# ОБЪЕМ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

Объем – величина, аналогичная площади и сопоставляющая фигурам в пространстве неотрицательные действительные числа.

Для объемов пространственных фигур справедливы свойства, аналогичные свойствам площадей плоских фигур, а именно:

1. Равные фигуры имеют равные объемы.

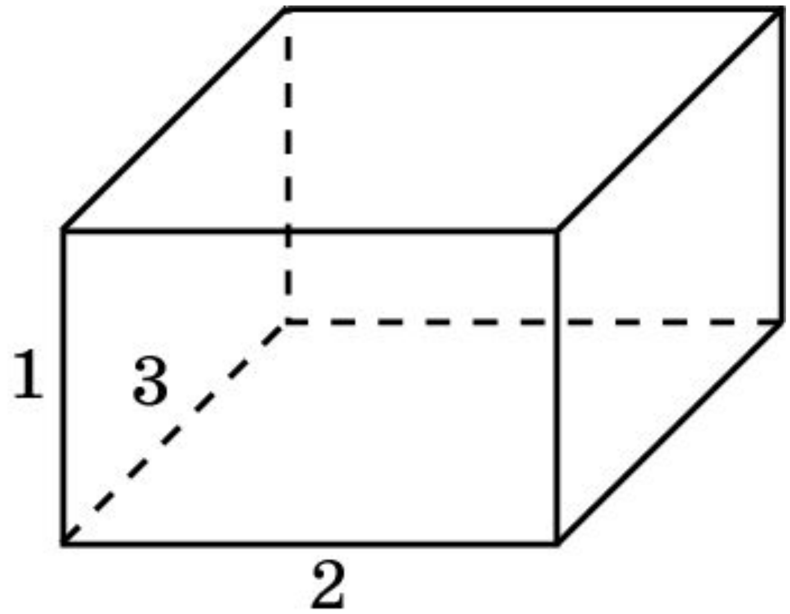
2. Если фигура $\Phi$ составлена из двух неперекрывающихся фигур $\Phi_1$ и $\Phi_2$, то объем фигуры $\Phi$ равен сумме объемов фигур $\Phi_1$ и $\Phi_2$, т.е. $V(\Phi)=V(\Phi_1)+V(\Phi_2)$.

3. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений, т. е. имеет место формула $V = a \cdot b \cdot c$, где $a$, $b$, $c$ – ребра параллелепипеда.

Две фигуры, имеющие равные объемы, называются равновеликими.

