Расширение множества натуральных чисел

Л. А. Янкина,

канд. пед. наук, доцент

1. **Задача расширения понятия числа**
2. **Положительные рациональные числа**
3. **Действительные числа**

Задача расширения понятия числа

***Большинство применений математики сводится к двум основным задачам*:**

- подсчет числа элементов конечного множества;

- измерение величин.

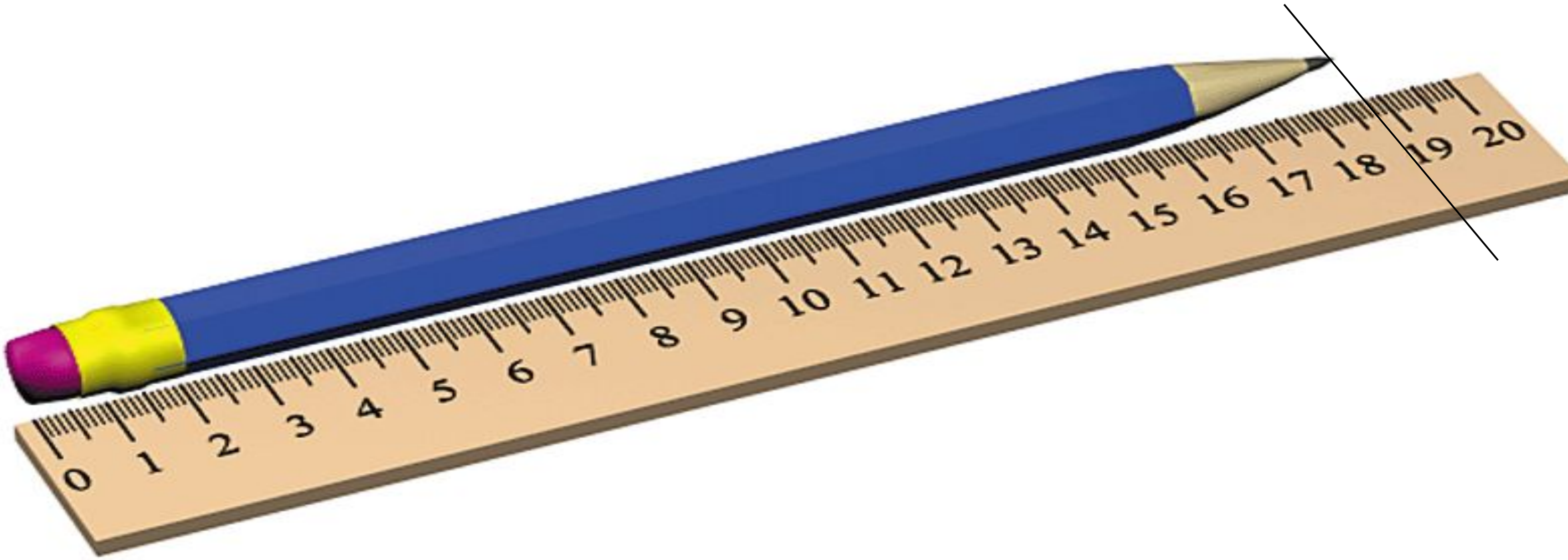
4 арбуза

9 грузовиков

4 куска ткани

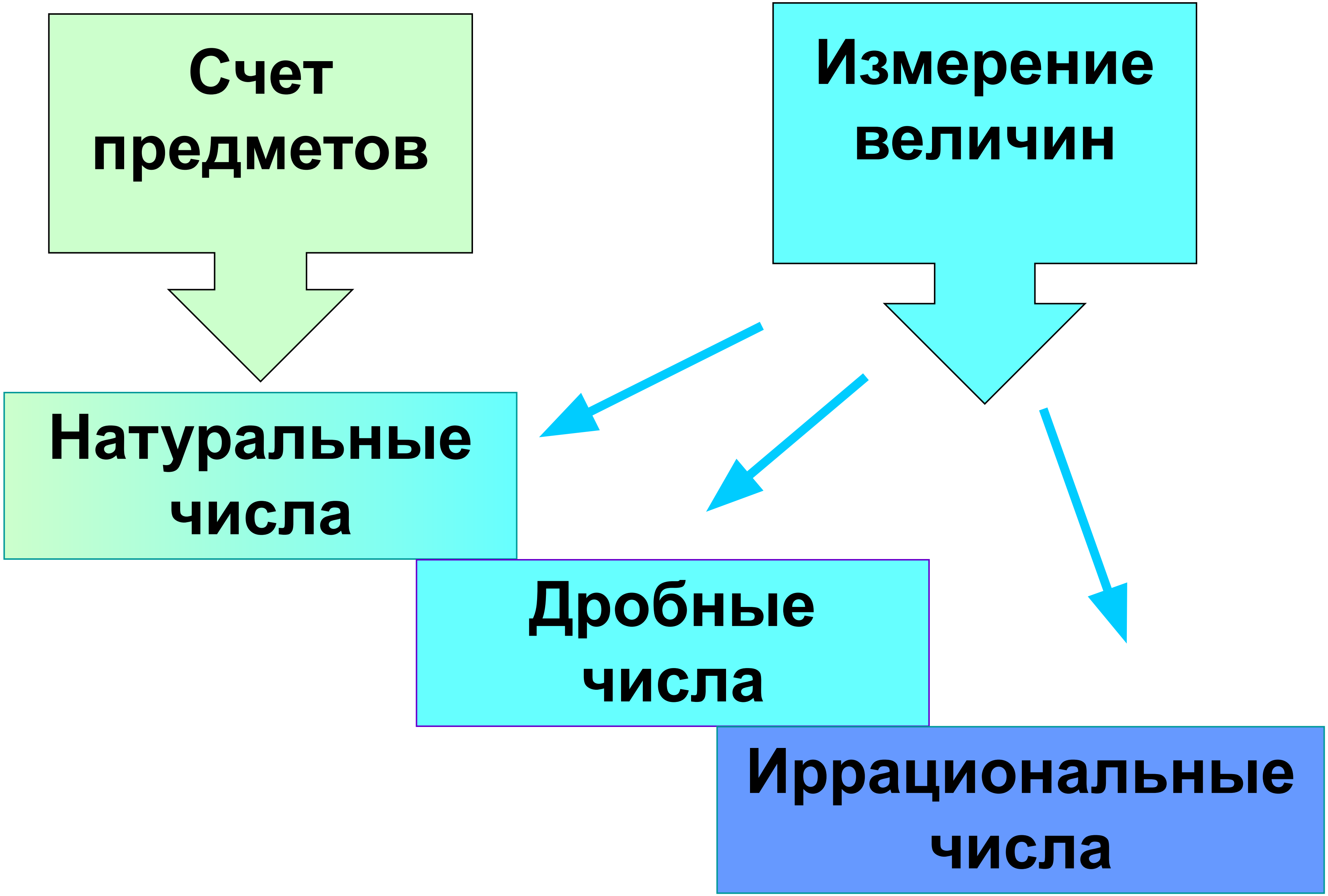
Для решения первой задачи достаточно множества целых неотрицательных чисел:

