полученное из анализа размерностей (или другим подходящим способом) должно быть проверено экспериментально.

Коэффициенты уравнений подобия

Требования к коэффициентам уравнений подобия можно сформулировать следующим образом:

1. коэффициенты должны иметь ясный физический смысл. Это позволит оценить границы их применения и по мере необходимости построить для их определения дополнительные математические модели.
2. иерархия математических моделей, описывающих физические процессы, должна строиться таким образом, чтобы в пределе стремиться к такому уравнению, коэффициентами которого были бы только физические константы.
3. в силу того, что математические модели должны строиться в виде зависимостей между критериями подобия, эмпирические коэффициенты, входящие в эти зависимости, должны быть безразмерными.
4. коэффициенты должны быть подобраны таким образом, чтобы модель охватывала как можно большее число типов изделий при соблюдении стохастического подобия их между собой.
5. число эмпирических коэффициентов, вводимых в математическую модель, должно быть оптимальным.
6. если математическая модель правильно отражает физическую сущность процессов, то, увеличивая число коэффициентов, можно существенно повысить адекватность модели.

Основные теоретические положения анализа размерностей

- Метод анализа размерностей может быть использован в случае, если искомая величина может быть представлена в виде степенной функции.
- Метод анализа размерностей позволяет качественно решить задачу и получить ответ с точностью до постоянного коэффициента.
- В некоторых случаях метод анализа размерностей является единственным способом решить задачу и хотя бы оценить ответ.
- Анализ размерностей при решении задачи широко используется в научных исследованиях.
- Решение задач методом анализа размерностей является дополнительным или вспомогательным методом, позволяющим лучше понять взаимодействие величин, их влияние друг на друга.

Основные теоретические положения анализа размерностей. Теорема Бэкингема

- Основные положения метода анализа размерностей базируется на теореме Бэкингема (π-теорема): **любое уравнение может быть представлено в критериальном виде – в виде, содержащем только безразмерные комбинации.**
- Представим, что введена группа исходных величин, например: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ (*).
- Если из этих величин методом анализа размерностей можно построить группу комбинаций и все эти комбинации окажутся безразмерными, то тогда группа исходных величин является полной, т.е. в форме (*) **соответствует некоторое уравнение** (которое мы можем и не знать).
- Если хоть одна из комбинаций окажется имеющей размерность, то это означает, что группа исходных величин построена неверно.
- В ней либо существует лишние, либо отсутствуют некоторые величины.

Основные теоретические положения метода анализа размерностей. Теорема Бэкингема

Пусть группа исходных величин содержит n величин, а m – количество основных единиц размерностей в используемой системе единиц измерения, то число безразмерных комбинаций, которое может быть получено из этой группы π , подчиняется следующему неравенству: $\pi \geq n - m$.

В случае, если $\pi \geq 1$, существует потенциальная возможность сведения всех исходных величин в одну безразмерную комбинацию.

В этом случае мы приходим к истинной функции, описывающей изучаемую зависимость.

В случае, когда $\pi \geq 2,3$ и т.д., анализ размерностей *не приводит* к функции, описывающей изучаемую зависимость.

π -теорема позволяет установить общую структуру зависимости, вытекающую только лишь из требования инвариантности физической зависимости при изменении масштабов единиц, даже если конкретный вид зависимости между исходными величинами неизвестен.

Алгоритм получения критериев подобия

методом анализа размерностей

Для определения критериев с помощью π -теоремы необходимо, прежде всего, выявить все те параметры

