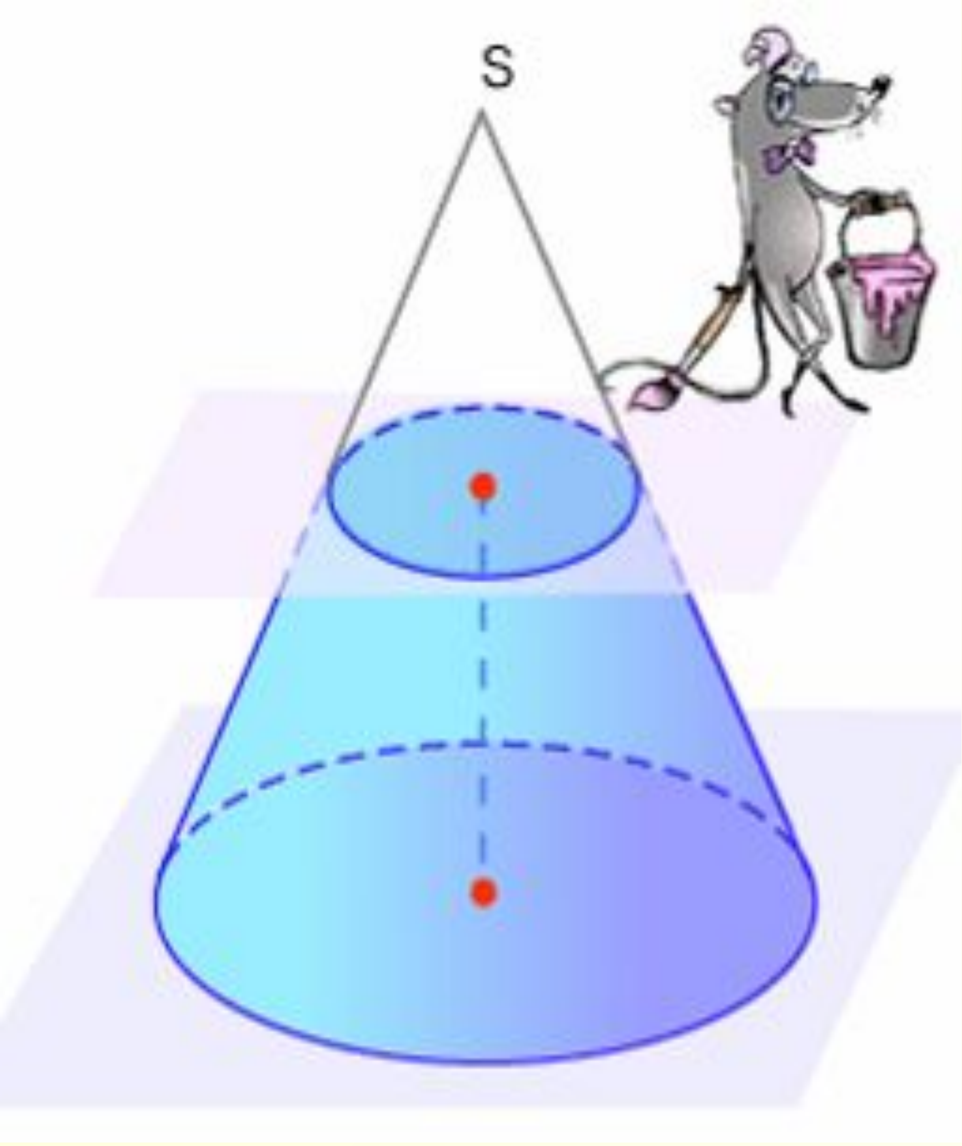
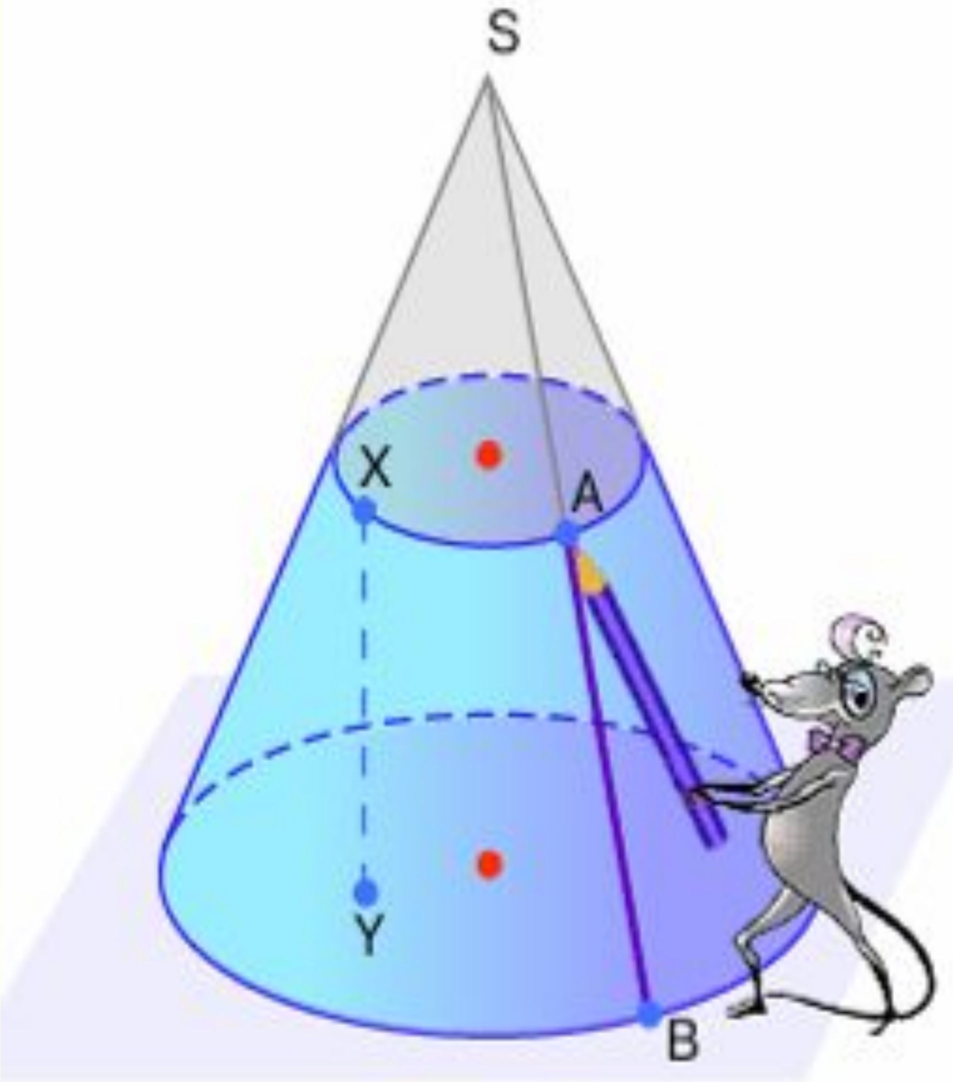
Объём
Усеченного
конуса.