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$



$$18\ \text{см} < d < 19\ \text{см}$$

Для измерения величин натуральных чисел недостаточно


Счет
предметов
Измерение
величин
Натуральные
числа
Дробные
числа
Иррациональные
числа

Взаимосвязи между числовыми множествами

Расширение множества натуральных чисел

ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

1. Понятие дроби
2. Понятие положительного рационального числа
3. Арифметические действия над положительными рациональными числами
4. Свойства множества положительных рациональных чисел

Понятие дроби

Дан отрезок *a*, выберем единичный отрезок *e*.

При измерении длины отрезка *a* могут возникнуть следующие ситуации:

1. Единичный отрезок e укладывается в отрезке a целое число раз (n раз):

$$m_e(a) = n \text{ или } a = ne$$

Длина отрезка a при единице длины e выражается натуральным числом n

Отрезки a и e в этом случае называются соизмеримыми

2. **Единичный отрезок e не укладывается в отрезке a целое число раз. Разобьем отрезок e на n равных частей и выберем в качестве единицы длины n-ную часть отрезка e:**

$$m_{e1}(e) = n \text{ или } e = ne_1,\ e_1 = \frac{1}{n}e$$

Если n-ная часть отрезка e укладывается в отрезке a целое число раз (m раз), то

$$m_e(a) = \frac{m}{n} \text{ или } a = \frac{m}{n}e$$

Длина отрезка a выражается парой натуральных чисел (m; n)

Пару чисел, записанную в виде $\frac{m}{n}$, называют обыкновенной дробью, здесь $m, n \in N$, m – числитель, n – знаменатель.

Знаменатель определяет, какую часть единицы измерения следует рассмотреть, числитель – указывает, сколько таких частей нужно взять

Длина отрезка a при единице длины e выражается обыкновенной дробью

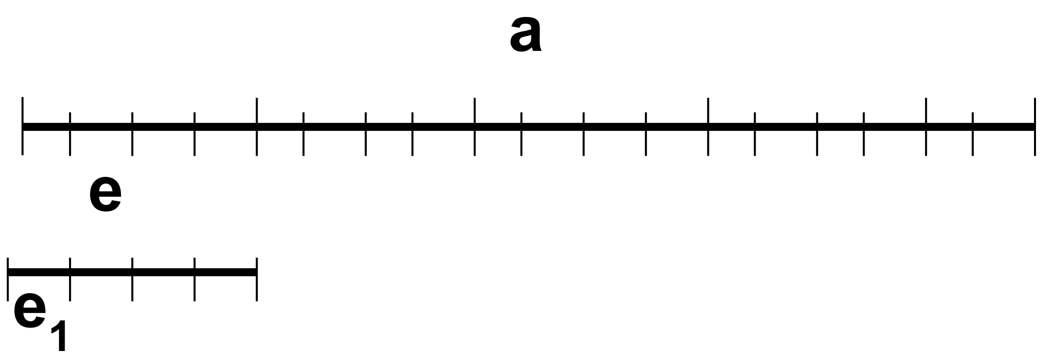
Отрезки a и e в этом случае называются соизмеримыми

3. Единичный отрезок е и любая его часть не укладываются в отрезке а целое число раз. То есть его длину нельзя выразить ни натуральным, ни дробным числом.

В этом случае отрезок а не соизмерим ни с каким единичным отрезком.

Длина такого отрезка выражается иррациональным числом.

Рассмотрим отрезок а, выберем единичный отрезок е



$$e = 4e_1 \Rightarrow e_1 = \frac{1}{4}\,e,\quad a = \frac{18}{4}\,e$$

$$e = 2e_2 \Rightarrow e_2 = \frac{1}{2}\,e,\quad a = \frac{9}{2}\,e$$

$$e = 8e_3 \Rightarrow e_3 = \frac{1}{8}\,e,\quad a = \frac{36}{8}\,e$$ и т. д.

Длина отрезка а может быть выражена бесконечным множеством дробей:

$$\frac{9}{2}, \frac{18}{4}, \frac{36}{8}, \ldots$$

Вообще, если при единице длины е длина отрезка а выражена дробью $\frac{m}{n}$, то она может быть выражена и любой дробью вида $\frac{mk}{nk}$, где k ∈ N

Дроби, выражающие длину одного и того же отрезка при единице длины е, называют равными дробями (или эквивалентными, или равносильными)

Теорема (признак определения равенства дробей)

Для того чтобы дроби $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ выражали длину одного и того же отрезка, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство mq = np, т.е.

$$\frac{m}{n} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = np.$$

Пример: $\frac{9}{2} = \frac{18}{4}$ **, т. к. 9 · 4 = 2 · 18**

Основное свойство дроби

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной:

$$\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}\ ,\ k \in N$$

На этом свойстве основано сокращение дробей и приведение дробей к общему знаменателю

Сокращение дроби – это замена данной дроби другой, равной данной, но с меньшим числителем и знаменателем

Чтобы **сократить** дробь, надо ее числитель и знаменатель разделить на одно и то же число отличное от 0

Дробь является **сократимой**, если ее числитель и знаменатель имеют общий делитель больше единицы. Если числитель и знаменатель дроби одновременно делятся только на единицу, то дробь называют **несократимой**

<u>Пример</u> 1: $\frac{5}{17}$ **несократимая дробь, т. к.**

D (5; 17) = 1, т.е. 5 и 17 взаимно простые.