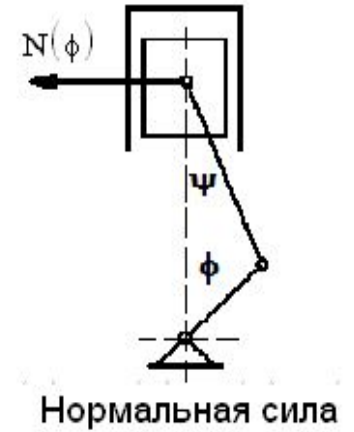
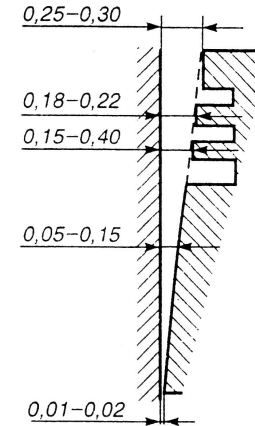
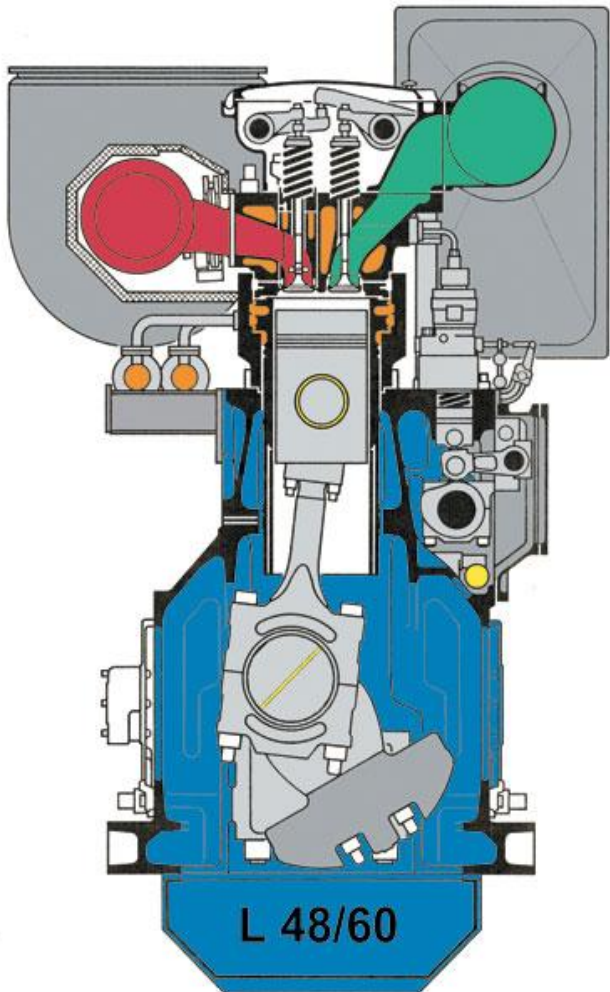
$$P_1, P_2, \dots, P_i, \dots, P_k, \dots, P_s, \dots, P_m,$$

которые характеризуют данное явление, и, следовательно, установить их число (m) .

Дальнейший процесс нахождения критериев подобия распадается на ряд последовательных этапов:

- составление матрицы размерностей параметров;
- выявление числа независимых между собой параметров;
- нахождение комбинаций независимых между собой параметров и установление их числа, т.е. числа форм записи;
- определение выражений критериев подобия во всех формах записи.

Критерий подобия, определяющий вибрации, порождаемые переключками поршней



Система уравнений для нахождения показателей степени

Таблица размерностей.

Величина		Степени		
		[L]	[M]	[T]
A_1	s	$\alpha_1 = 1$	$\beta_1 = 0$	$\varepsilon_1 = 0$
A_2	δ	$\alpha_2 = 1$	$\beta_2 = 0$	$\varepsilon_2 = 0$
A_3	N_{\max}	$\alpha_3 = 1$	$\beta_3 = 1$	$\varepsilon_3 = -2$
A_4	$D_{\text{срvt}}$	$\alpha_4 = 2$	$\beta_4 = 1$	$\varepsilon_4 = -2$

Система уравнений для нахождения показателей степени

Составим систему уравнений для нахождения

$$z_1 z_2 z_3 z_4$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 + 2z_4 = 0 \\ z_3 + z_4 = 0 \\ -2z_3 - 2z_4 = 0 \end{cases}$$

Критерий подобия, определяющий вибрации, порождаемые перекладками поршней

Указанный критерий подобия в общем виде может быть записан следующим образом:

$$\pi = [A_1]^{z_1} \cdot [A_2]^{z_2} \cdot [A_3]^{z_3} \cdot [A_4]^{z_4}$$

$$[A_i] = [L]^{\alpha_i} [M]^{\beta_i} [T]^{\varepsilon_i}$$

где размерность величины $[L]$ $[T]$

($[L]$ - размерность длины, $[T]$ - размерность времени, $[M]$ - размерность массы).

Показатели степени $z_1 z_2 z_3 z_4$ должны быть таковы, чтобы размерность была равна нулю.

Матрица размерностей

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}$$

МАТРИЦА РАЗМЕРНОСТЕЙ

Система уравнений для нахождения имеет множество решений, но физически обоснованным может быть только то из них, в котором безразмерный комплекс, характеризующий виброактивность ДВС, имеет практически линейную зависимость от величины зазора δ .

