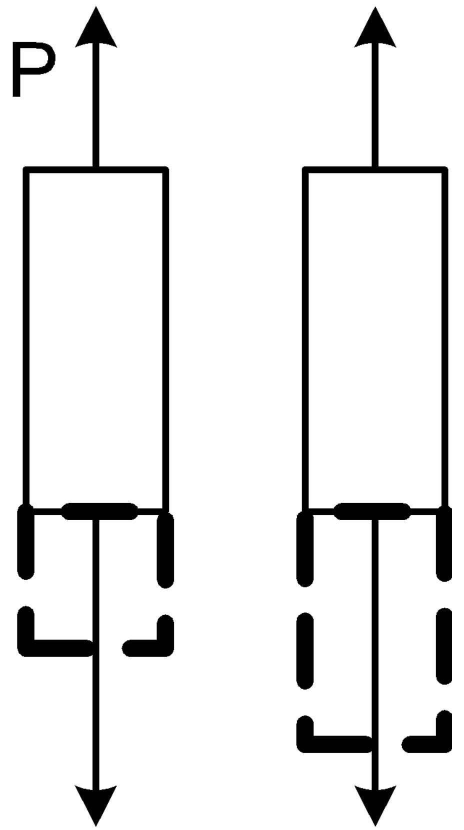
Тензор деформаций. Тензор скоростей деформации.

Тензор скоростей деформации

- Напряжённое состояние среды связано и определяется деформационными изменениями. Так, например, под воздействием одной и той же растягивающей силы различные материалы получают различные удлинения.

Тензор скоростей деформации



- Связь напряжений и деформаций для твёрдых тел осуществляется с помощью закона Гука:

$$\tau = E \cdot \gamma,\ \tau = \frac{F}{S},\ \varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{l_1} = \frac{\Delta l}{l_1},$$

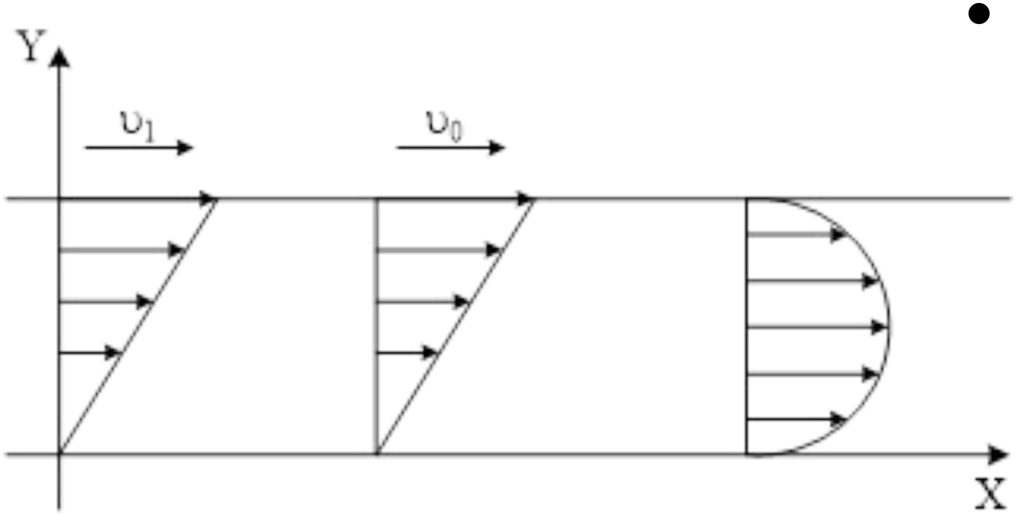
- Где E – модуль упругости, физический смысл – напряжение.

Тензор скоростей деформации

- Тензор напряжений (или напряжённое состояние точки среды) зависит от скорости течения среды.

- Кинематическое $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i}$ соотношение, характеризующее движение жидкости - это градиент скорости .

Тензор скоростей деформации



- Напряжения, их величина, в вязкой, жидкой среде связаны со скоростями течения среды.
- Причём чем сильнее изменяется величина скорости по сечению канала, тем больше усилие действует на среду, тем большее напряжение в среде возникает.