<u>Пример</u> 2: сократить дробь $\frac{48}{80}$

D (48; 80) = 16, $\frac{48}{80} = \frac{3}{5}$

Приведение дробей к общему знаменателю – это замена данных дробей равными им дробями, имеющими одинаковые знаменатели

Общим знаменателем двух дробей $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$ является общее кратное чисел n и q, а **наименьшим общим знаменателем** – их наименьшее общее кратное **К(n, q)**

<u>Пример</u>: Привести к наименьшему общему знаменателю дроби $\frac{8}{15}$ **и** $\frac{4}{35}$

15 = 3 · 5, 35 = 5 · 7, К(15, 35) = 3 · 5 · 7 = 105

$$\frac{8}{15} = \frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 7} = \frac{56}{105}$$

$$\frac{4}{35} = \frac{4 \cdot 3}{35 \cdot 3} = \frac{12}{105}$$

Дробь называется правильной, если её числитель <u>меньше</u> знаменателя, и неправильной, если ее числитель <u>больше знаменателя или равен ему</u>

правильные **неправильные**

$$\frac{1}{8} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{8}{8} \quad \frac{9}{7} \quad \frac{12}{36} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{40}{5}$$

Упражнения

На множестве дробей $\left\{\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{9}{12},\frac{3}{15},\frac{5}{25},\frac{12}{6}\right\}$ **задано отношение равенства. Постройте граф этого отношения. Каковы особенности этого графа? С чем они связаны?**

Приведите дроби к наименьшему общему знаменателю: а) $\frac{1}{3}$ **и** $\frac{1}{102}$ **б)** $\frac{7}{16}$ **и** $\frac{5}{844}$ **в)** $\frac{15}{171}$ **и** $\frac{23}{270}$

Найдите несократимую дробь, равную следующей: а) $\frac{108}{144}$ **б)** $\frac{402}{455}$ **в)** $\frac{780}{2730}$

г) $\frac{45\cdot 56+45\cdot 14}{70\cdot 72}$ **д)** $\frac{38\cdot 53-38\cdot 25}{19\cdot 42}$

Понятие положительного рационального числа

- Обыкновенная дробь, числитель, знаменатель $\dfrac{m}{n}$ **m, n ∈ N**

- Правильная дробь **m < n**

- Неправильная дробь **m ≥ n**

- Сократимая дробь **D(m; n) ≠ 1**

- Несократимая дробь **D(m; n) = 1**

Одному и тому же отрезку можно поставить в соответствие бесконечное множество равных дробей, выражающих его длину при выбранной единице е. Но длина отрезка должна представляться единственным числом. Поэтому равные дроби считают различными записями одного и того же числа, а само число называют положительным рациональным числом.

Положительным рациональным числом называется класс равных дробей, а каждая дробь, принадлежащая этому классу, есть запись (представление) этого числа

Примеры: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots\right\}$, $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \ldots\right\}$

Множество всех положительных рациональных чисел принято обозначать символом Q_+.

Отношение равенства на множестве Q_+

Если положительное рациональное число a представлено дробью $\frac{m}{n}$, а положительное рациональное число b – другой дробью $\frac{p}{q}$, то a = b $\left(\frac{m}{n} = \frac{p}{q}\right)$ тогда и только тогда, когда mq = np.

Среди всех записей любого положительного рационального числа выделяется дробь $\frac{m}{n}$, которая является несократимой (т. е. Д(m; n) = 1)

Теорема

Для любого положительного рационального числа а найдётся одна и только одна несократимая дробь, являющаяся записью этого числа

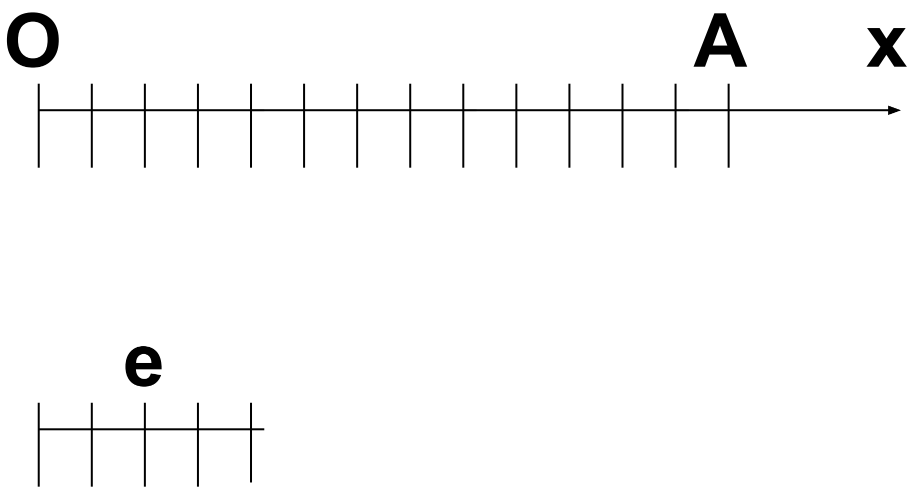
Задача. Пусть $\frac{m}{n}$ - запись некоторого рационального числа. Построить отрезок, длина которого выражается этим числом.

Алгоритм

1) выбрать единицу длины **е**
2) разделить единичный отрезок **е** на **n** равных частей
3) построить луч **Ох** и на нем от точки **О** отложить **m** отрезков, равных **n**-ной части отрезка **е** – получим точку **А**.

Отрезок ОА – искомый: ОА = $\frac{m}{n}$ **е**

Упражнение. Построить отрезок а = $\frac{13}{4}$ е.