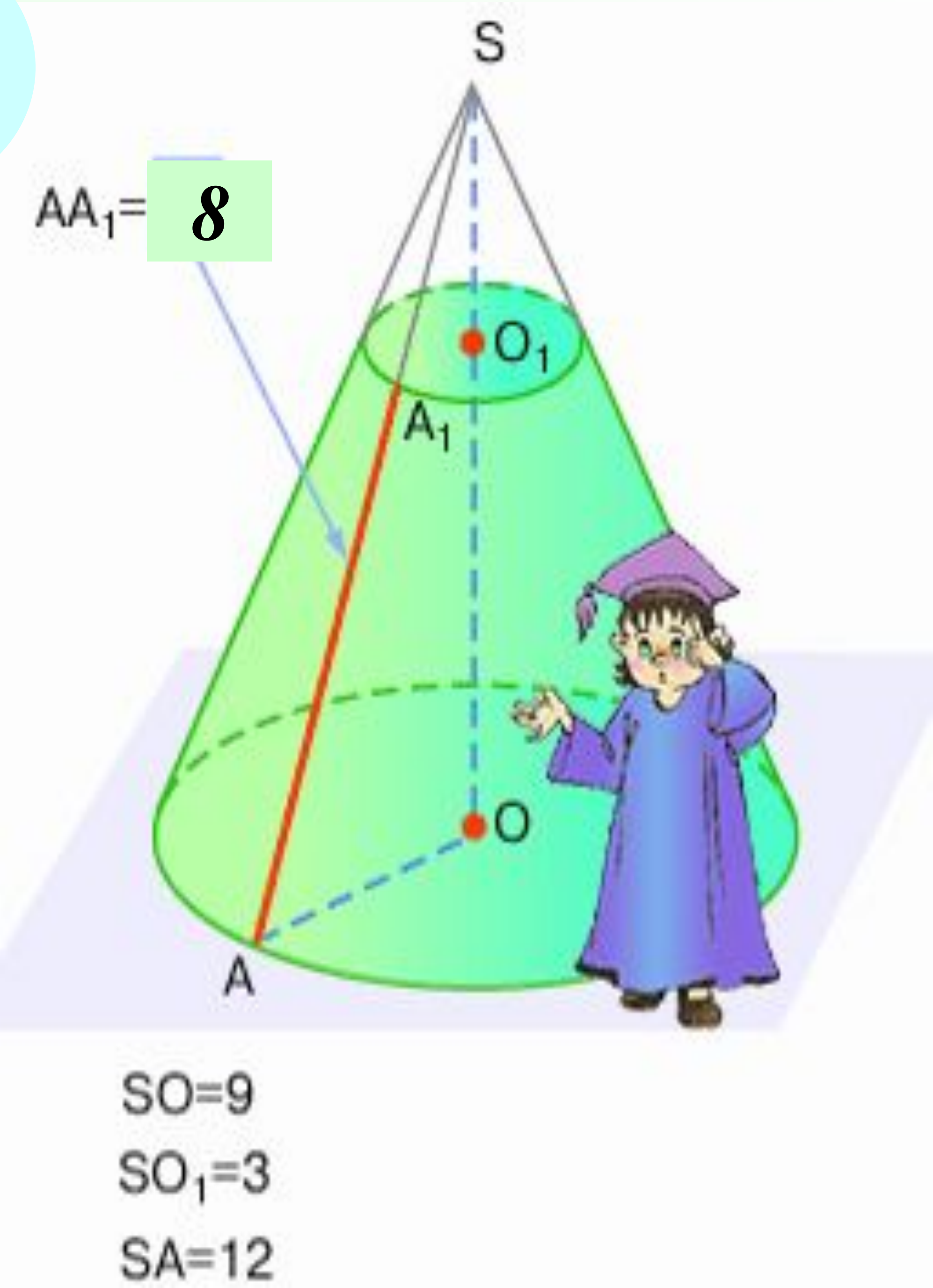
Усеченным конусом называется часть полного конуса, заключенная между основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию. Круги, лежащие в параллельных плоскостях, называются **основаниями** усеченного конуса.

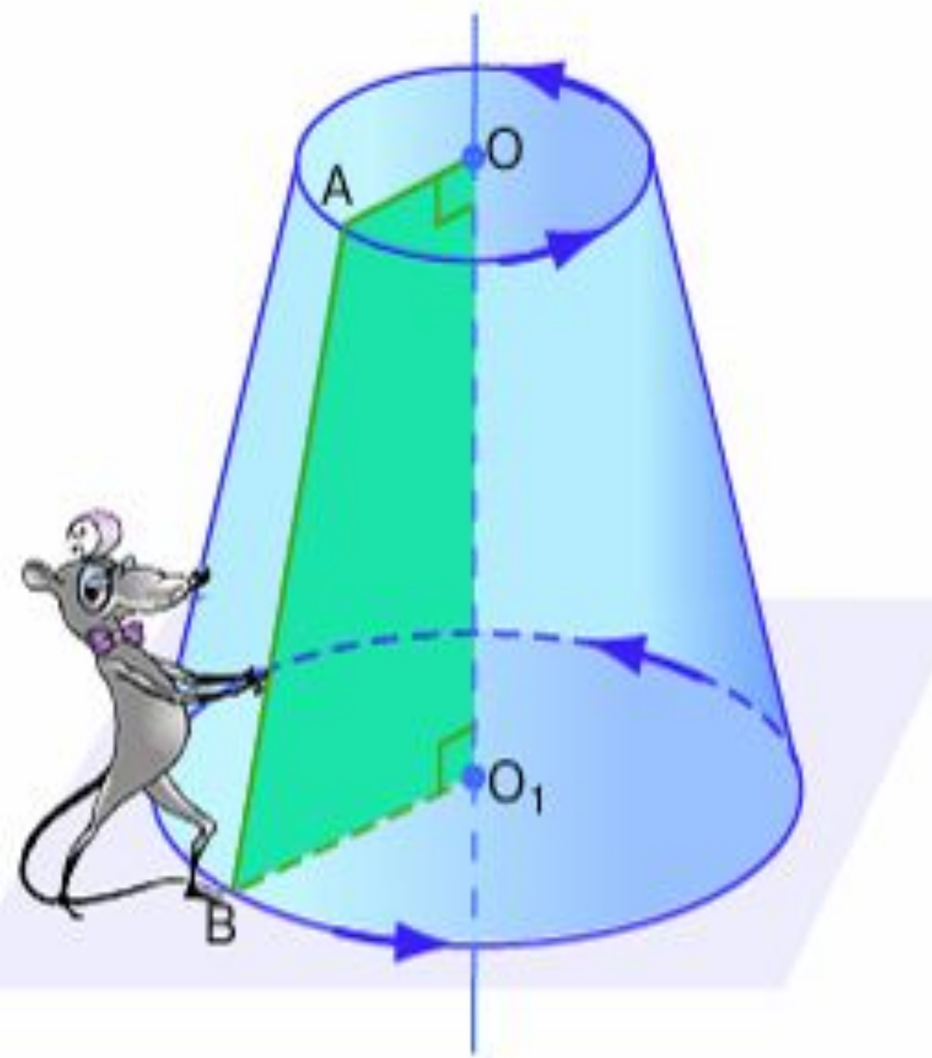


Образующей усеченного конуса называется часть образующей полного конуса, заключенная между основаниями. **Высотой** усеченного конуса называется расстояние между основаниями.

?

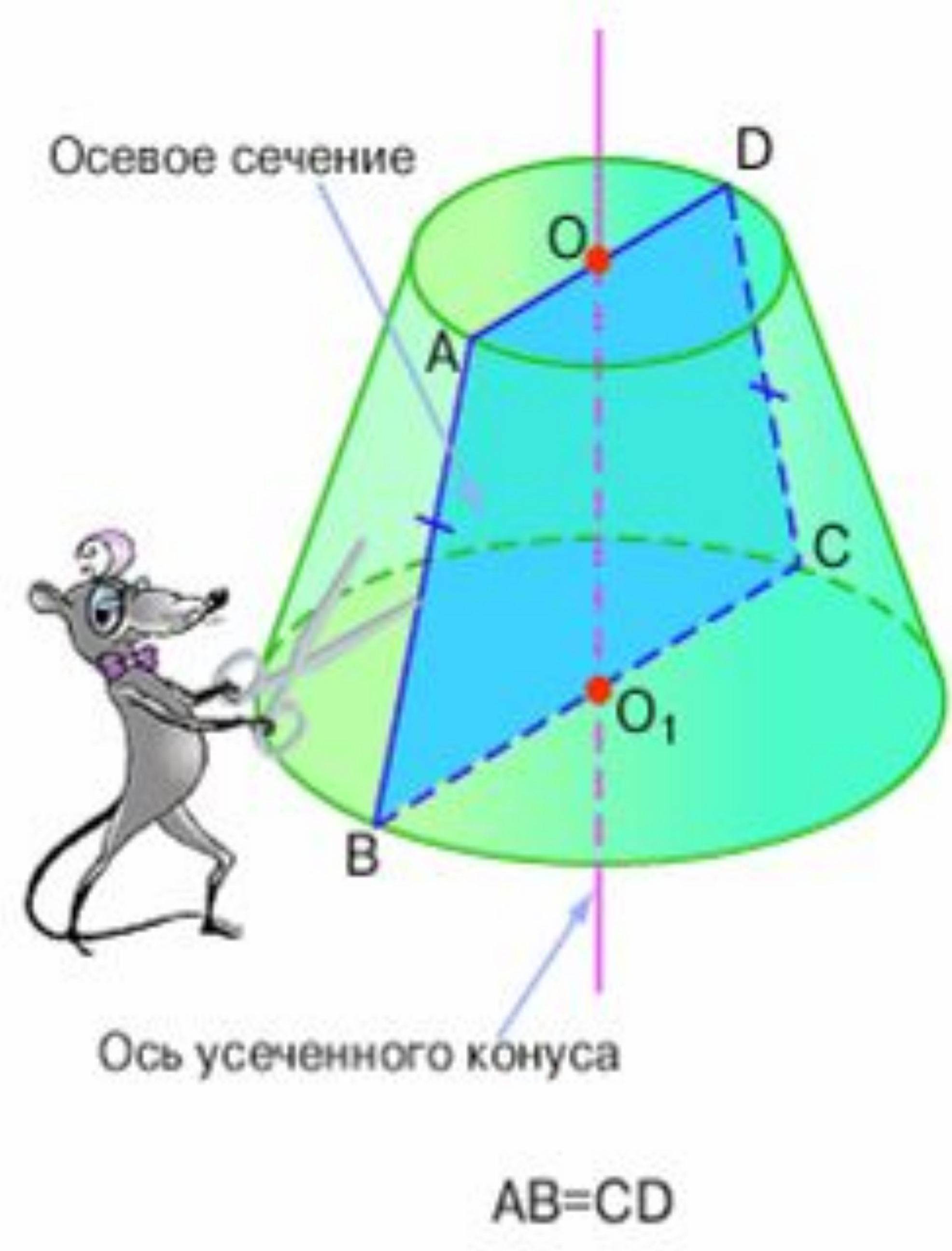
Пусть в конусе, высота которого известна, проведено сечение, находящееся на расстоянии три от вершины. Чему равна образующая получившегося усеченного конуса, если известна образующая полного конуса?