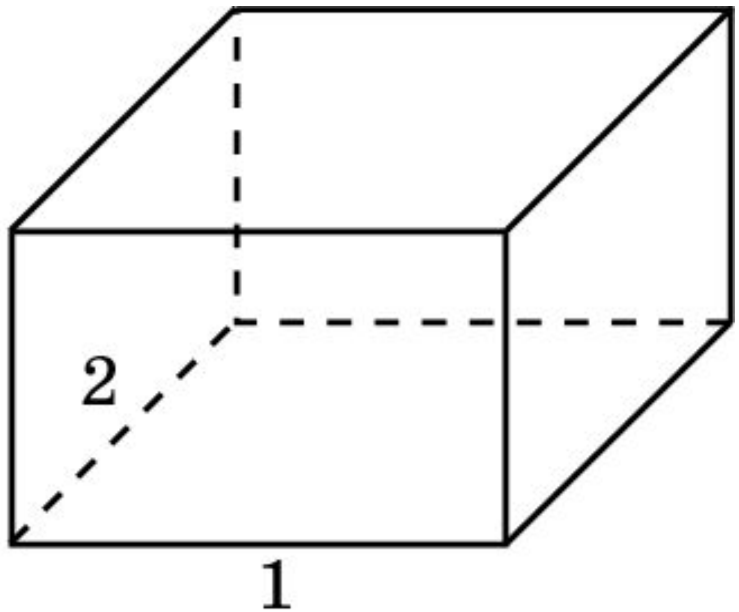
## Упражнение 1

Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



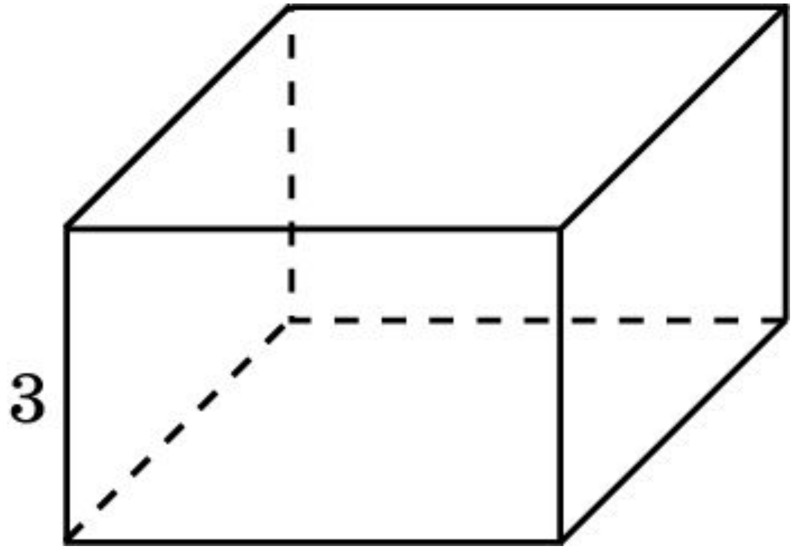
# Упражнение 2

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Объем параллелепипеда равен 3. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



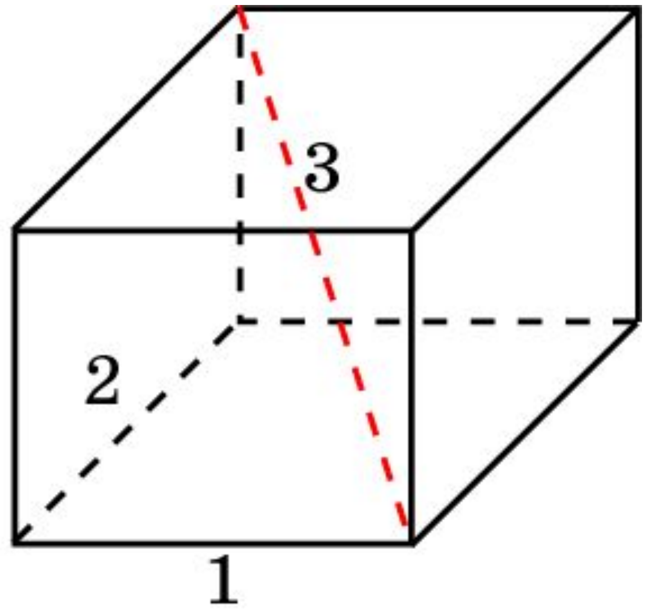
# Упражнение 3

Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 2. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 3. Найдите объем параллелепипеда.



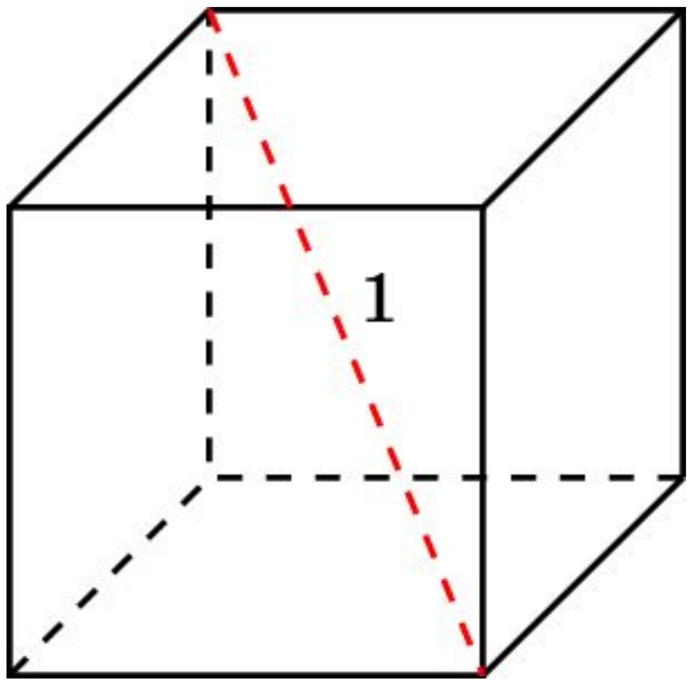
# Упражнение 4

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Диагональ параллелепипеда равна 3. Найдите объем параллелепипеда.