Тензор скоростей деформации

- В общем случае течения, возможно, более чем одно ненулевое направление градиента скорости.
- Каждый из трёх компонентов скорости может изменяться в трёх координатных направлениях, что даёт девять возможных компонент градиента. Таким образом, можно ввести тензор градиентов скорости ∇u, который в декартовых координатах запишется:

Тензор скоростей деформации

$$\nabla \upsilon = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} & \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial y} & \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial x} & \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} & \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial x} & \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial y} & \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Тензор скоростей деформации

- Движение жидкости представляет собой одновременное перемещение и вращение. Такие движения можно разделить, представить тензор градиентов деформацией в виде двух частей:

$$\nabla \upsilon = \frac{1}{2} \cdot (\gamma + \omega)$$

- Где γ - тензор скоростей деформации, ω - вращательный тензор.

Тензор скоростей деформации

- Тензор скоростей деформаций вводится следующим образом:

$$\dot{\gamma} = \nabla \upsilon + \nabla \upsilon^T$$

- где $\nabla \upsilon^T$ тензор - транспонированный тензор, имеющий те же компоненты, что и $\nabla \upsilon$, но с переставленными индексами (столбцы и строки переставлены).

Тензор скоростей деформации

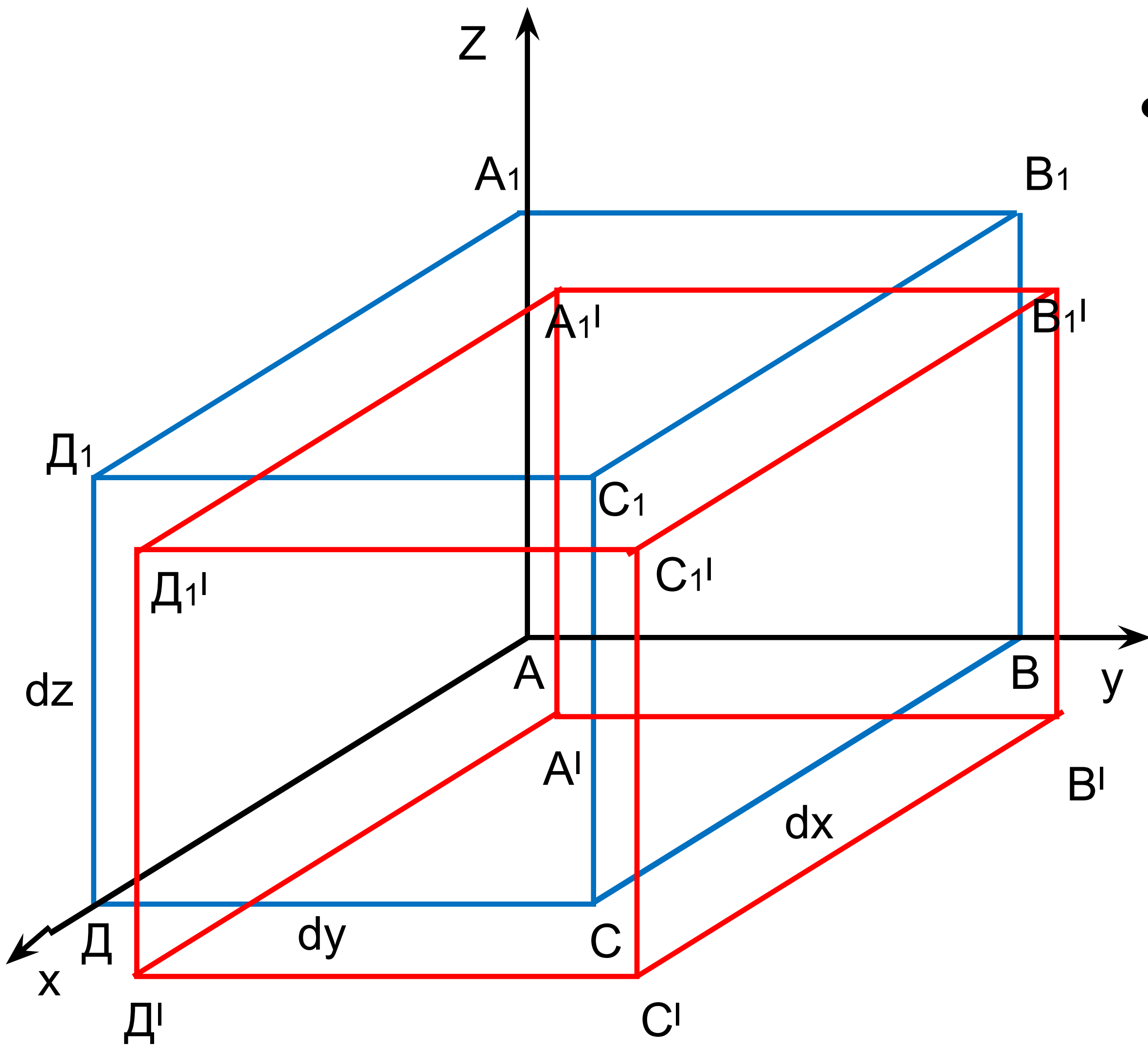
- Уравнениями состояния или реологическими уравнениями называют уравнения связывающие тензор напряжений и тензор скоростей деформаций, т.е.