ABO_1O – прямоугольная трапеция

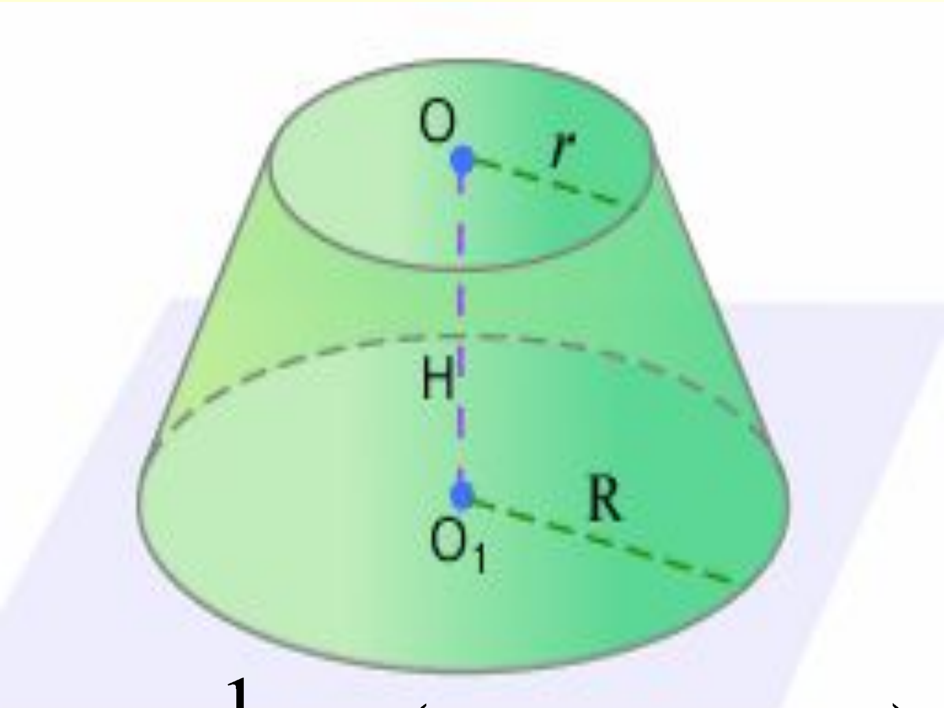
Усеченный конус можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольной трапеции вокруг боковой стороны, перпендикулярной основанию.



Прямая, соединяющая центры оснований, называется осью усеченного конуса. Сечение, проходящее через ось, называется осевым. Осевое сечение является равнобедренной трапецией.

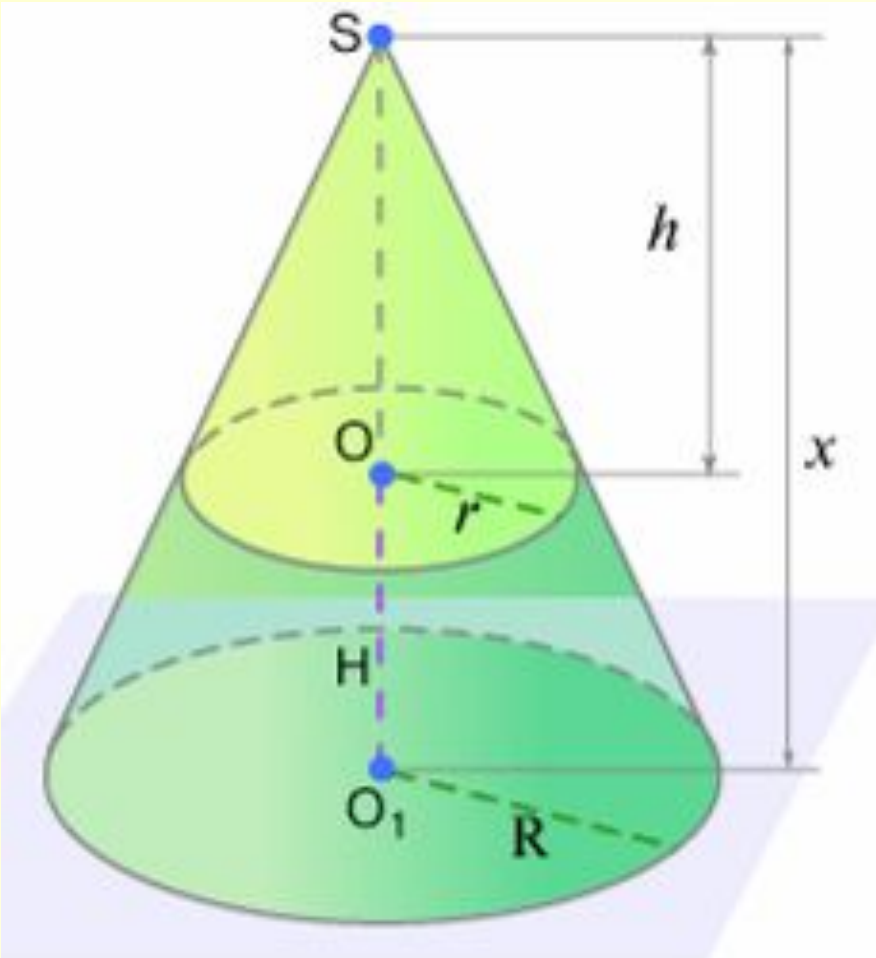
Формула объема усеченного конуса.

- Объем усеченного конуса равен сумме объемов трех конусов, имеющих одинаковую высоту с усеченным конусом, а основаниями: один – нижнее основание этого конуса, другой – верхнее, а третий – круг, радиус которого есть среднее геометрическое между радиусами верхнего и нижнего оснований.



$$V = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

Доказательство:

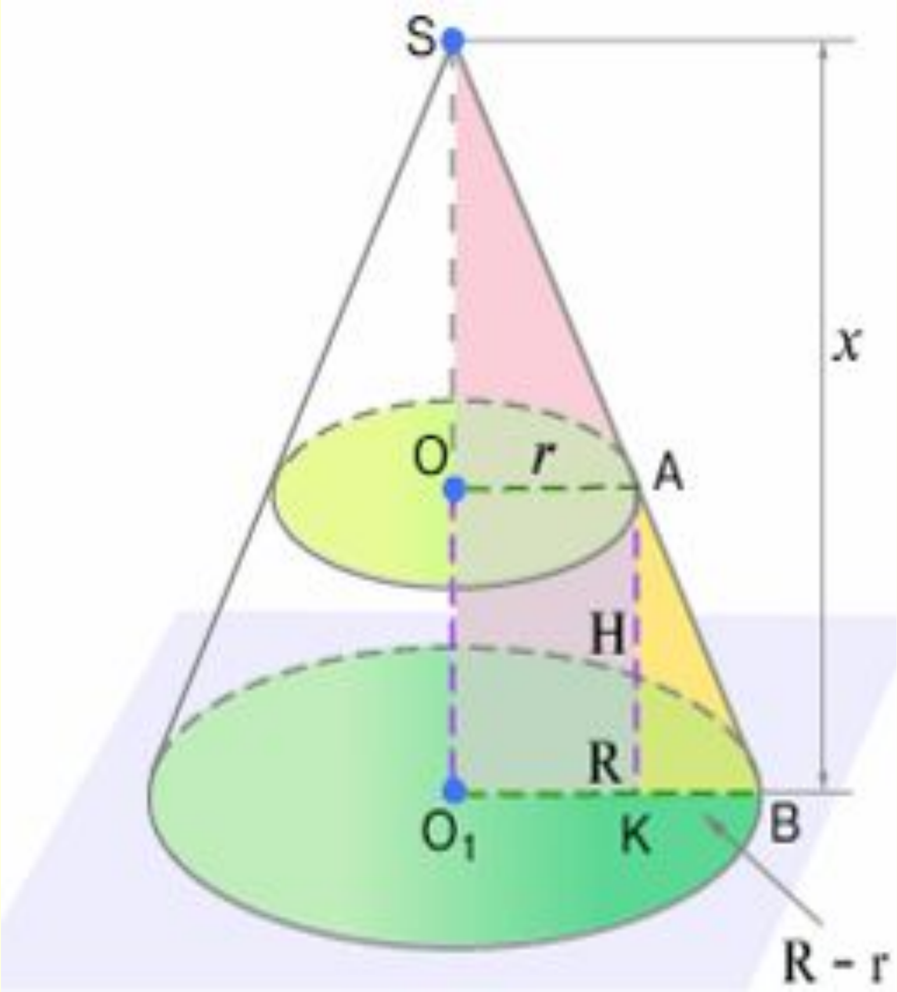


Поместим на верхнем основании усеченного конуса малый конус, дополняющий его до полного и рассмотрим объем его как разность объемов двух конусов.

$$V_{усеч.кон} = V_{полн} - V_{доп} = \frac{1}{3}\pi R^2 x - \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Доказательство:

Вычислим высоту полного конуса из подобия треугольников.

