Університет митної справи та фінансів

Вища та прикладна математика

Модуль: Математичне програмування та дослідження операцій

доц. Лебідь О.Ю.

Дніпропетровськ
2016

Тема 10: Задачі з умовами невизначеності та конфлікту

План

1. Основні поняття теорії ігор
2. Класифікація ігор
3. Матрична гра в чистих стратегіях
4. Матрична гра в мішаних стратегіях
5. Домінування стратегій
6. Зведення гри двох осіб з нульовою сумою до задач лінійного програмування
7. Матрична гра двох осіб з ненульовою постійною сумою

Поява теорії ігор

Теорія ігор уперше була системно викладена **Дж. фон Нейманом** і **О. Монгерштерном** у 1944 р. У роки Другої світової війни і після неї теорія ігор привернула увагу військових, як апарат для дослідження стратегічних рішень. Проте основним застосуванням теорії ігор стала економіка. У **1994** р. Нобелівську премію з економіки одержали Джон Неш (США), Джон Харсаньї (США), Рейнхард Зельтен (Німеччина) за праці у сфері теорії ігор.

Основні поняття теорії ігор

У оптимізаційних моделях вибір рішення здійснювався **однією** особою. В теорії ігор рішення приймаються **кількома учасниками**. Значення цільової функції для кожного з них залежить від рішень, що приймаються рештою учасників.

Теорія ігор ще має назву теорії конфліктних ситуацій. Прикладами є ситуація «покупець-продавець», карткові та спортивні ігри, олігополістичні моделі. Конфлікт може бути результатом **свідомих і стихійних** дій різних учасників.

Основні поняття теорії ігор

Гравці в теорії ігор – це учасники (суб’єкти) конфлікту. Вони відрізняються іменами або номерами. Можливі дії кожної зі сторін мають назву **стратегії**, або ходів.

Інтереси сторін представляються **функціями виграшу** (платежу) для кожного з гравців.

Гра – це модель, яка формалізує змістовний опис конфлікту.

Класифікація ігор

Ігри класифікують залежно від обраного критерію:

- за кількістю гравців;
- за кількістю стратегій;
- за властивостями функцій виграшу;
- за можливостями попередніх переговорів між гравцями.

Класифікація ігор

Залежно від кількості гравців розрізняють ігри:

- з двома учасниками;
- з трьома учасниками;
- більше трьох учасників;
- нескінченна кількість учасників.

Теорію оптимізації, наприклад, можна розглядати як теорію ігор з одним гравцем.

Класифікація ігор

За кількістю стратегій розрізняють **скінченні** та **нескінченні** ігри.

У скінченних іграх кількість можливих стратегій є числом скінченним (підкидання монети – дві стратегії, підкидання кубика – шість стратегій).

Стратегії у скінченних іграх називають **чистими стратегіями**.

В нескінченних іграх кількість стратегій є нескінченною.

Класифікація ігор

За властивостями функцій виграшу (платіжних функцій) теорію ігор поділяють на три види.

Гра, в якій виграш одного з гравців дорівнює програшу другого, має назву **гри з нульовою сумою**, або **антагоністичної** гри.

Якщо гравці виграють і програють одночасно та їм вигідно діяти разом, то такі ігри мають назву **ігор з постійною різницею**.

Гра з ненульовою сумою – це гра, в якій наявні конфлікт та узгоджена дія гравців.

Класифікація ігор

За можливістю попередніх переговорів між гравцями розрізняють кооперативні та некооперативні ігри.

Кооперативна гра – це гра, в якій до її початку учасники утворюють коаліції і приймають угоди про свої стратегії.

Некооперативна гра – гра, в якій гравці не можуть координувати свої стратегії.

Приклад гри з нульовою сумою

Матриця виграшів першого гравця:

		Стратегії другого гравця	
		«Так»	«Ні»
Стратегія першого гравця	«Так»	1	-1
	«Ні»	-1	1

Матриця виграшів другого гравця:

		Стратегії другого гравця	
		«Так»	«Ні»
Стратегія першого гравця	«Так»	-1	1
	«Ні»	1	-1

Для наочності матрицю виграшів для обох гравців можна об'єднати в одну:

		Стратегії другого гравця	
		«Так»	«Ні»
Стратегія першого гравця	«Так»	1; -1	-1; 1
	«Ні»	-1; 1	1; -1

Приклад гри з ненульовою сумою (дилема ув'язнених)

Платіжна матриця гри:

		Стратегії другого гравця	
		«Так»	«Ні»
Стратегія першого гравця	«Так»	3; 3	0; 5
	«Ні»	5; 0	1; 1