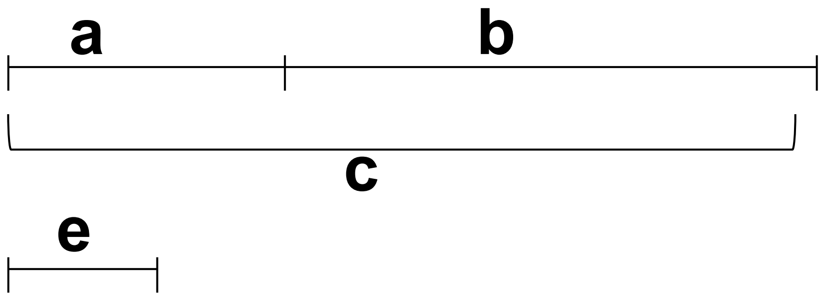
OA = $\frac{13}{4}$ e

Арифметические действия над положительными рациональными числами

Сложение

Рассмотрим отрезки a, b и c,

e – единичный отрезок



a = $\frac{m}{n}$ **e, b =** $\frac{p}{n}$ **e,**

где **e = ne_1 и**

e_1 = $\frac{1}{n}$ **e**

c = a + b = $\frac{m}{n}$ **e +** $\frac{p}{n}$ **e = $me_1 + pe_1 = (m + p)e_1$ =**

= $\frac{m+p}{n}$ **e**

Определение. Если положительные рациональные числа a и b представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, то их **суммой** называется число a + b, которое представляется дробью $\frac{m+p}{n}$

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{n} = \frac{m+p}{n} \qquad (1)$$

Если же числа a и b представлены дробями с различными знаменателями, то сначала надо привести их к одному знаменателю, а затем применять правило (1)

Чтобы сложить дроби, нужно привести их к общему знаменателю, затем сложить их числители и полученную сумму взять числителем, а найденный общий знаменатель – знаменателем

Пример:

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{14}+\frac{4}{35}=\frac{20}{70}+\frac{15}{70}+\frac{8}{70}=\frac{20+15+8}{70}=\frac{43}{70}$$

В общем виде правило сложения можно записать так:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

Если D(n, q) = 1, К(n, q) = n · q

Теорема (о существовании и единственности суммы)

Сумма любых двух положительных рациональных чисел существует и единственна

Отношение «больше»

Пусть $a, b \in Q_+$.

<u>Определение.</u> **Число a больше числа b, если существует такое число $c \in Q_+$, что $a = b + c$:**

$$a > b \Leftrightarrow (\exists\ c \in Q_+)\ a = b + c$$

<u>Отношение «меньше» определяется аналогично</u>

Практические приемы установления отношения «больше»

1)Если a = $\frac{m}{n}$, b = $\frac{p}{n}$, то a > b тогда и только тогда, когда m > p.

Пример: $\frac{13}{14} > \frac{9}{14}$, так как 13 > 9.

2) Если a = $\frac{m}{n}$, b = $\frac{m}{q}$, a > b тогда и только тогда, когда n < q.

Пример: $\frac{13}{14} > \frac{13}{15}$, так как 14 < 15.

3) Если a = $\frac{m}{n}$, b = $\frac{p}{q}$, то a > b тогда и только тогда, когда mq > np.

Пример: $\frac{7}{8} > \frac{11}{13}$, т.к. $7 \cdot 13 > 8 \cdot 11$

Теорема. $(\forall\ a, b \in Q_+)\ a \neq b \Rightarrow a > b \lor b > a$

Отношение «больше» обладает свойствами:

1) антисимметричности:

$$(\forall\ a, b \in Q_+)\ a > b \text{ и } a \neq b \Rightarrow \overline{b > a}$$

2) транзитивности:

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ a > b \text{ и } b > c \Rightarrow a > c$$

Отношение «больше» является отношением порядка на множестве Q_+

Свойства сложения

1) Коммутативный закон сложения

$$(\forall\ a, b \in Q_+)\ a + b = b + a$$

2) Ассоциативный закон сложения

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ \ (a + b) + c = a + (b + c)$$

3) Сократимость сложения

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ a + c = b + c \Rightarrow\ \ a = b$$

4) Монотонность сложения

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ a > b \Rightarrow a + c > b + c$$

5) $(\forall\ a, b \in Q_+)\ a + b \neq a$

6) $(\forall\ a \in Q_+)\ a + 0 = 0 + a = a$

В связи с определением сложения рациональных чисел возникает возможность уточнить смысл записей вида $3\frac{1}{4}$, $12\frac{5}{7}$ – смешанных чисел

Рассмотрим неправильную дробь $\frac{m}{n}$

$m \geq n \Rightarrow$

а) $m \vdots n \Rightarrow \frac{m}{n}$ - запись натурального числа.

Например, $\frac{15}{3}$ = 5.

б) $\overline{m \vdots n}$

Разделим m на n с остатком:

$m = nq + r$, где $r < n$.

Тогда $\frac{m}{n}$ = $\frac{nq+r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}$

Так как r < n, то дробь $\frac{r}{n}$ - правильная. Таким образом, неправильную дробь $\frac{m}{n}$ можно представить в виде суммы натурального числа q и правильной дроби $\frac{r}{n}$. Это действие называют выделением целой части из неправильной дроби.