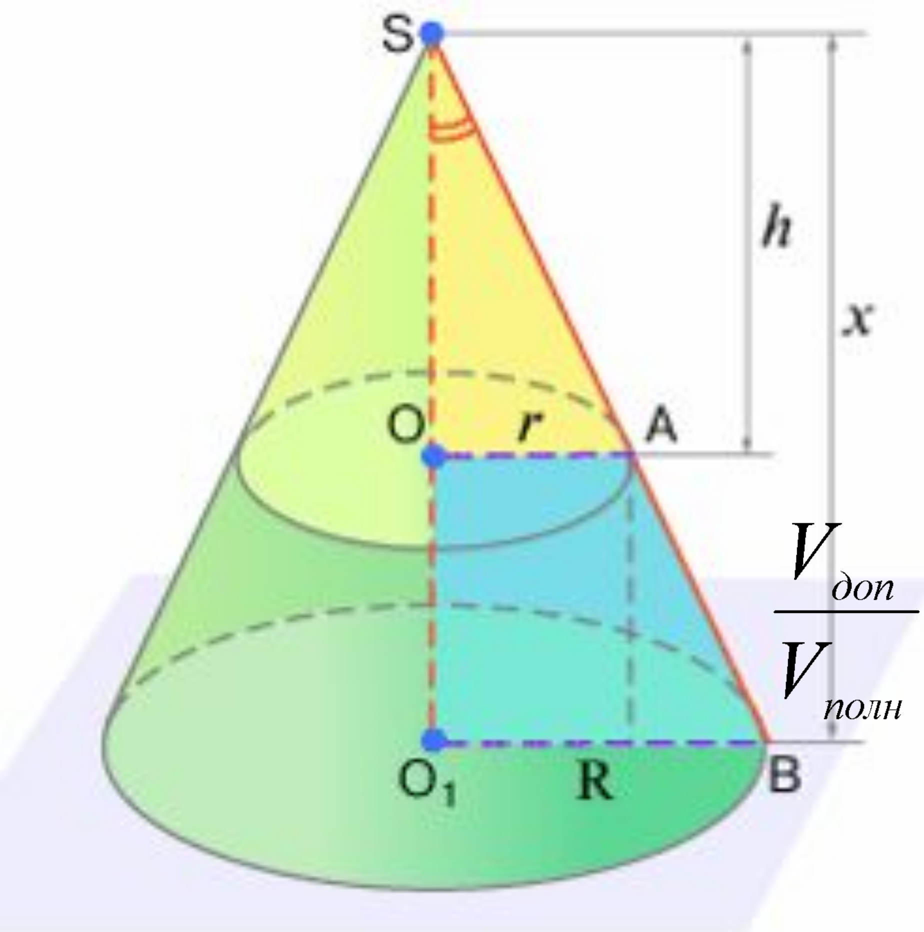


$$\Delta SO_1B \sim \Delta AKB$$

$$\frac{x}{R} = \frac{H}{R - r}$$

$$x = H\frac{R}{R - r}$$

Доказательство:



$$\Delta SOA \sim \Delta SO_1B$$

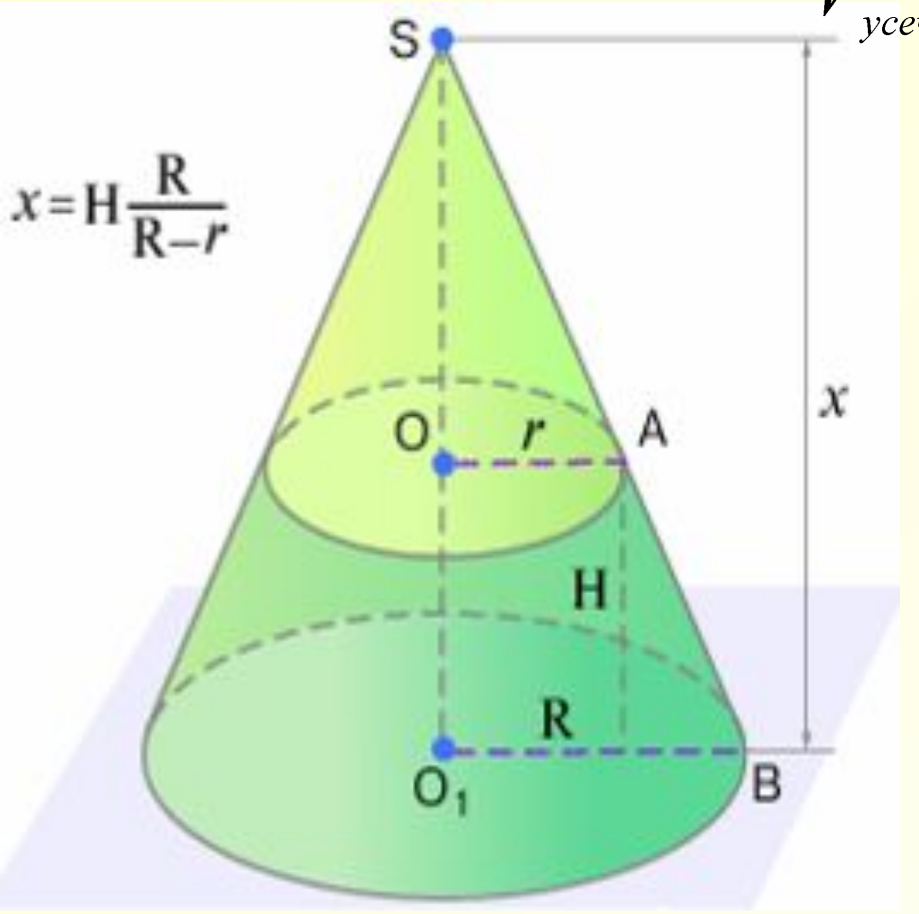
$$\frac{h}{x} = \frac{r}{R}$$

$$\frac{V_{доп}}{V_{полн}} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 x} = \frac{r^2 h}{R^2 x} = \frac{r^2}{R^2}\frac{r}{R} = \frac{r^3}{R^3}$$

Объемы полного и дополнительного конусов относятся как кубы радиусов оснований.

Доказательство:

Вычтем из объема большого конуса объем малого конуса.



$$V_{усеч} = V_{полн} - V_{доп} = V_{полн} - \frac{r^3}{R^3}V_{полн} =$$

$$= \frac{1}{3}\pi R^2 x\left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right) =$$

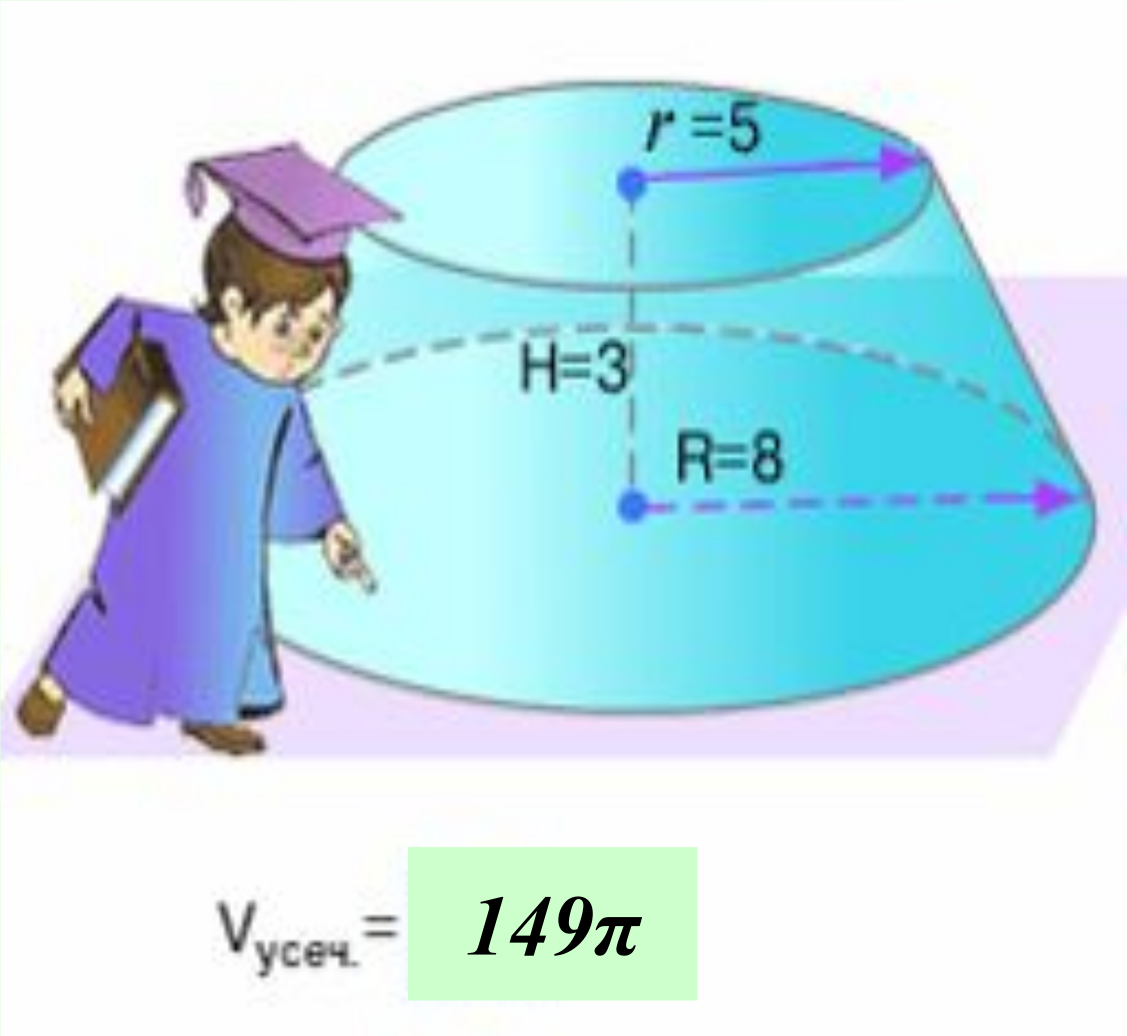
$$= \frac{1}{3}\pi \frac{R^2 HR}{R-r}\left(\frac{R^3 - r^3}{R^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi H \frac{(R-r)(R^2 + Rr + r^2)}{R-r} =$$