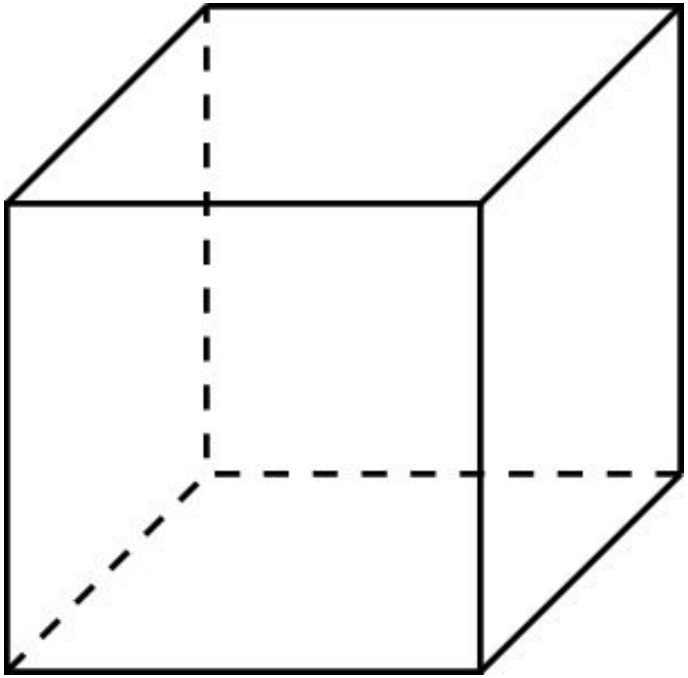
# Упражнение 5

Диагональ куба равна 1. Найдите его объем.



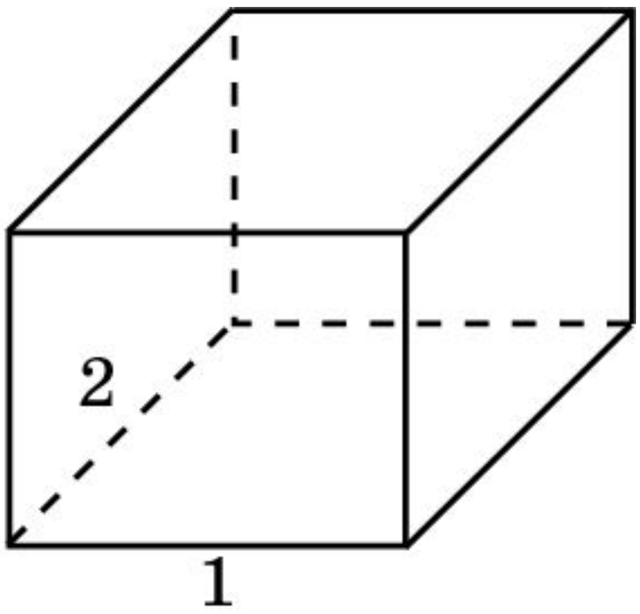
# Упражнение 6

Площадь поверхности куба равна 1. Найдите его объем.



## Упражнение 7

Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 10. Найдите объем параллелепипеда.