$$\dot{\gamma} = \begin{vmatrix} 2\dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} & \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial x} & \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial z} + \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial y} & 2\dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} & \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial z} + \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial z} & \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial z} & 2\dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Тензор деформации

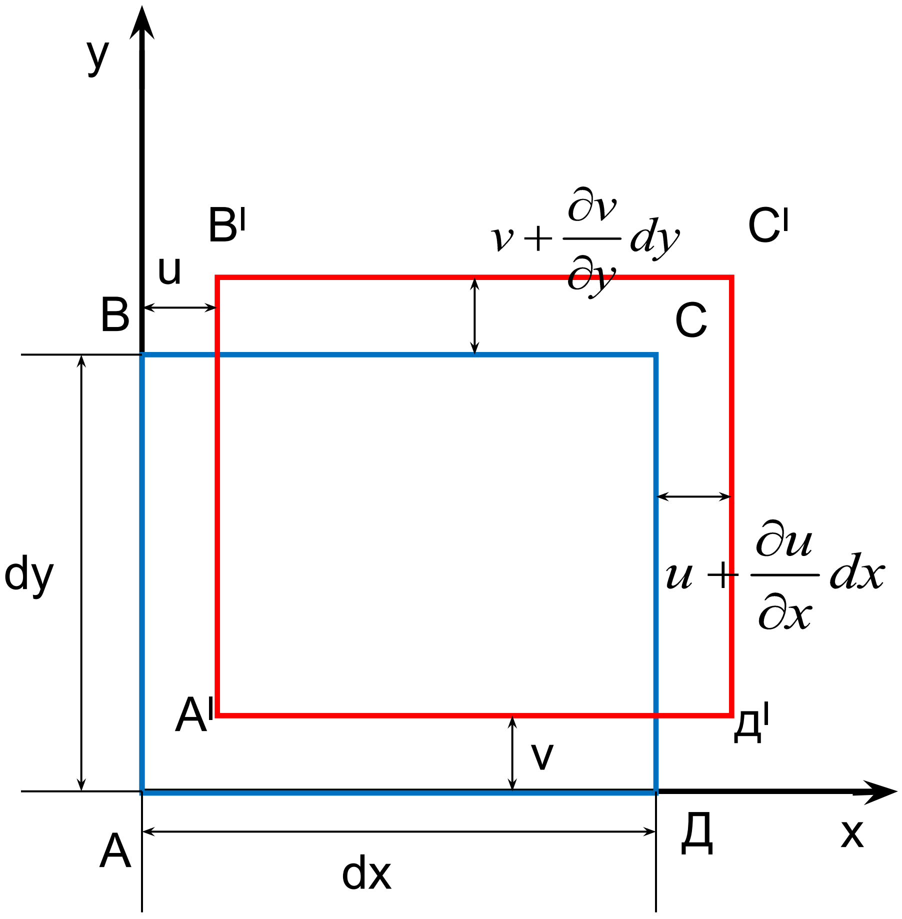
- Напряжения приложенные к среде (возникающие в среде) приводят к возникновению различного рода деформаций. Течению – для жидкой среды, изменению объема и формы тел.
- Для определения полного деформационного состояния в среде вводят понятие тензора деформаций.

Тензор деформации



- Вырежем из тела (полимера) элементарный параллелепипед $ABCДA_1B_1C_1Д_1$, ребра которого равны dx, dy, dz совмещением начала координат с вершиной A.