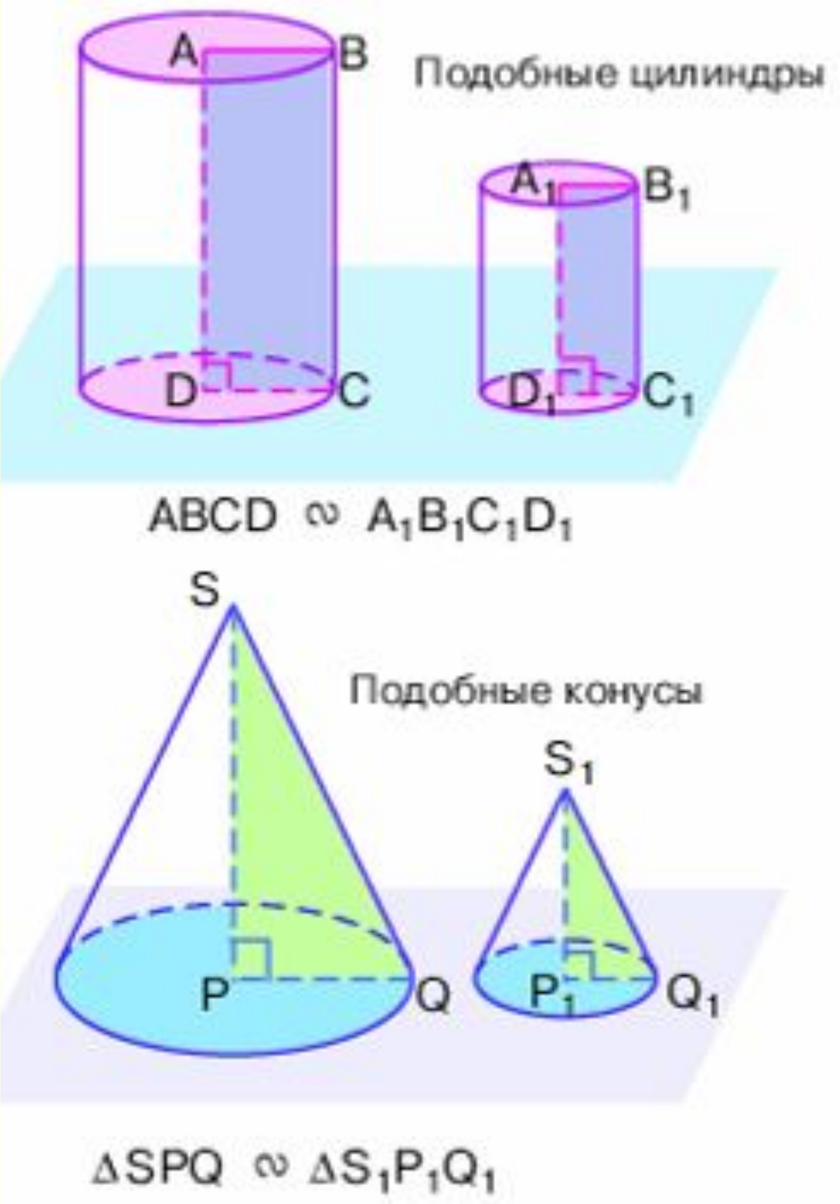
$$= \frac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

?

Найдите объем усеченного конуса, если известны его высота и радиусы оснований.



Подобные цилиндры и конусы.

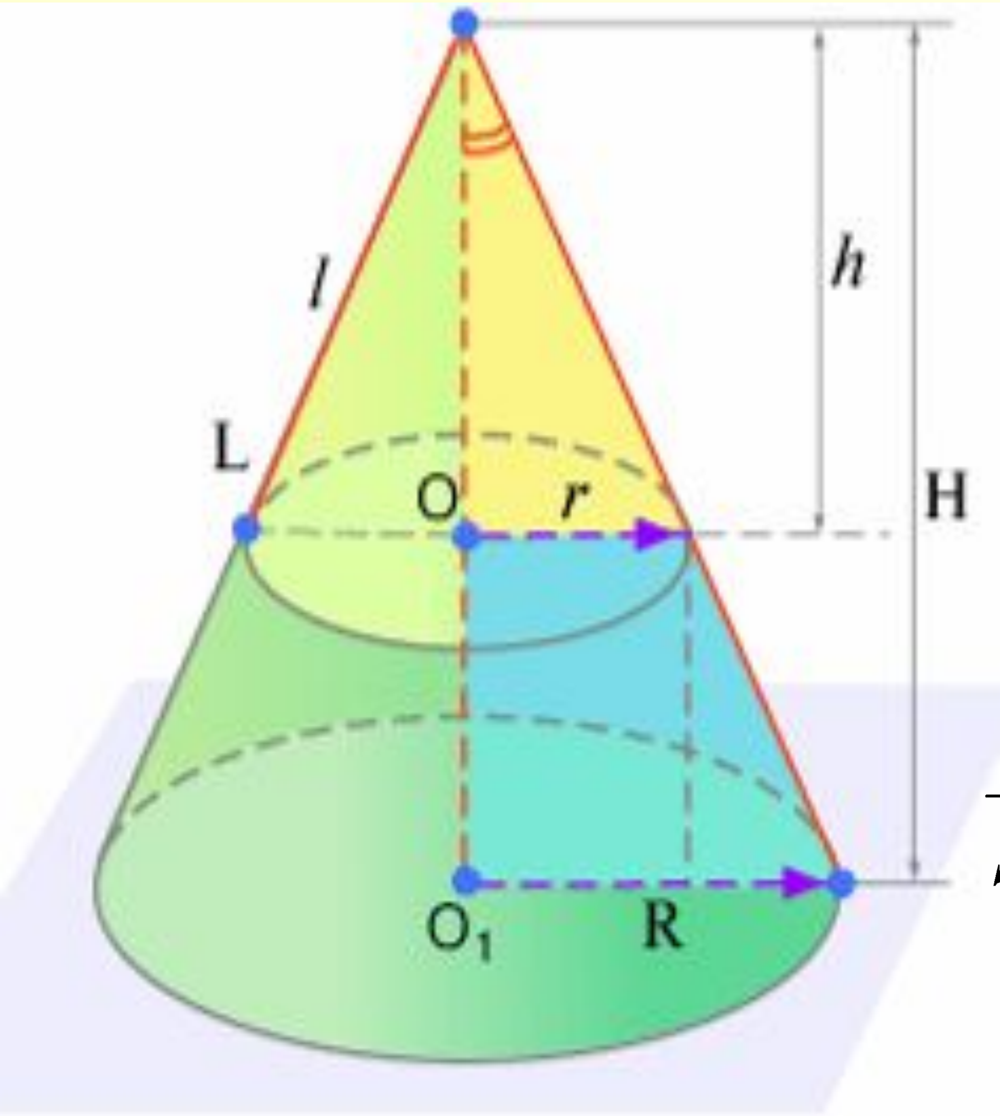


- **Подобные цилиндры или конусы можно рассматривать как тела, полученные от вращения подобных прямоугольников или прямоугольных треугольников.**