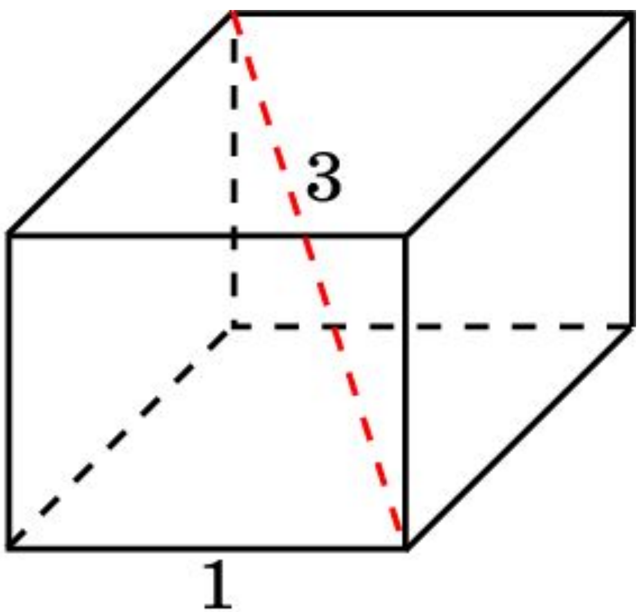

Решение. Пусть третье ребро параллелепипеда равно $x$. Тогда площадь поверхности будет равна $4 + 6x$. Следовательно, $x = 1$.

Объем параллелепипеда будет равен 2.

Ответ: 2.

# Упражнение 8

Ребро прямоугольного параллелепипеда равно 1. Диагональ равна 3. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите объем параллелепипеда.




**Решение.** Пусть второе ребро параллелепипеда равно $x$. Тогда третье ребро будет равно $\sqrt{8-x^2}$. Площадь поверхности будет равна

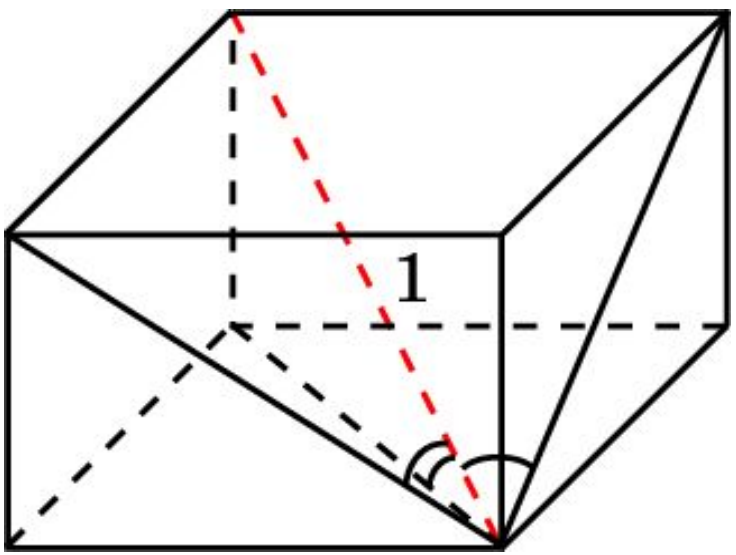
$$2x + 2\sqrt{8-x^2} + 2x\sqrt{8-x^2}.$$

Приравнивая это выражение к 16, получим $x = 2$. Третье ребро будет равно 2 и, следовательно, искомый объем равен 4.

Ответ: 4.

# Упражнение 9

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 1 и образует углы 30º, 30º и 45º с плоскостями граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.



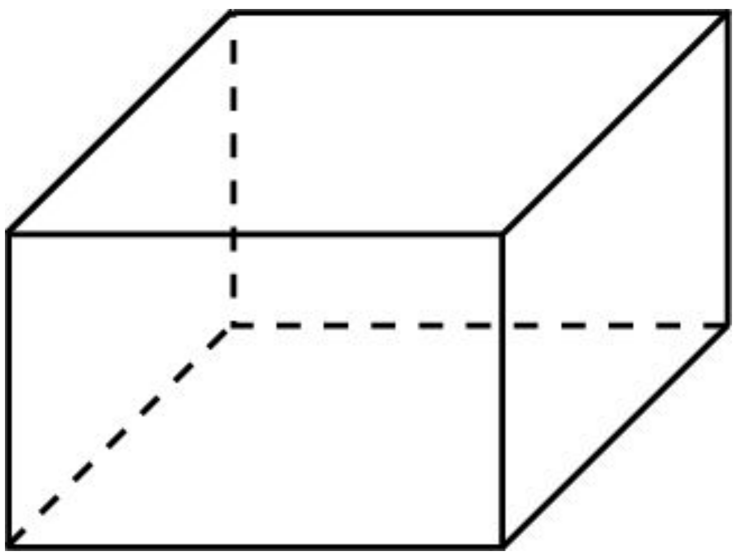

Решение. Ребра параллелепипеда равны $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Следовательно, объем равен $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{8}$.