Основні припущення теорії ігор

Гравець 1 обирає i-ту стратегію, яка є розв'язком задачі

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} .$$

Гравець 2 обере j-ту стратегію, яка є розв'язком задачі

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} .$$

Основні припущення теорії ігор

Якщо гравець 1 дотримується обраної максимінної стратегії, його виграш у будь-якому разі буде не меншим за максимальне значення (нижня ціна гри), тобто

$$\alpha \geq \max_i \min_j a_{ij}.$$

Якщо гравець 2 дотримується своєї мінімаксної стратегії, його програш буде не більший за мінімаксне значення (верхня ціна гри), тобто

$$\beta \leq \min_j \max_i a_{ij}.$$

Існування розв'язку в чистих стратегіях

Якщо верхня та нижня ціна гри збігаються

$$\alpha = \beta,$$

тобто

$$\max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij} = v.$$

обидва гравці одержують гарантовані платежі. Значення v називається ціною гри. Якщо ціна антагоністичної гри дорівнює 0, гра називається **справедливою**.

Приклад розв'язку гри в чистих стратегіях

Вибір стратегії. Матриця деякої гри має вигляд

A \ B	b_1	b_2	b_3	b_4	Мінімальний виграш гравця 1
a_1	10	40	12	9	9
a_2	17	16	13	14	13
a_3	23	8	10	25	8
Максимальний програш гравця 2	23	40	13	25	

Знайдіть оптимальні стратегії гравців.

Нижня ціна гри: $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} a_{ij} = 13$.

Верхня ціна гри: $\beta = \min\limits_{j} \max\limits_{i} a_{ij} = 13$.

Ситуація (a_2, b_3) є **сідловою точкою**, і v = 13 є **ціна гри**.

Приклад розв'язку гри в мішаних стратегіях

Матриця виграшів A гравця 1:

2	4	5	1
3	5	6	4
4	1	2	7

Матриця виграшів другого гравця буде дорівнювати $-A$.

Нижня ціна гри:

max (min (2, 4, 5, 1), min (3, 5, 6, 4), min (4, 1, 2, 7)) = max (1, 3, 1) = 3.

Верхня ціна гри:

min(max(2, 3, 4),max(4, 5, 1),max(5, 6, 2),max(1, 4, 7))=max(4, 5, 6, 7) = 4.

Гра називається **не повністю визначеною**.

Гра в мішаних стратегіях

$$\alpha \neq \beta$$
$$\alpha \leq v \leq \beta$$

Мішана стратегія гравця – це випадкова величина, значеннями якої є його чисті стратегії. Для того щоб задати мішану стратегію гравця, необхідно вказати ймовірності (частоти), з якими вибираються його чисті стратегії. При цьому передбачається, що гра повторюється **багаторазово**.

Гра в мішаних стратегіях

Для матричної гри $m \times n$ позначимо через $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ мішану стратегію гравця 1, де $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, … , $p_m \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$, через $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – мішану стратегію гравця 2, де $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, … , $q_n \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

Тут p_1, p_2, …, p_m – ймовірності використання гравцем 1 у мішаній стратегії своїх чистих стратегій a_1, a_2, …, a_m; q_1, q_2, …, q_n – ймовірності використання гравцем 2 у мішаній стратегії своїх чистих стратегій b_1, b_2, …, b_n.

Гра в мішаних стратегіях

Математичне очікування виграшу гравця 1:
$$M(P,Q)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i q_j \ .$$

Змішана стратегія, що гарантує даному гравцеві найбільший можливий середній виграш (або найменший можливий середній програш), називається його **оптимальною змішаною стратегією**, а стратегії, з яких складається оптимальна змішана стратегія, визначаються як **вигідні стратегії**.

Поняття сідлової точки

Нехай P^* – мішана стратегія гравця 1, Q^* –мішана стратегія гравця 2.

Ситуацію (P^*, Q^*), при якій

$$M(P, Q^*) \le M(P^*, Q^*) \le M(P^*, Q),$$

називають **сідловою точкою** мішаного розширення гри, а математичне очікування виграшу

$$v = M(P^*, Q^*) - \textbf{ціною гри},$$

причому завжди $\alpha \le v \le \beta$.

Домінування стратегій

Якщо платіжна матриця така, що кожний елемент деякого рядка *i* **не менше** відповідного елемента рядка *k* та по меншій мірі один її елемент строго більше відповідного елемента рядка *k*, то кажуть, що стратегія a_k, гравця 1 **домінує** його стратегію a_i.