Пример:

$$\frac{13}{4}=\frac{4\cdot 3+1}{4}=\frac{4\cdot 3}{4}+\frac{1}{4}=3+\frac{1}{4}=3\frac{1}{4}$$

смешанная дробь

Справедливо и обратное утверждение: всякую смешанную дробь можно записать в виде неправильной дроби:

Пример: $3\frac{1}{4} = 3 + \frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4} = \frac{4 \cdot 3 + 1}{4} = \frac{13}{4}$

или $3\frac{1}{4} = \frac{3 \cdot 4 + 1}{4}$

Вычитание

Разностью положительных рациональных чисел a и b называется такое положительное рациональное число c, что a = b + c

$$a - b = c \Leftrightarrow a = b + c$$

Операцию, в результате которой находят разность положительных рациональных чисел a и b, называют вычитанием. Вычитание положительных рациональных чисел - операция, обратная сложению

<u>Теорема</u> (о существовании и единственности разности)

Разность $a - b$ положительных рациональных чисел существует тогда и только тогда, когда $a > b$. Если разность $a - b$ существует, то она единственна

Используя определение и условие существования разности, можно получить правило вычитания положительных рациональных чисел, представленных дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{n}$, где m > p:

$$\frac{m}{n} - \frac{p}{n} = \frac{m-p}{n} \qquad (2)$$

Если же числа a и b представлены дробями с разными знаменателями, то нужно сначала привести эти дроби к общему знаменателю, а затем применить формулу (2)

Правила вычитания

1) правило вычитания числа из суммы

$$a > c \Rightarrow (a + b) - c = (a - c) + b$$

или

$$b > c \Rightarrow (a + b) - c = a + (b - c)$$

2) правило вычитания суммы из числа

$$a - (b + c) = (a - b) - c$$

3) правило вычитания разности из числа

$$a - (b - c) = (a - b) + c$$

4) $a - 0 = a, \quad a - a = 0$

Умножение

Если положительные рациональные числа представлены дробями $\frac{m}{n}$ и $\frac{p}{q}$, то их произведение есть число, представленное дробью $\frac{mp}{nq}$:

$$\frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$$

т.е. *произведением* двух дробей называется дробь, числитель которой равен произведению числителей этих дробей, а знаменатель – произведению знаменателей.

Примеры: 1) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}=\frac{3\cdot5}{4\cdot6}=\frac{5}{8}$

2) $7\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{22}{3}\cdot\frac{4}{7}=\frac{88}{21}=4\frac{4}{21}$

Теорема (о существовании и единственности произведения)

Произведение любых двух положительных рациональных чисел существует и единственно

Законы умножения

1) Коммутативный закон умножения

$$(\forall\ a, b \in Q_+)\ a \cdot b = b \cdot a$$

2) Ассоциативный закон умножения

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

3) дистрибутивный закон умножения относительно сложения

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

4) дистрибутивный закон умножения относительно вычитания

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

5) Сократимость умножения

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow\ a = b$$

6) Монотонность умножения

$$(\forall\ a, b, c \in Q_+)\ a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

7) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, \quad a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

Деление

Деление положительных рациональных чисел - операция, обратная умножению
Операцию, в результате которой находят частное положительных рациональных чисел a и b, называют **деление м**.

Частным положительных рациональных чисел a и b называется такое положительное рациональное число c, что $a = b \cdot c$

$$a : b = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$$

Правило деления

$$\boxed{\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}}$$

<u>Теорема</u> (о существовании и единственности частного)

Частное любых двух положительных рациональных чисел существует и единственно

Свойства деления

1) правило деления произведения на число:

$$(a \cdot b) : c = (a : c) \cdot b \text{ или } (a \cdot b) : c = a \cdot (b : c)$$

2) правило деления числа на произведение

$$a : (b \cdot c) = a : b : c$$

3) дистрибутивный закон деления относительно сложения

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$

4) дистрибутивный закон деления относительно вычитания

$$(a - b) : c = a : c - b : c$$

5) a : 1 = a, a : a = 1   a · 0 = 0 · a = 0

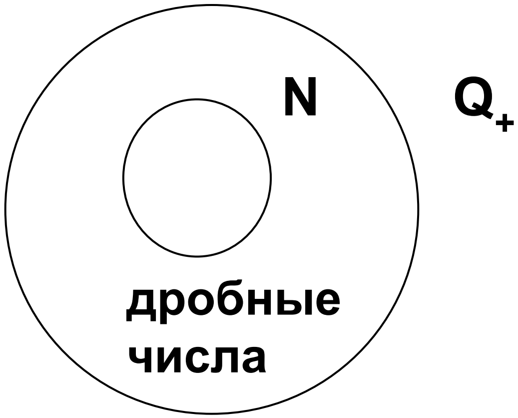
На 0 делить нельзя

Замечание. Знак черты в дроби можно рассматривать как знак действия деления:

$$\frac{m}{n} = m : n.$$

Термин «рациональное число» произошел от латинского слова *r a t i o*, что в переводе на русский означает «отношение» (частное).

СВОЙСТВА МНОЖЕСТВА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ



1. $N \subset Q_+$

<u>**Пример**</u>**: натуральное число 6 можно представить в виде следующих дробей:**

$\frac{6}{1}, \frac{12}{2}, \frac{18}{3}, \frac{24}{4}$ **и т.д.**

2. Множество Q_+ не ограничено снизу, т. е. в нем нет наименьшего числа

3. Множество Q_+ не ограничено сверху, т.е. в нем нет наибольшего числа

4. Множество Q_+ упорядочено

Множество Q_+ упорядочивает заданное на нем отношение «больше» (или «меньше»), которое является отношением порядка, так как оно *антисимметрично* и *транзитивно*.

5. Множество Q+ плотно, т.е. между любыми двумя различными числами **a** и **b** из Q_+ заключено ***бесконечно много*** чисел этого же множества

6. Множество Q_+ замкнуто относительно четырех арифметических операций

т.е. сумма, разность, произведение, частное (кроме частного при делении на 0, которое не имеет смысла) любых двух положительных рациональных чисел является положительным рациональным числом.