# Упражнение 10

Площади трех граней параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите объем параллелепипеда.



**Решение.** Пусть ребра параллелепипеда равны $x$, $y$, $z$. Тогда $xy = 1$, $xz = 2$, $yz = 3$. Решая эти уравнения, находим

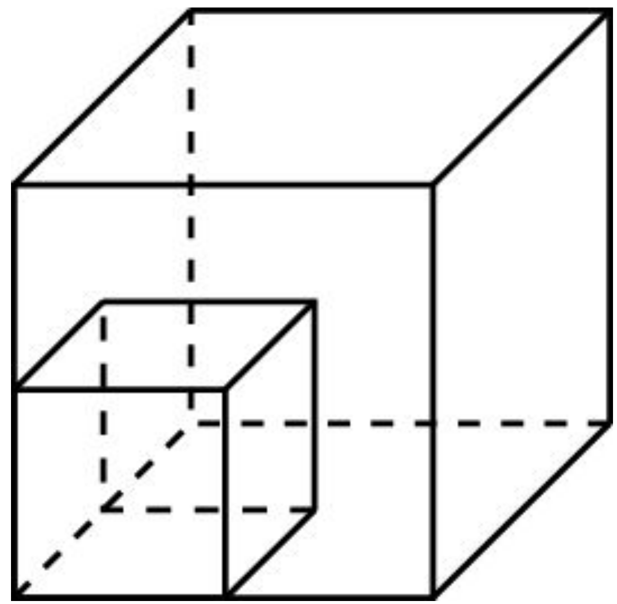
$$x = \frac{\sqrt{6}}{3},\ y = \frac{\sqrt{6}}{2},\ z = \sqrt{6}.$$

Объем параллелепипеда равен $\sqrt{6}$.

**Ответ:** $\sqrt{6}$.

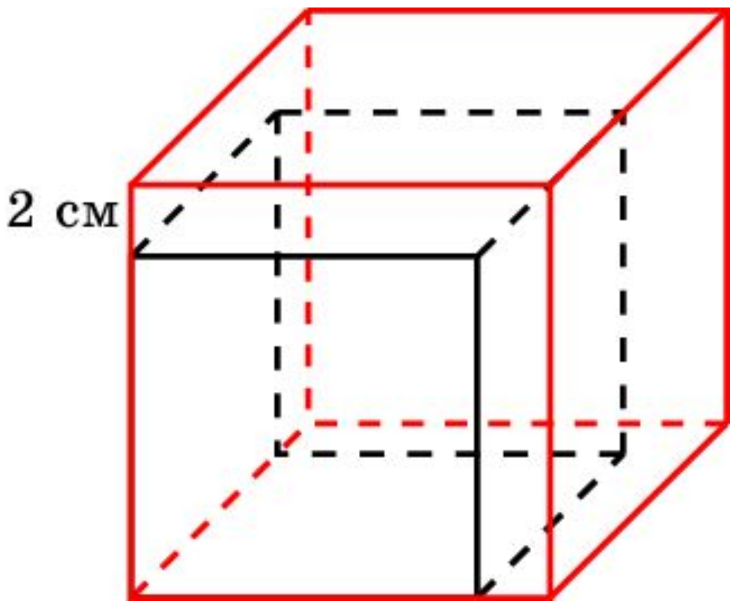
# Упражнение 11

Как относятся объемы двух кубов: данного и его модели, уменьшенной в масштабе: а) 1 : 2; б) 1 : 3; в) 1 : $n$?