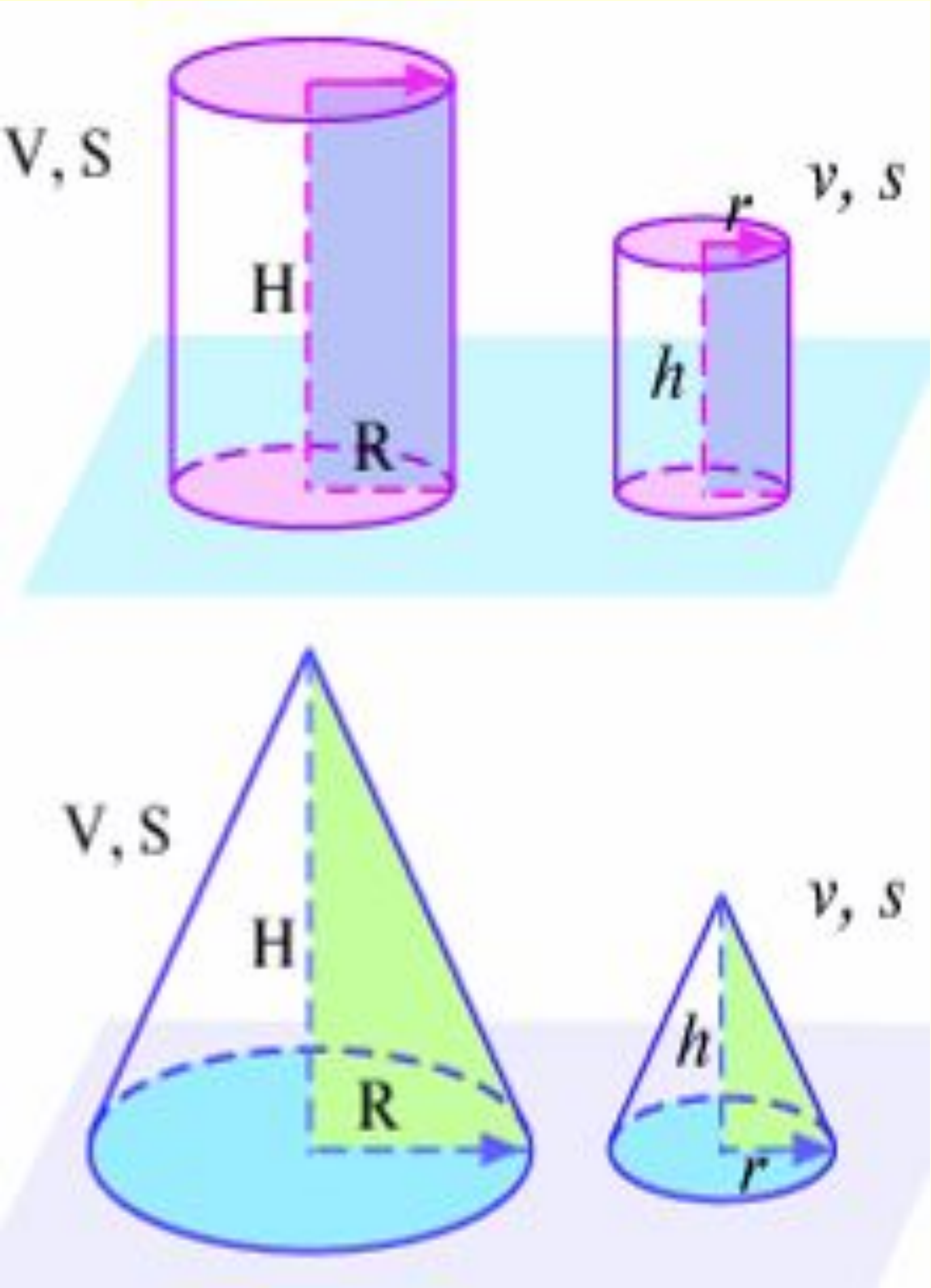
Сечение, параллельное основанию конуса, отсекает от него малый конус, подобный большому.

$$\frac{r}{R}=\frac{h}{H}=\frac{l}{L}$$

$$\frac{V_{доп.}}{V_{полн.}}=\frac{r^3}{R^3}=\frac{h^3}{H^3}$$



$$\frac{S_{бок.доп}}{S_{бок.полн}}=\frac{2\pi rl}{2\pi RL}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{h^2}{H^2}$$



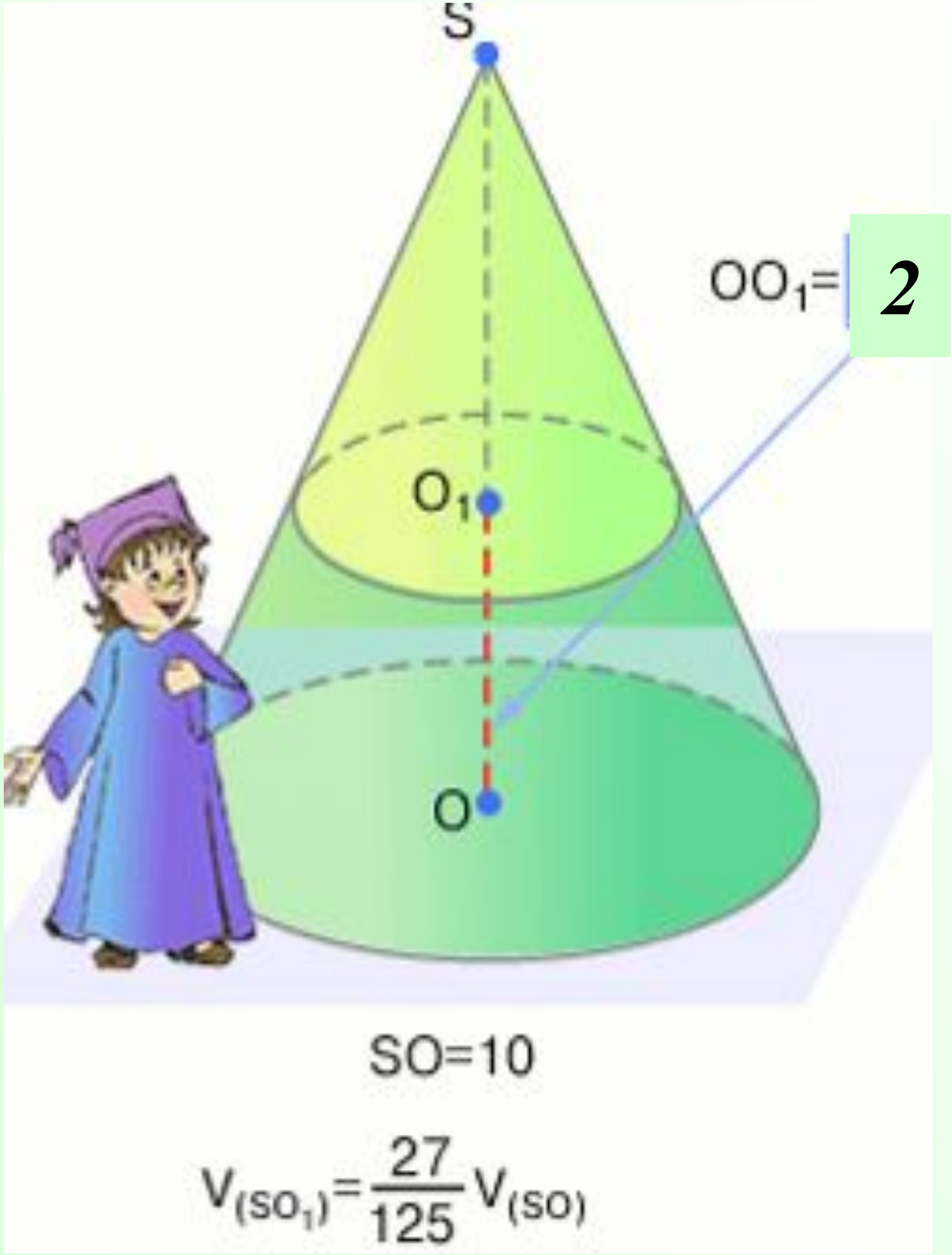
Площади боковых поверхностей подобных цилиндров и конусов относятся как квадраты радиусов или высот, а объемы – как кубы радиусов или высот.