Основные задачи на дроби

1.Нахождение дроби от числа

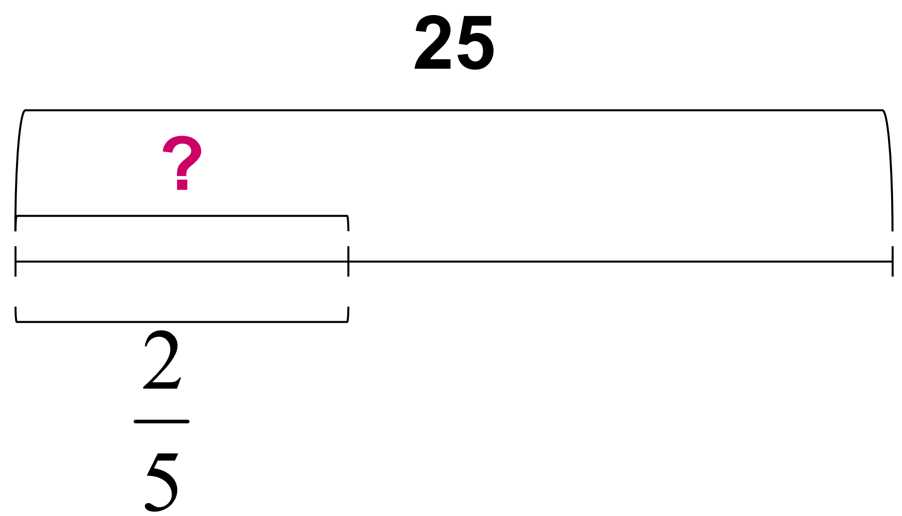
В классе 25 учеников.

$\frac{2}{5}$ учащихся класса

ходило в кино.

Сколько учеников

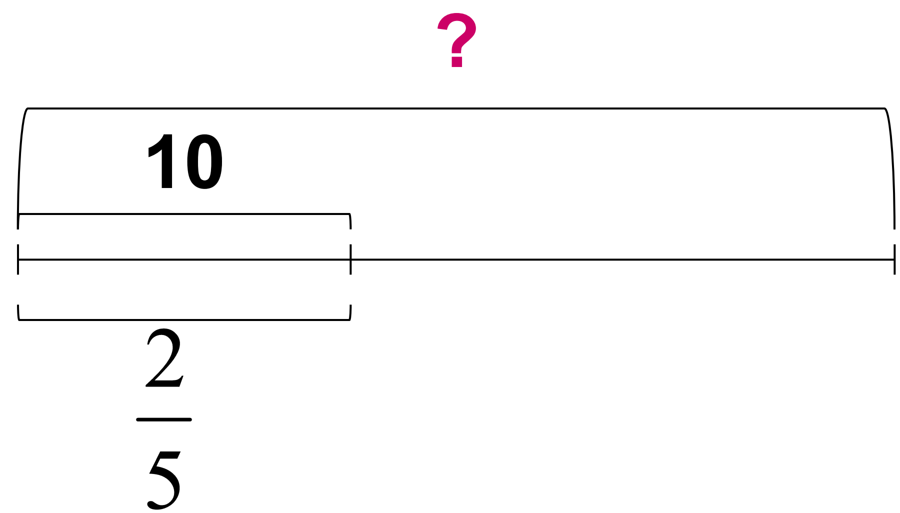
ходили в кино?



$$25 \cdot \frac{2}{5} = 10 \text{ (уч.)}$$

2.Нахождение числа по данному значению дроби

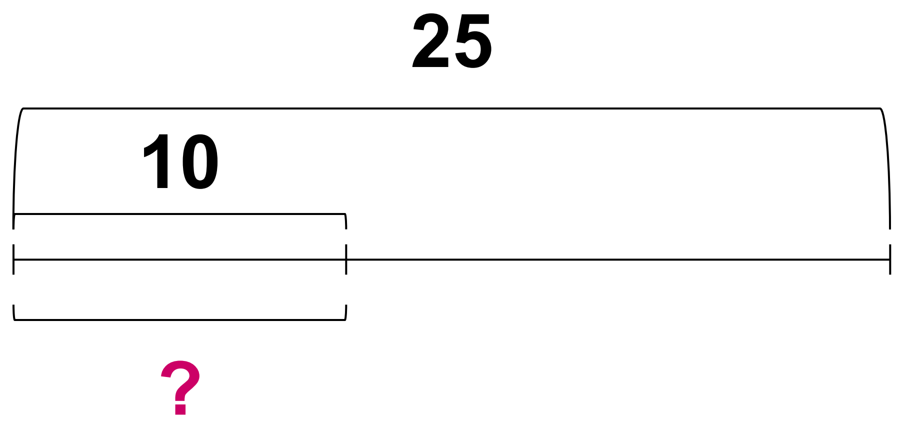
10 учеников класса ходили в кино, что составляет $\frac{2}{5}$ всех учащихся класса. Сколько всего учеников в классе?



$$10 : \frac{2}{5} = 10 \cdot \frac{5}{2} = 25 \text{ (уч.)}$$

3.Нахождение отношения двух чисел

В классе 25 учеников. 10 учеников ходили в кино. Какую часть всех учеников класса составляют ученики, ходившие в кино?



$$\frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

Проценты

$$1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01 \qquad 2\,\% = \frac{2}{100} = 0{,}02$$

$$12\,\% = \frac{12}{100} = 0{,}12 \qquad 40\,\% = \frac{40}{100} = 0{,}4$$

$$100\,\% = \frac{100}{100} = 1 \qquad 115\,\% = \frac{115}{100} = 1{,}15$$

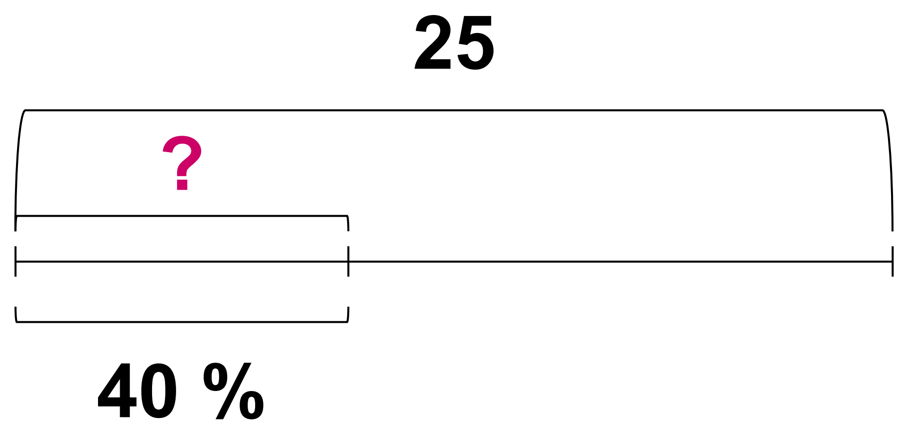
Чтобы проценты выразить дробью, нужно число процентов разделить на 100 и отбросить знак %.