Тензор деформации



В результате деформации тела выделенный параллелепипед переместится в новое положение. При этом произойдут изменения длин ребер и искажение углов между ребрами. Новое положение параллелепипеда без искажения ребер обозначим

Тензор деформации

- Спроецируем первоначальное положение грани АВСД и новое положение этой грани на плоскость xAy. Обозначим линейные перемещения т. А в направлении осей x и y через u и v. Линейное перемещение т. С в направлении оси x равно: $u + \frac{\partial u}{\partial x} dx$
- В направлении оси y равно: $v + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

Тензор деформации

- При этом ребро АД, которое до деформации имело длину dx получит приращение равное $\frac{\partial u}{\partial x}dx$, а ребро АВ, которое до деформации имело длину dy увеличится на $\frac{\partial v}{\partial y}dy$.

- **Относительной линейной деформацией** в точке по данному направлению называется отношение изменения длины бесконечно малого линейного элемента к его первоначальной длине.

Тензор деформации

Относительная линейная деформация в направлении x:

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Для направления y:

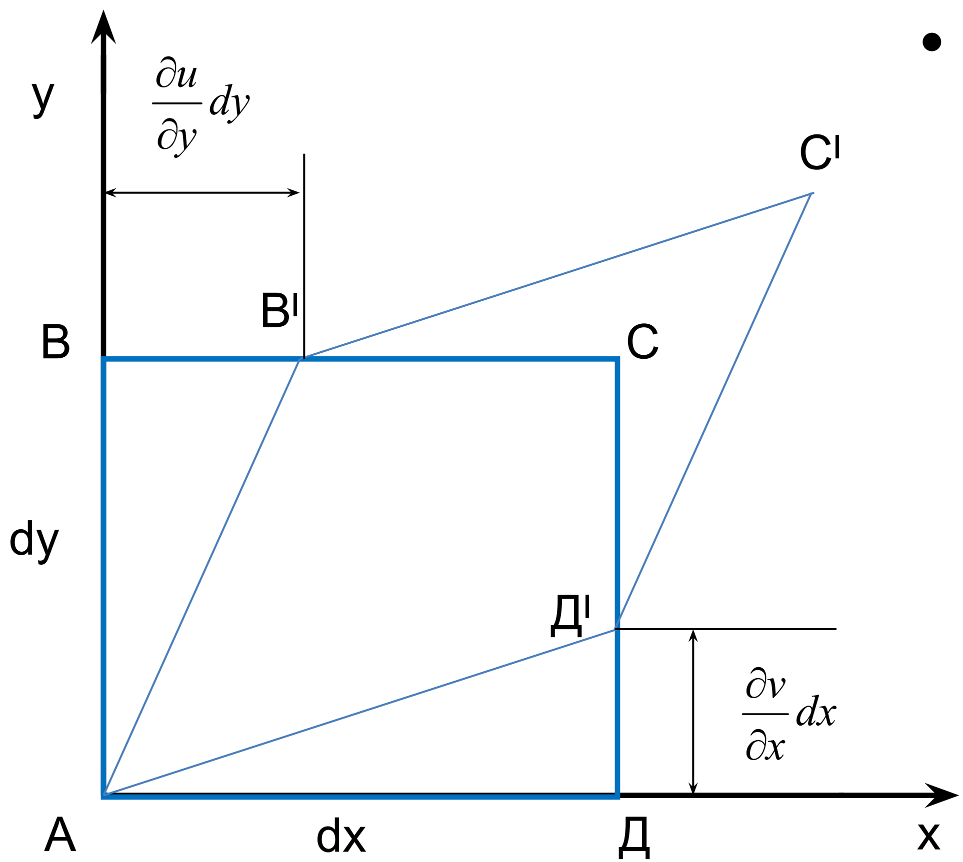
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Аналогично, если рассмотреть другую проекцию граней:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Где w линейное приращение т. A в направлении оси z.

Тензор деформации



- Рассмотрим отдельно угловую деформацию. Пусть грань АВСД в результате угловой деформации переместится в положение А\`В\`С\`Д\`.