$$\frac{s}{S} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{h^2}{H^2}$$

$$\frac{v}{V} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{h^3}{H^3}$$

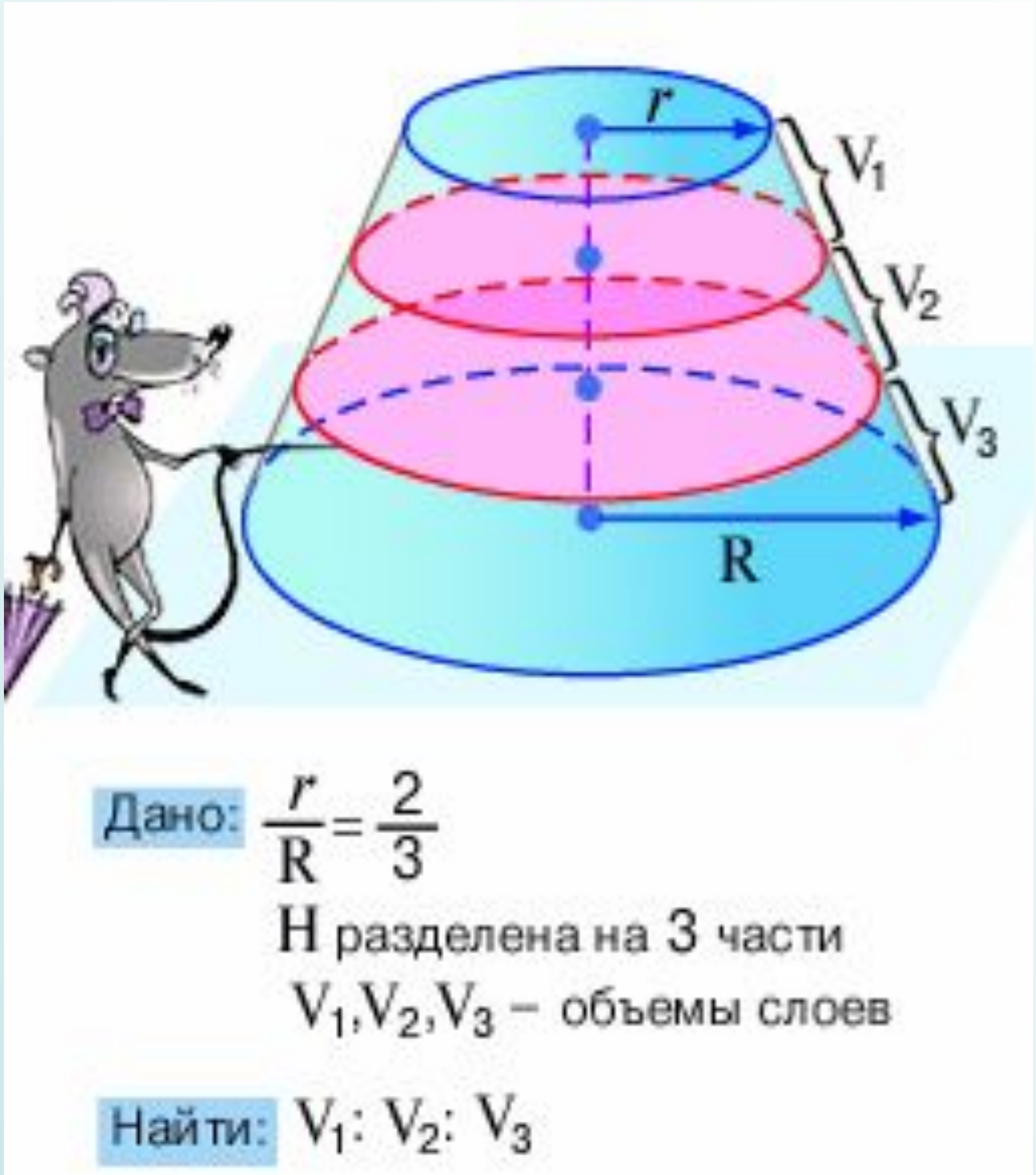
?

В конусе, высота которого известна, проведено сечение, параллельное основанию. Известно также соотношение объемов малого и большого конусов. На каком расстоянии от основания находится сечение?



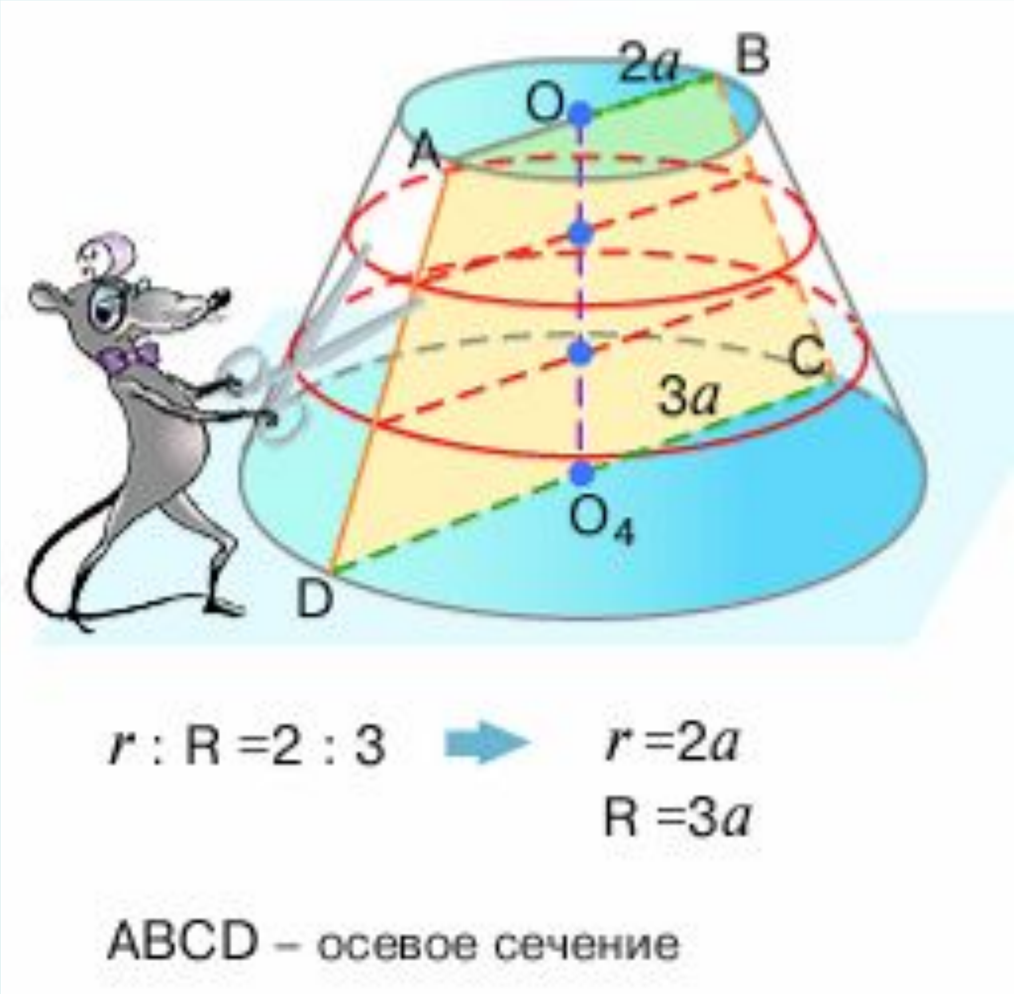
Задача.

Радиусы оснований усеченного конуса относятся как 2:3. Высота конуса разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости, параллельные основаниям. Найти, в каком отношении разделился объем усеченного конуса.



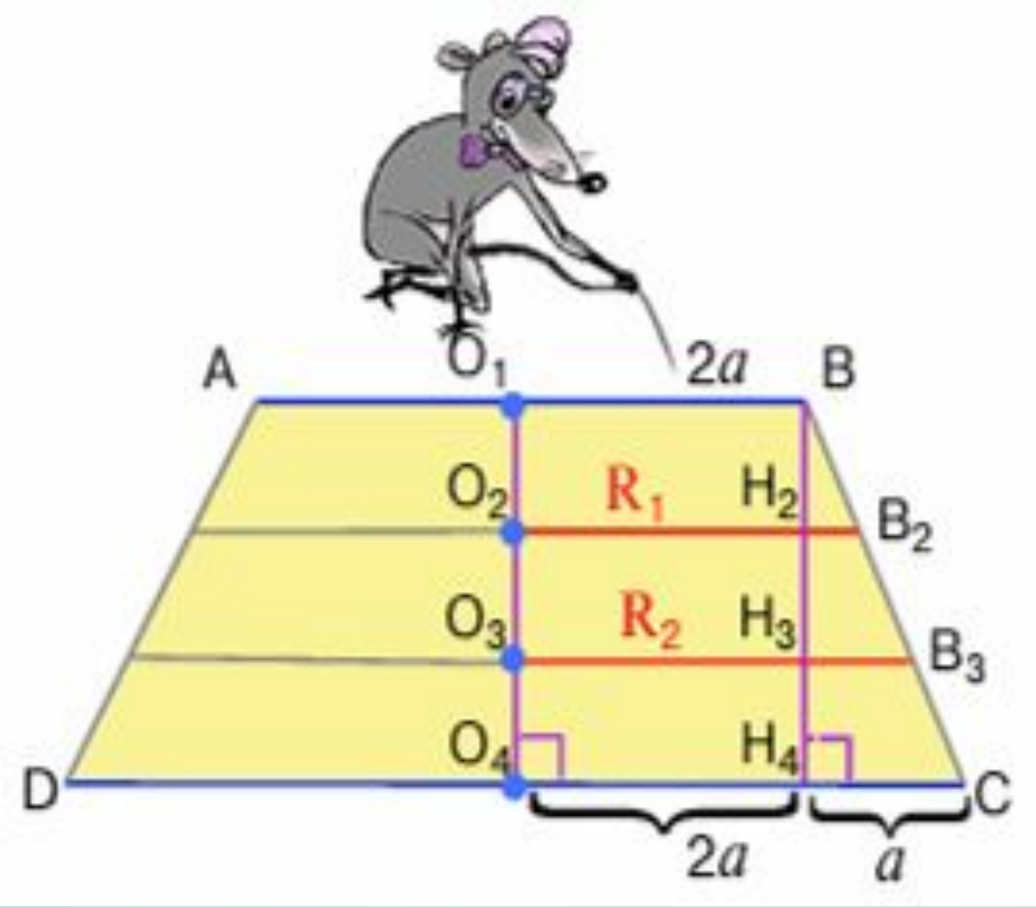
Решение:

Зная, что радиусы оснований конуса относятся как два к трем, обозначим радиусы как 2а и 3а и рассмотрим осевое сечение конуса.