Якщо кожний елемент деякого стовпця *j* **не більше** відповідного елемента стовпця *r* та по меншій мірі один його елемент строго менше відповідного елемента стовпця *r*, то кажуть, що стратегія b_j гравця 2 **домінує** його стратегію b_r.

Приклад домінування стратегій

Платіжна матриця для двох гравців має вигляд

Стратегії гравця 2 / Стратегії гравця 1	1	2	3	4	5
1	3	4	-8	0	5
2	4	3	1	2	0
3	5	4	-8	0	5
4	4	3	0	0	-1
5	-2	3	0	2	0
6	0	0	1	1	0

Результуюча матриця має вигляд

Стратегії гравця 2 / Стратегії гравця 1	3	5
2	1	0
3	-8	5

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Припускаємо, що v > 0.

Для цього достатньо збільшити усі елементи вихідної матриці на одне й те ж число $d > \max_i \min_j |a_{ij}|$, де $a_{ij} \geq 0$. При такій перебудові матриці оптимальні стратегії гравців **не змінюються**.

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Поведінка гравця 1 описується моделлю ЛП:

$$v \to \min,$$

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{21} + \ldots + p_m a_{m1} \geq v, \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} + \ldots + p_m a_{m2} \geq v, \\ \ldots, \\ p_1 a_{1n} + p_2 a_{2n} + \ldots + p_m a_{mn} \geq v, \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1, \end{cases}$$

$$p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, .., m.$$

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Або, позначив $x_i = p_i / v$, маємо

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_m \to \min,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \ldots + a_{m1}x_m \ge 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{m2}x_m \ge 1, \\ \ldots, \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \ldots + a_{mn}x_m \ge 1, \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_i \ge 0, i = 1, 2, .., m,$$

Причому $v = 1/(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)$.

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Поведінці гравця 2 відповідає двоїста задача:

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \ldots, \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1, \end{cases} \qquad (2)$$

$$y_j \ge 0, \quad j = 1, 2, .., n,$$

де $y_j = q_j / v$.

Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування

Задача (1) **завжди має розв'язок**. Отримав її оптимальний розв'язок $x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*$, можна знайти ціну гри $v^* = 1/\left(x_1^* + x_2^* + \ldots + x_m^*\right)$, оптимальні значення $p_1^*, p_2^*, \dots, p_m^*$ та, відповідно, оптимальну стратегію гравця 1. Якщо вихідна матриця збільшувалась на *d*, то для отримання ціни початкової гри v^* необхідно зменшити на *d*.

Справедливо й зворотне положення: будь-яку задачу лінійного програмування можна звести до розв'язання відповідної гри двох осіб з нульовою сумою.

Матрична гра двох осіб з ненульвою постійною сумою

Скінчена гра, у якій сума виграшів обох гравців не дорівнює нулю й постійна для всіх сполучень їх чистих стратегій, називається матричною грою двох осіб **з ненульовою постійною сумою**.

Нехай $\{a_{ij}\}_{m\times n}$ – матриця виграшів гравця 1 і $\{b_{ij}\}_{m\times n}$ – матриця виграшів гравця 2. Причому $a_{ij}+b_{ij}=c$ для всіх $i=1,2,\ldots,m$, $j=1,2,\ldots,n$.

Зведення матричної гри двох осіб з ненульвою постійною сумою

1) Кожному гравцеві виплачується сума $c/2$.

2) Вирішується гра з нульовою сумою з матрицею виграшів $\{a'_{ij}\}_{m\times n}$ гравця 1, де $a'_{ij} = a_{ij} - c/2$.

Дійсно, у грі з перетвореною у такий спосіб матрицею виграшів гравець 2 одержує суму $c/2 - a_{ij}$ для всіх $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$, тобто нова гра є грою з нульовою сумою. При цьому кожний гравець нічого не втрачає від того, що кожний з них у грі одержує на $c/2$ менше, оскільки по $c/2$ вони одержали перед грою.

Список літератури

Основна:

1. **Зайченко Ю. П.** Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІПОЛ, 2000.
2. **Таха Х.** Введение в исследование операций / Х. Таха. – М. : Вильямс, 2001.
3. **Ульянченко О. В.** Дослідження операцій в економіці / О. В. Ульянченко. – Х. : Гриф, 2003.

Додаткова:

1. **Вітлінський В. В.** Математичне програмування / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – К., 2001.
2. **Кузнецов А. В.** Математическое программирование / А. В. Кузнецов и др. – М.: Высшая школа, 1994.