# Упражнение 12

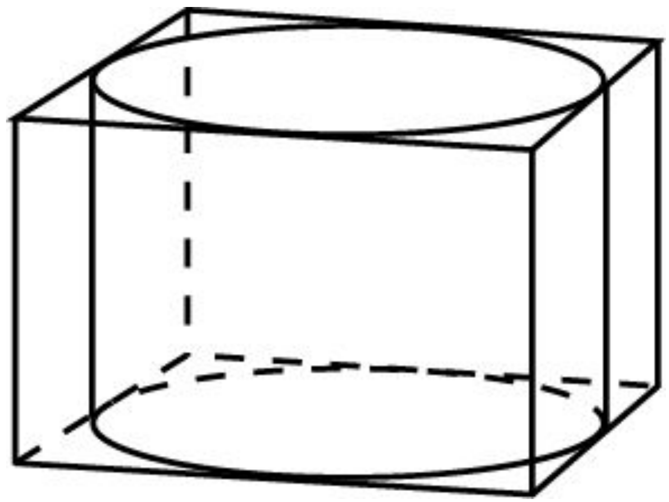
Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см$^3$. Определите ребро куба.




Ответ: 3 см.

## Упражнение 13

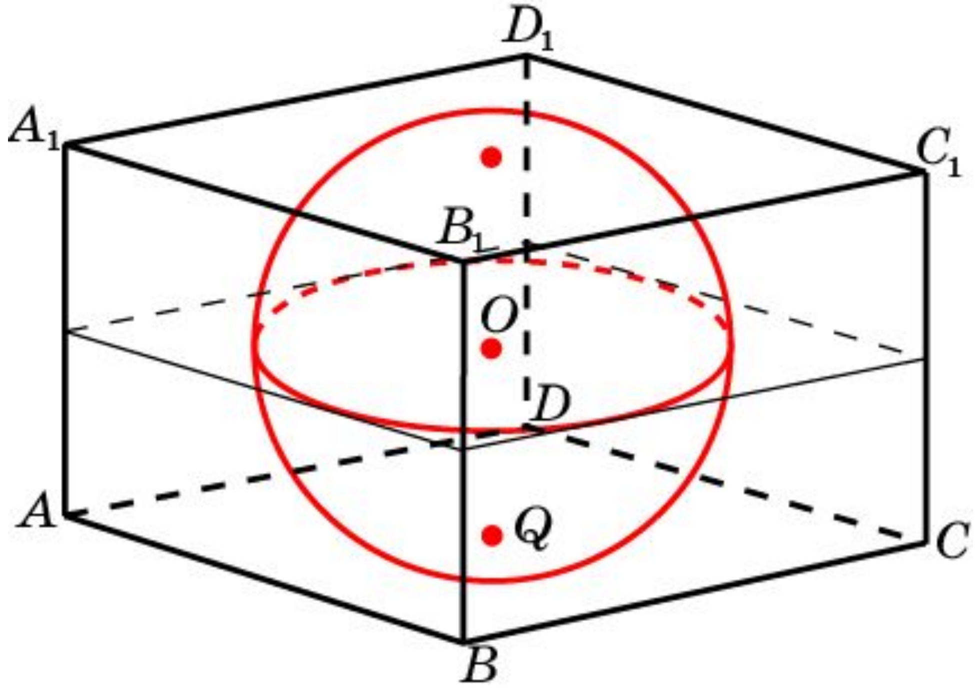
Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



Решение: Ребра параллелепипеда равны 2, 2 и 1. Его объем равен 4.

# Упражнение 14

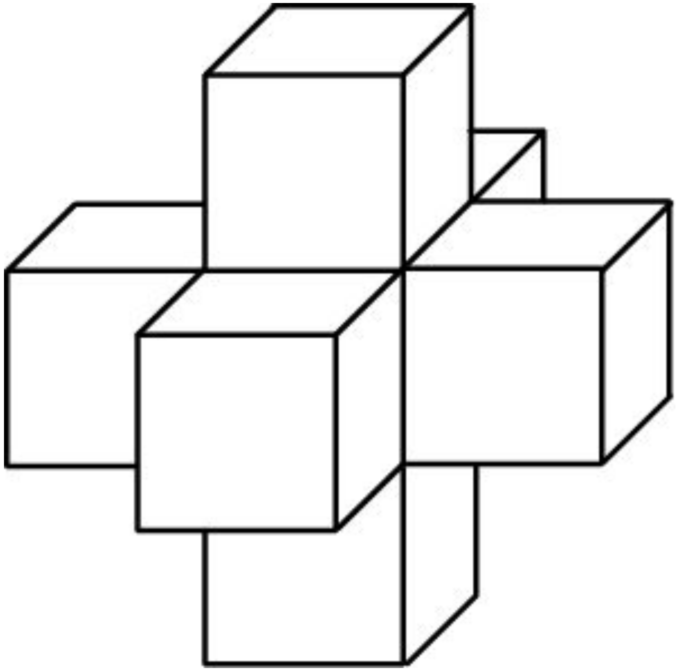
Параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его объем.