Тензор деформации

- При этом т. Д перемещается в направлении у в т. Д`, перемещение при этом $\frac{\partial v}{\partial x} dx$.
- т. В – в направлении х в т. В`, перемещение при этом равно: $\frac{\partial u}{\partial y} dy$
- Угловой деформацией называется величина искажения прямого угла, т.е.
- $\gamma_{xy} = \pi/2 - \angle B^{I}AД^{I} = \angle BAB^{I} + \angle ДAД^{I}$
-

Тензор деформации

- Т.к. углы малы, то их величины можно заменить тангенсами этих углов, т.е. принимаем, что:

$$\angle BAB^{I} = \frac{BB^{I}}{AB} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$\angle$ДАД^{I}=ДД^{I}/АД=$\frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$

Тензор деформации

- Угловая деформация на плоскости Axy будет равна:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

- Аналогично получаем деформацию для плоскостей xAz и yAz:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Тензор деформации

- В итоге получаем шесть независимых компонент линейных и угловых деформаций.
- Тензор деформации выводим следующим образом:

$$D = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}$$

Тензор деформации

- Тензор симметричен, т.е.

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}, \; \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}, \; \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$$

- В случае упругой деформации существуют следующие зависимости тензоров напряжений и деформаций.

Простой сдвиг

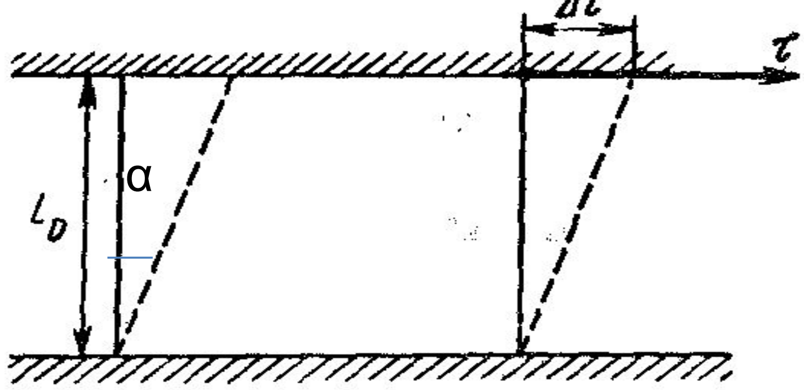


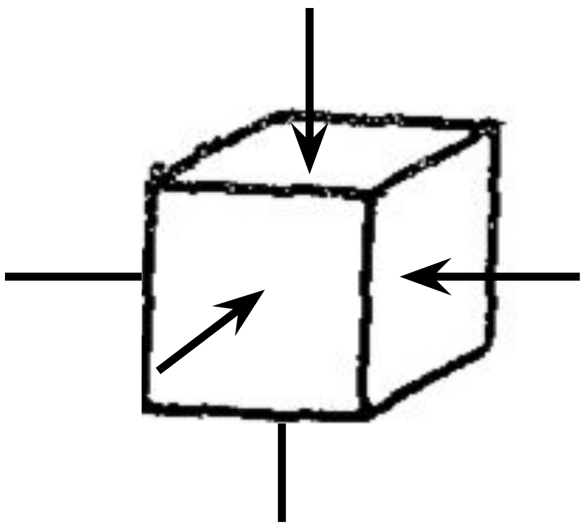
Рис. 8. 1. Деформация сдвига тела, заключенного между двумя параллельными плоскостями

$$\gamma = tg\alpha$$

$$\sigma = G \cdot \gamma$$

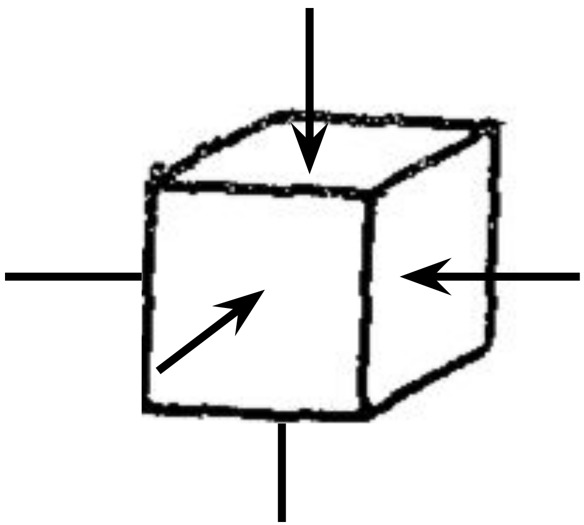
- Деформация происходит под действием тангенциальной силы. Происходит изменение формы, но не объема.