$z_1 = 0$ $z_2 = 1$ $z_3 = 1$ $z_4 = -1$

Тогда π , а безразмерный параметр виброактивности дизелей может быть представлен в виде:

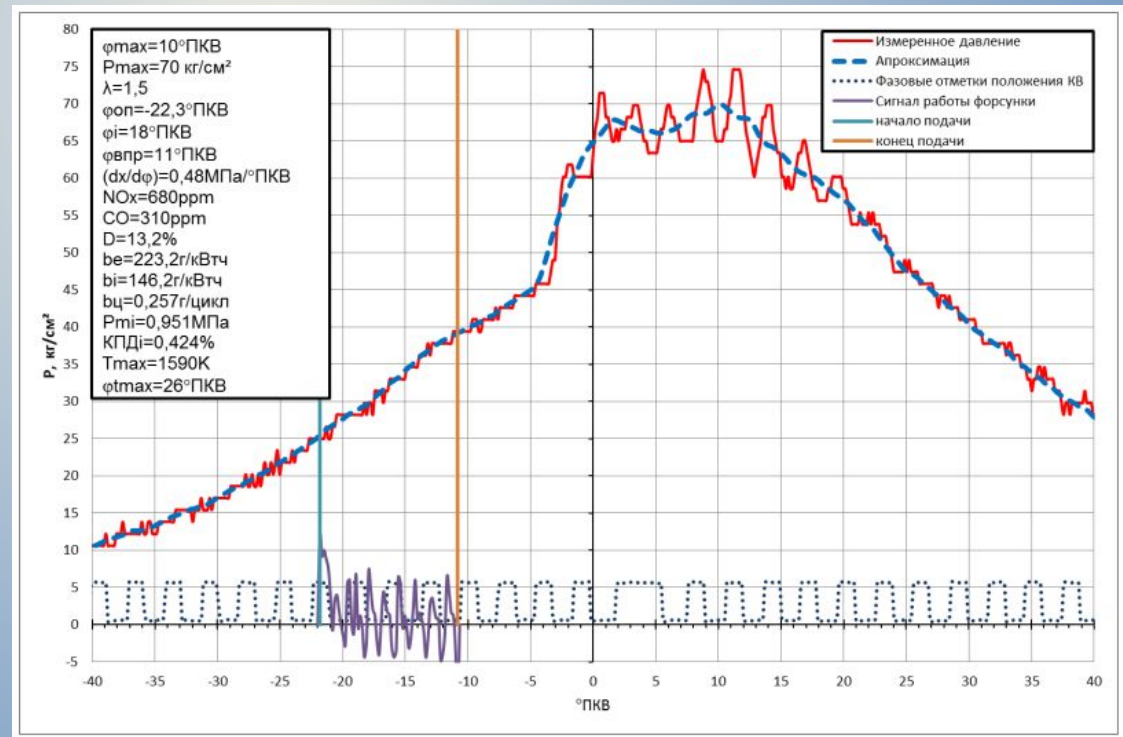
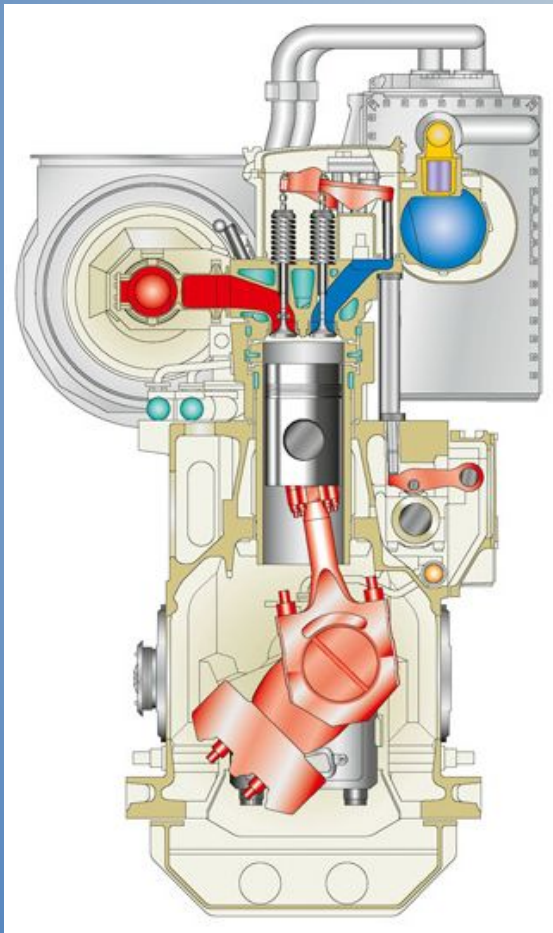
$$\pi = \frac{I_{IV}^{\max} \cdot \delta}{D_{czvt}}$$

Критерий подобия, определяющий вибрации, порождаемые перекладками поршней

Таким образом, с помощью метода анализа размерностей, был получен критерий, характеризующий уровень вибраций втулки цилиндра, вызванных перекладкой поршня в тепловом зазоре под воздействием нормальной составляющей силы .