Решение: Ребра параллелепипеда равны 2. Его объем равен 8.

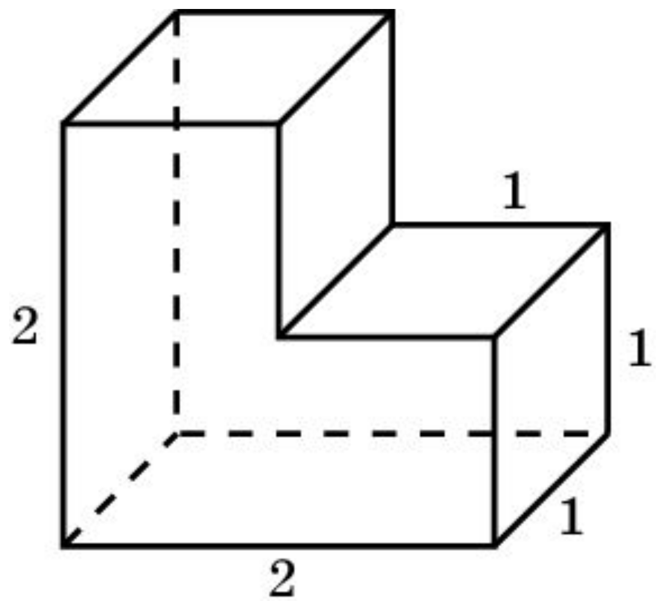
# Упражнение 15

Чему равен объем пространственного креста, если ребра образующих его кубов равны единице?



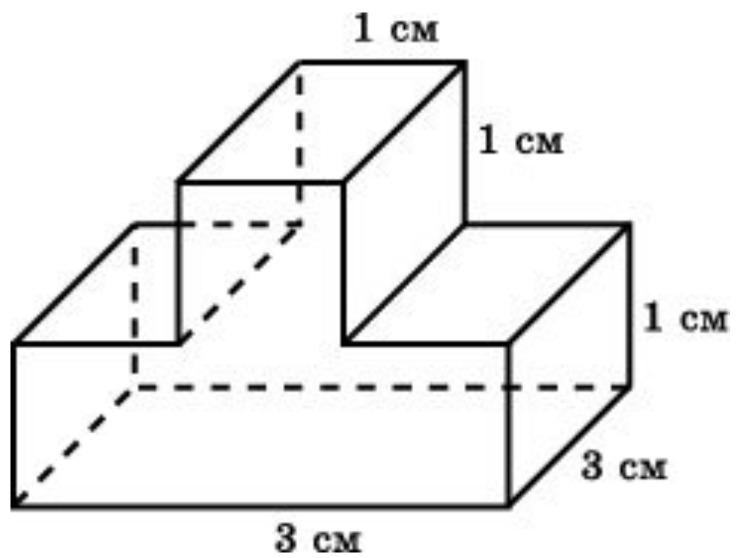
# Упражнение 16

Чему равен объем фигуры, изображенной на рисунке?



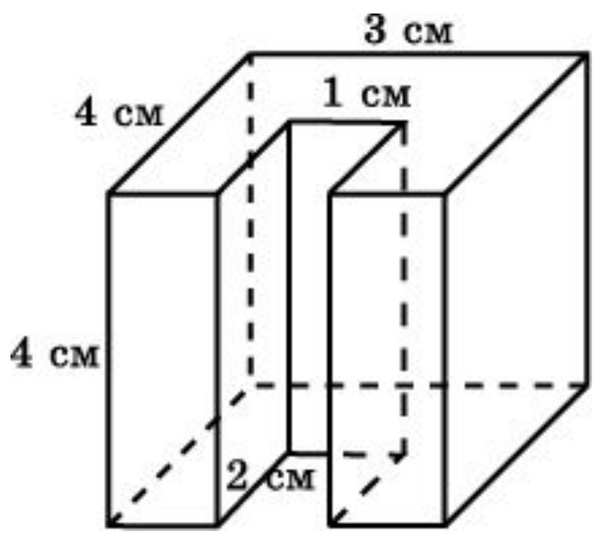
# Упражнение 17

Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).