Решение:

1) Используя подобие, найдем радиусы проведенных сечений.



$$CH_4 = 3a - 2a = a$$

$$H_2B_2 = \frac{1}{3}CH_4 = \frac{a}{3}$$

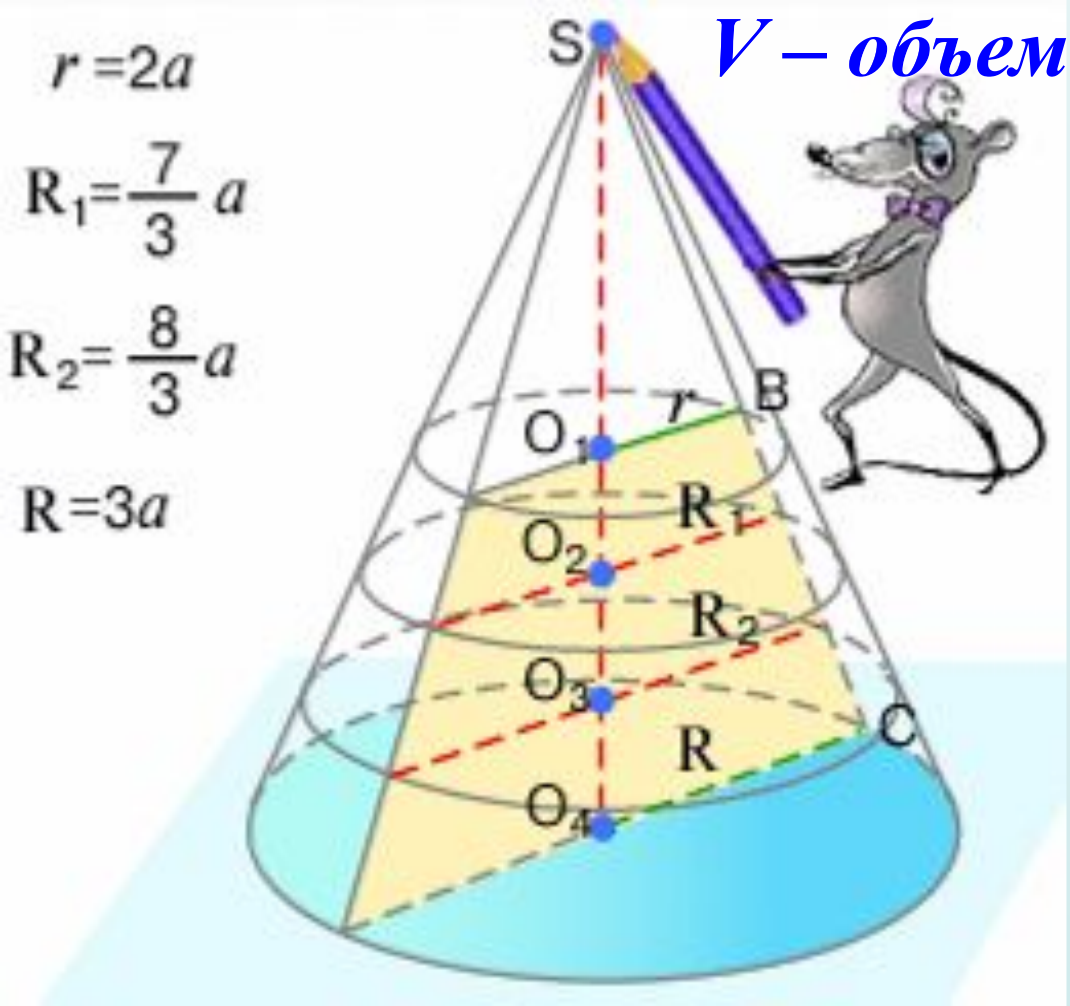
$$H_3B_3 = \frac{2}{3}CH_4 = \frac{2a}{3}$$

$$R_1 = 2a + \frac{a}{3} = \frac{7}{3}a$$

$$R_2 = 2a + \frac{2a}{3} = \frac{8}{3}a$$

Решение:

2) *Достроив усеченный конус до полного, найдем, какую часть от полного конуса составляют меньшие конусы.*



***V* – объем наибольшего конуса**

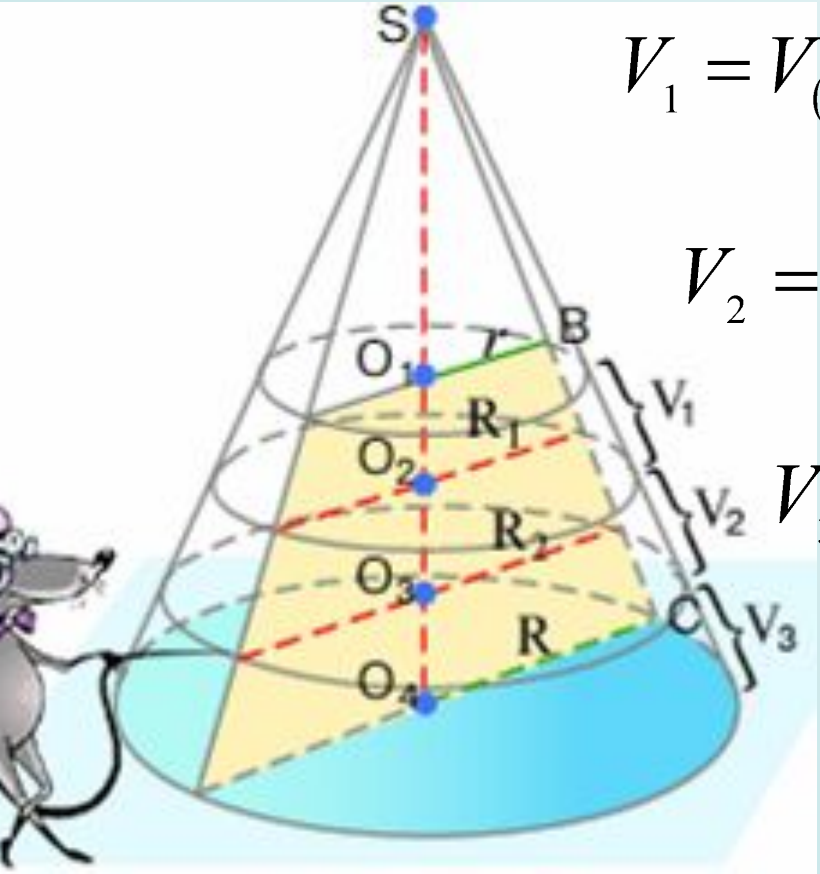
$$\frac{V_{(SO_1)}}{V}=\frac{(2a)^3}{(3a)^3}=\frac{2^3}{3^3}=\frac{6^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_2)}}{V}=\frac{\left(\frac{7}{3}a\right)^3}{(3a)^3}=\frac{7^3}{9^3}$$

$$\frac{V_{(SO_3)}}{V}=\frac{\left(\frac{8}{3}a\right)^3}{(3a)^3}=\frac{8^3}{9^3}$$

Решение:

3) Определим, какую часть от объема полного конуса составляют усеченные конусы, расположенные между соседними сечениями и найдем отношение объемов этих конусов.



$$V_1 = V_{(SO_2)} - V_{(SO_1)} = \frac{7^3 - 6^3}{9^3}V = \frac{127}{9^3}V$$

$$V_2 = V_{(SO_3)} - V_{(SO_2)} = \frac{8^3 - 7^3}{9^3}V = \frac{169}{9^3}V$$

$$V_3 = V - V_{(SO_3)} = \frac{9^3 - 8^3}{9^3}V = \frac{217}{9^3}V$$

Ответ:

$V_1 : V_2 : V_3 = 127 : 168 : 217$