Всестороннее сжатие



- Если каждая сторона куба подвергается действию нормального напряжения, то сжимающим напряжением является давление.

Всестороннее сжатие



- Происходит изменение объема при сохранении формы.

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_X + \sigma_Y + \sigma_Z)$$

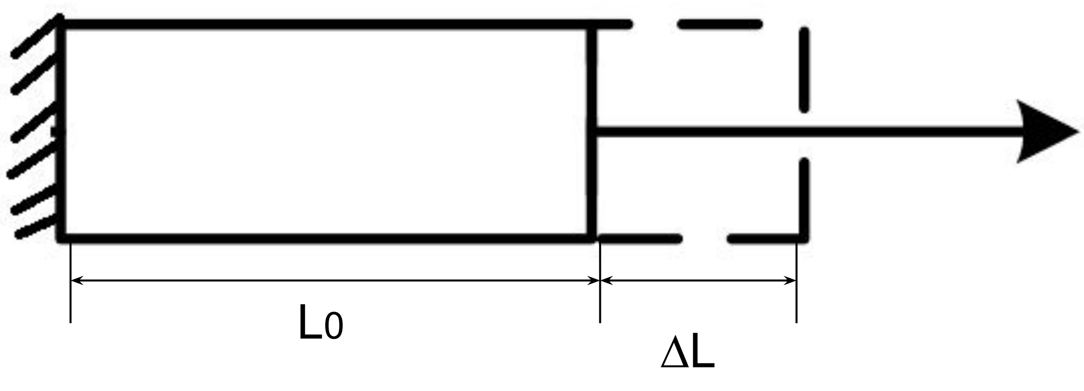
$$\theta = \varepsilon_X + \varepsilon_Y + \varepsilon_Z$$

$$\sigma = K \cdot \theta$$

- Где К – модуль всестороннего сжатия,
- θ - объемная деформация.

Простое растяжение

- Происходит изменение и формы и объема образца. Под действием нормального напряжения происходит одновременно продольная и попе



Простое растяжение

- По закону Гука:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon_{прод} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0}$$

- Где Е – модуль Юнга, модуль упругости.
- Коэффициент Пуассона:

$$\mu = \frac{|\,\varepsilon_{попер}\,|}{|\,\varepsilon_{прод}\,|}$$

- Характеризует соотношение продольной и поперечной деформаций.

Простое растяжение

- Уравнение связывающее константы:

$$1+\mu = \frac{E}{2G}$$

- При $\mu = 0,5$ (чисто упругое тело).

$$E = 3G$$

Тензор деформации

- Если деформация строго пропорциональна напряжению, то модуль Е есть коэффициент пропорциональности и имеет для заданного материала определенное значение. В общем случае пропорциональность напряжения и деформации отсутствует.

Тензор деформации

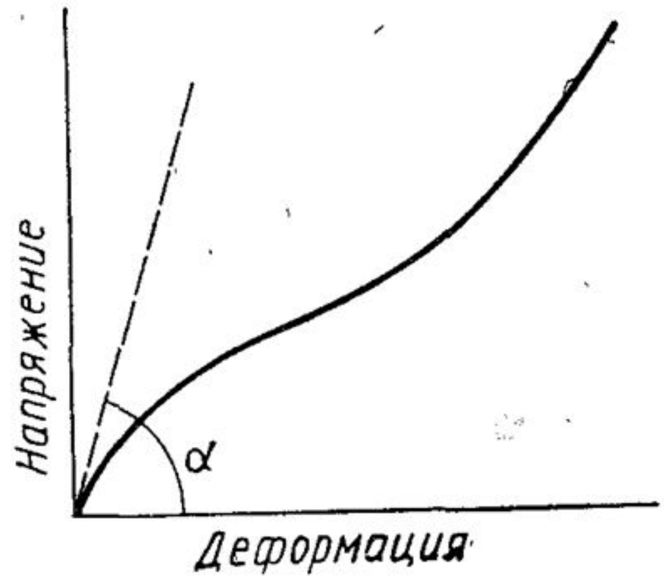


Рис. 8.3. Кривая напряжеине — деформация эластомера: E — модуль растяжения; $\operatorname{tg} \alpha = E$

Поэтому модуль E определяется как tgα, где α угол между касательной к кривой и осью деформации.

Формально определить модуль E для данного образца при любой деформации можно как:

$$E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$$