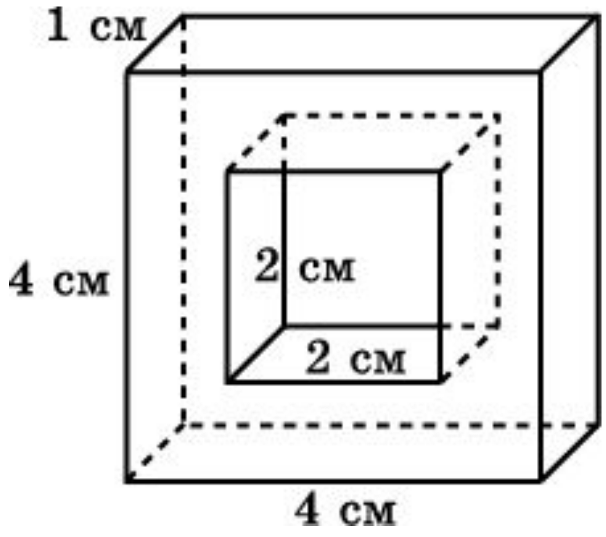


# Упражнение 18

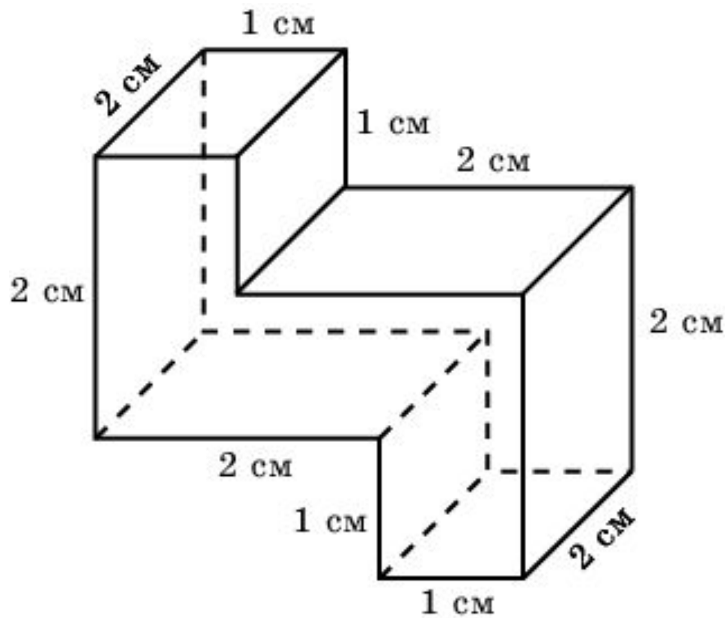
Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



Найдите объем детали, изображенной на рисунке (все углы – прямые).



## Упражнение 21

Какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, сумма длин ребер которого, выходящих из одной вершины, равна 1?

Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда $a$, $b$, $c$. Воспользуемся тем, что среднее геометрическое трех положительных чисел не превосходит их среднего арифметического, т.е $\sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$.

Из этого неравенства следует, что наибольший объем равен $\frac{1}{27}$ в случае, если параллелепипед – куб со стороной $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{27}$.

# Упражнение 22*

Какую наименьшую площадь поверхности может иметь прямоугольный параллелепипед, объем которого равен 1?

Решение. Обозначим длины ребер, выходящих из одной вершины параллелепипеда $a$, $b$, $c$. Площадь поверхности будет равна $2ab + 2ac + 2bc$. Воспользуемся тем, что среднее арифметическое трех положительных чисел больше или равно их среднего геометрического.

Имеем $\dfrac{ab+ac+bc}{3} \geq \sqrt[3]{abacbc} = 1.$ Из этого неравенства следует, что наименьшая площадь поверхности равна 6 в случае, если прямоугольный параллелепипед – куб со стороной 1.

Ответ: 6.