Критерий подобия для оценки вибраций втулок цилиндров

Рассмотрим задачу о вынужденных попе-речных колебаниях, шарнирно опертых по контуру пологих оболочек при действии произвольной газодинамической нагрузки, изменяющейся во времени по гармоническому закону.



ПОЛУЧЕНИЕ КРИТЕРИЯ ПОДОБИЯ ПУТЕМ АНАЛИЗА УРАВНЕНИЯ ПРОЦЕССА

$A+B+C+D=F$ – уравнение, состоящее из величин одной размерности;

$1+B/A+C/A+D/A=F/A$ – уравнение, состоящее из безразмерных величин, каждая из которых может быть критерием подобия.

Критерий подобия для оценки вибраций втулок цилиндров

Уравнения вынужденных колебаний, то есть колебаний втулок цилиндров, порождаемых газодинамическими процессами при сгорании топлива, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} D_{czvt} \nabla^2 \nabla^2 S + \nabla_k^2 \varphi + \rho \cdot h \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} - p &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \varphi - \nabla_k^2 S &= 0, \end{aligned} \right\}$$

Критерий подобия для оценки вибраций втулок цилиндров

Где $p = p(x, y) \sin(\theta \cdot t)$ - внешнее воздействие на оболочку,

θ - частота вынужденных колебаний,
равная частоте возмущающей нагрузки;

D_{cvt} - цилиндрическая жесткость втулки
цилиндра;

- S - виброперемещение;
- φ - функция напряжений;
- h - толщина втулки;
- ρ - плотность материала;
- t - время;
- E - модуль упругости.

Критерий подобия для оценки вибраций втулок цилиндров

Разделим первое уравнение в системе на φ
и применим теорему, получим

$$\begin{cases} \frac{D_{czvt} S}{\rho x^4} + 2 \frac{D_{czvt} S}{\rho x^2 y^2} + \frac{D_{czvt} S}{\rho y^4} + \frac{k_2 \varphi}{\rho y^2} + \frac{k_1 \varphi}{\rho x^2} + \frac{\rho \cdot h \cdot S}{\rho \cdot t^2} - 1 = 0 \\ \frac{\varphi}{E h x^4} + 2 \frac{\varphi}{E h x^2 y^2} + \frac{\varphi}{E h y^4} - \frac{k_2 S}{y^2} + \frac{k_1 S}{x^2} = 0 \end{cases}$$

Критерий подобия для оценки вибраций втулок цилиндров

В результате из первого уравнения,
получим следующие безразмерные
комплексы:

$$\pi_1 = \frac{D_{czvt} S}{px^4}, \quad \pi_2 = 2 \frac{D_{czvt} S}{px^2 y^2}, \quad \pi_3 = \frac{D_{czvt} S}{py^4}$$
$$\pi_4 = \frac{k_2 \varphi}{py^2}, \quad \pi_5 = \frac{k_1 \varphi}{px^2}, \quad \pi_6 = \frac{\rho \cdot h \cdot S}{p \cdot t^2}.$$

Критерий подобия для оценки вибраций втулок цилиндров

Особый интерес представляет следующее выражение:

$$\tilde{\pi} = \frac{D_{czvt} S}{x^2 y^2 p}$$

Преобразуем этот критерий, используя геометрические и режимные параметры судовых дизелей.

Координаты x и y представим как основные геометрические характеристики дизеля – диаметр и ход поршня D_p и S_p , давление p как среднее индикаторное давление p_i .

Критерий подобия для оценки вибраций втулок цилиндров

Это выражение можно записать в следующем виде:

$$\bar{s} = const \cdot \frac{S_n D_n^2 p_i}{D_{czvt}}$$

Таким образом, на основе анализа уравнения колебаний шарнирно опертой цилиндрической оболочки, получен критерий, представляющий отношение энергии упругих сил к энергии газовых сил и позволяющий рассчитывать виброактивность ДВС, порождаемую рабочим процессом дизеля.

Диссертации

- Вибродиагностирование технического состояния судовых дизелей по критериям подобия;
- Применение теории подобия при проектировании манипуляционных роботов по прототипам;
- Применение теории подобия в космической биологии и медицине;
- Разработка методов прогнозирования строения и свойств текстильных материалов с использованием теории подобия и анализа размерностей;
- Методология и модели подобия функционирования технических систем в легкой промышленности;
- Исследование мотальных паковок на основе использования методов подобия и анализа размерностей.

Спасибо за внимание