Чтобы число выразить в процентах, нужно число умножить на 100 и приписать знак %.

Основные задачи на проценты

1.Нахождение процентов от числа

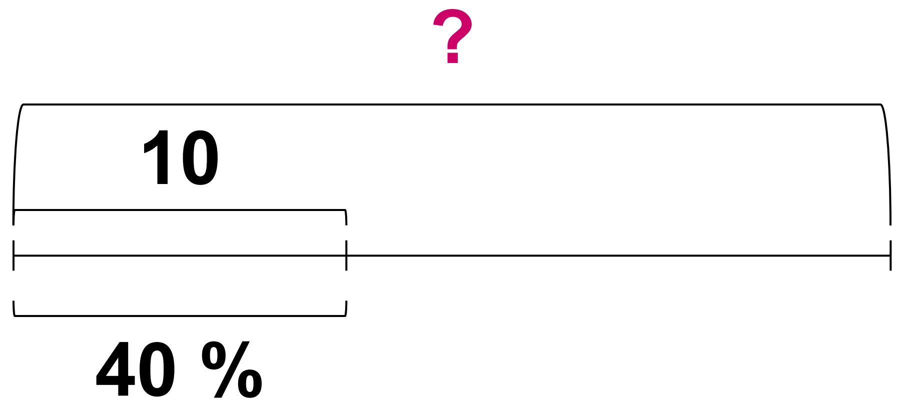
В классе 25 учеников.
40 % учащихся класса
ходили в кино.
Сколько учеников
ходили в кино?



$25 \cdot 40\ \% = 25 \cdot 0{,}4 = 10$ (уч.)

2.Нахождение числа по данному значению процентов

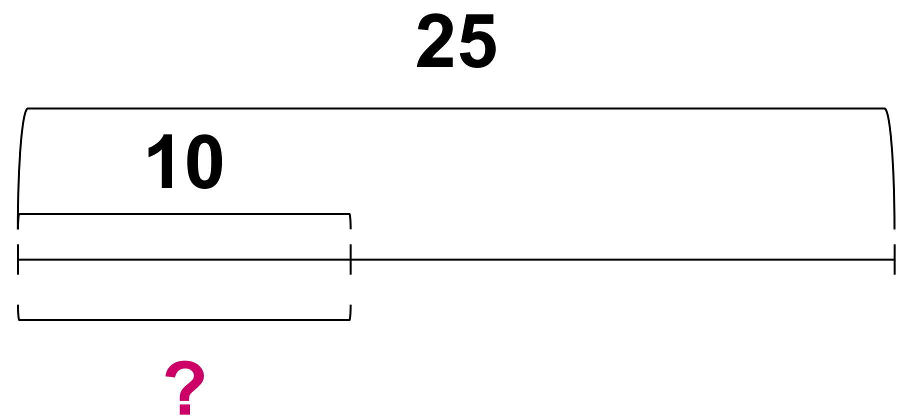
10 учеников класса ходили в кино, что составляет 40 % всех учащихся класса. Сколько всего учеников в классе?



10 : 40% = 10 : 0,4= 100 : 4 = 25 (уч.)

3.Нахождение процентного отношения двух чисел

В классе 25 учеников. 10 учеников ходили в кино. Сколько процентов всех учеников класса составляют ученики, ходившие в кино?



$$\frac{10}{25} \cdot 100\ \% = 40\ \%$$

Множество положительных рациональных чисел как расширение множества натуральных чисел

Условия расширения:

1. $N \subset Q_+$

2. Согласованность операций,

т.е. результаты арифметических действий, произведенных по правилам, существующим для натуральных чисел, должны совпадать с результатами действий над ними, но выполненных по правилам, сформулированным для положительных рациональных чисел.

3. Выполнимость в Q_+ операции, не всегда осуществимой в N

Деление, которое не всегда выполняется во множестве N, во множестве Q_+ выполняется всегда

Упражнение

Решить уравнение, используя зависимость между компонентами и результатами действий:

$$66\frac{3}{5}:\left[5+3\frac{1}{5}:\left(1\frac{3}{5}-\frac{4}{15}x\right)\right]-7\frac{3}{20}=\frac{1}{4}$$

Десятичные дроби

Десятичной называется дробь вида $\frac{m}{10^n}$,

где m, n $\in$ N.

При записи дроби $\frac{m}{10^n}$ последние n цифр десятичной записи числа m отделяют запятой.

Примеры:

$$\frac{4362}{10^2} = 43{,}62$$

$$\frac{47}{10^4} = \frac{00047}{10^4} = 0{,}0047$$

<u>Утверждение</u>: Если к десятичной дроби $A,a_{n-1}\ ...\ a_0$ приписать справа любое число нулей, то получится десятичная дробь, равная данной, т.е.

$$A,a_{n-1}\ ...\ a_0 = A,a_{n-1}\ ...\ a_0 00\ldots0$$

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ НАД ДЕСЯТИЧНЫМИ ДРОБЯМИ

Сложение и вычитание

$$\begin{array}{r} 2{,}5400 \\ +\ 3{,}7126 \\ \hline 6{,}2526 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}7126 \\ -\ 2{,}5400 \\ \hline 1{,}1726 \end{array}$$

Умножение

$$\begin{array}{r} \times\; 3{,}21 \\ 5{,}4 \\ \hline 1284 \\ +\;1605 \\ \hline 17{,}334 \end{array}$$

<u>Примеры</u>: 1) $5{,}426 \cdot 10^2 = 542{,}6$

2) $5{,}42 \cdot 10^3 = 5420$

Деление

<u>Примеры</u>: 1) 24,48 : 1,2 = 244,8 : 12 = 20,4

$$\begin{array}{l|l} 244{,}8 & 12 \\ \cline{2-2} \underline{24} & 2\,0{,}\,4 \\ \quad 4\,8 & \\ \quad \underline{48} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

2) $542{,}6 : 10^2 = 5{,}426$

3) $5{,}4 : 10^3 = 0{,}0054$

ПЕРЕВОД ОБЫКНОВЕННЫХ ДРОБЕЙ В ДЕСЯТИЧНЫЕ И ДЕСЯТИЧНЫХ – В ОБЫКНОВЕННЫЕ

$$4{,}12 = \frac{412}{10^2} = \frac{412}{100} = \frac{103}{25}$$

Чтобы перевести обыкновенную дробь в десятичную, нужно разделить числитель на знаменатель

Любую ли дробь вида $\frac{m}{n}$ (m, n $\in$ N) можно записать в виде конечной десятичной дроби, т.е. дроби, у которой после запятой стоит конечное число цифр?

Теорема. **Для того чтобы несократимая дробь $\frac{m}{n}$ была равна десятичной, необходимо и достаточно, чтобы в разложение ее знаменателя n на простые множители входили лишь простые числа 2 и 5 (или лишь одно из них).**

Примеры: 1) $\frac{7}{160} = \frac{7}{2^5 \cdot 5} =$ **0,04375**

$$\begin{array}{r|l} 160 & 2 \\ 80 & 2 \\ 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

2) $\dfrac{9}{14} = \dfrac{9}{2 \cdot 7}$ **- дробь нельзя превратить в *конечную* десятичную**

3) $\dfrac{195}{260} = \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{2 \cdot 2} =$ **0,75**

260 = 2^2 · 5 · 13

Упражнения

1. Запишите дроби $\frac{1234}{10}$, $\frac{6969}{10}$, $\frac{37}{10}$ в виде десятичных.

2. Запишите числа 7,11; 0,45; 13,745 в виде несократимых обыкновенных дробей.

3. Какими будут численные значения следующих величин, если в качестве единицы длины взять 1 м: а) 23 см 2 мм; в) 90 дм 16 см 8 мм; б) 5м 17 дм; г)1 км 120м?

4. Не выполняя вычислений, сравните следующие произведения:

а) 19,91 •199,2 и 1,991·1992;

б) 1,992 •199,3 и 1,992 •1993.

5. Что больше: 35% от 40 или 40% от 35?

6. Увеличьте число: а) 60 на 10%; б) 80 на 2,5%.

7. Число x увеличили на 45%. Во сколько раз увеличили число?

8. Число x увеличили в 2,4 раза. На сколько процентов увеличили число?

9. **Туристы прошли 75% маршрута и им осталось пройти еще 5,5 км. Какова длина маршрута?**
10. **Какие из следующих чисел можно записать в виде конечных десятичных дробей:**

$$\frac{7}{352};\quad \frac{12}{56};\quad \frac{21}{75};\quad \frac{12}{96}.$$

БЕСКОНЕЧНЫЕ ДЕСЯТИЧНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ДРОБИ

Пример 1

$$\frac{10}{7} = 1{,}42857141\ldots =$$

$$= 1{,}(42857141)$$

$$\begin{array}{l|l}
10 & 7 \\ \cline{2-2}
\underline{\ \ 7} & 1{,}42857141 \\
\ \ 30 & \\
\underline{\ \ 28} & \\
\ \ \ \ 20 & \\
\ \ \ \ \underline{14} & \\
\ \ \ \ \ \ 60 & \\
\ \ \ \ \ \ \underline{56} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 40 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \underline{35} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 50 & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \underline{49} & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 &
\end{array}$$

<u>Пример</u> 2

$$\frac{31}{11} = 2{,}8181\ldots =$$

$$= 2{,}(81)$$

$$\begin{array}{l|l}
31 & 11 \\ \cline{2-2}
\underline{22} & 2{,}8181 \\
\quad 90 & \\
\quad \underline{88} & \\
\qquad 20 & \\
\qquad \underline{11} & \\
\qquad\quad 90 & \\
\qquad\quad \underline{88} & \\
\qquad\qquad 20 & \\
\qquad\qquad \underline{11} & \\
\qquad\qquad\quad 90 &
\end{array}$$

Пример 3

$$\frac{53}{12} = 4{,}4166\ldots =$$

$$= 4{,}41(66)$$

$$\begin{array}{r|l}
53 & 12 \\ \cline{2-2}
\underline{48} & 4{,}4166 \\
50 & \\
\underline{48} & \\
20 & \\
\underline{12} & \\
80 & \\
\underline{72} & \\
80 & \\
\underline{72} & \\
80 &
\end{array}$$

Пример 4 $0{,}25 = 0{,}250000\ldots. = 0{,}25(0)$

Дробь называется периодической, если начиная с некоторой цифры, она образуется бесконечным повторением одной и той же цифры или группы цифр. Повторяющуюся группу цифр заключают в скобки и называют периодом этой дроби.

Каждое положительное рациональное число можно представить в виде бесконечной десятичной периодической дроби.

Если период следует сразу после запятой, то такую дробь называют чисто периодической.

Если перед периодом стоят один или несколько знаков, то дробь - смешанная периодическая

Преобразование бесконечной периодической дроби в обыкновенную

Чисто периодическая бесконечная десятичная дробь, меньше единицы, равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен периоду, а знаменатель состоит из стольких девяток, сколько цифр в периоде дроби

Пример: 5,33… = 5,(3) = $5\frac{3}{9} = 5\frac{1}{3}$

Смешанная периодическая дробь, меньше единицы, равна такой обыкновенной дроби, числитель которой равен разности между числом, записанным цифрами, стоящими до начала второго периода, и числом, записанным цифрами, стоящими до начала первого периода; знаменатель состоит из такого числа девяток, сколько цифр в периоде, и такого числа нулей, сколько цифр стоит до начала первого периода

К периодическим десятичным дробям можно отнести все конечные десятичные дроби, как дроби, имеющие в периоде число 0.

<u>Пример</u>: 3,4(6) = 3 $\dfrac{46-4}{90} = 3\dfrac{42}{90} = 3\dfrac{7}{15}$

Спасибо за внимание!