

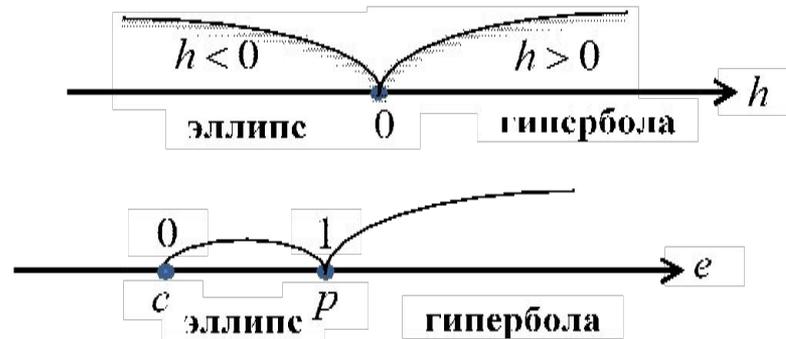
Небесная МЕХАНИКА

5 лекция

Отдельные типы кеплеровского движения

Круговое и эллиптическое движения – финитные, они происходят в ограниченной части плоскости, полная энергия отрицательна – кинетической энергии не хватает для преодоления гравитационного действия притягивающего центра.

Параболическое и гиперболическое движения – инфинитные, полная энергия не меньше 0, и движущаяся точка преодолевает силу тяготения и уходит в бесконечность.



$$V_c = \sqrt{\frac{gR^2}{R+H}}, \quad V_P = \sqrt{\frac{2gR^2}{R+H}}, \quad (2.37)$$

H=0

$$V_1 = \sqrt{gR}, \quad V_2 = \sqrt{2gR}. \quad (2.38)$$

Типы кеплеровского движения

Тип движения	e	c	λ	h	V, r	$\delta=(r, V)$
Круговой	0	$\neq 0$	0	$-\mu/r$	$V^2 = \mu/r$	90°
Эллиптический	$0 < e < 1$	-“-	$< \mu$	$-\mu/a$	$V^2 < 2\mu/r$	$0 < \delta \leq 180^\circ$
Параболический	1	-“-	μ	0	$V^2 = 2\mu/r$	-“-
Гиперболический	> 1	-“-	$> \mu$	μ/a	$V^2 > 2\mu/r$	-“-
Прямолинейный	1	0	произв.	произв.	произв.	0° или 180°

Отдельные типы кеплеровского движения

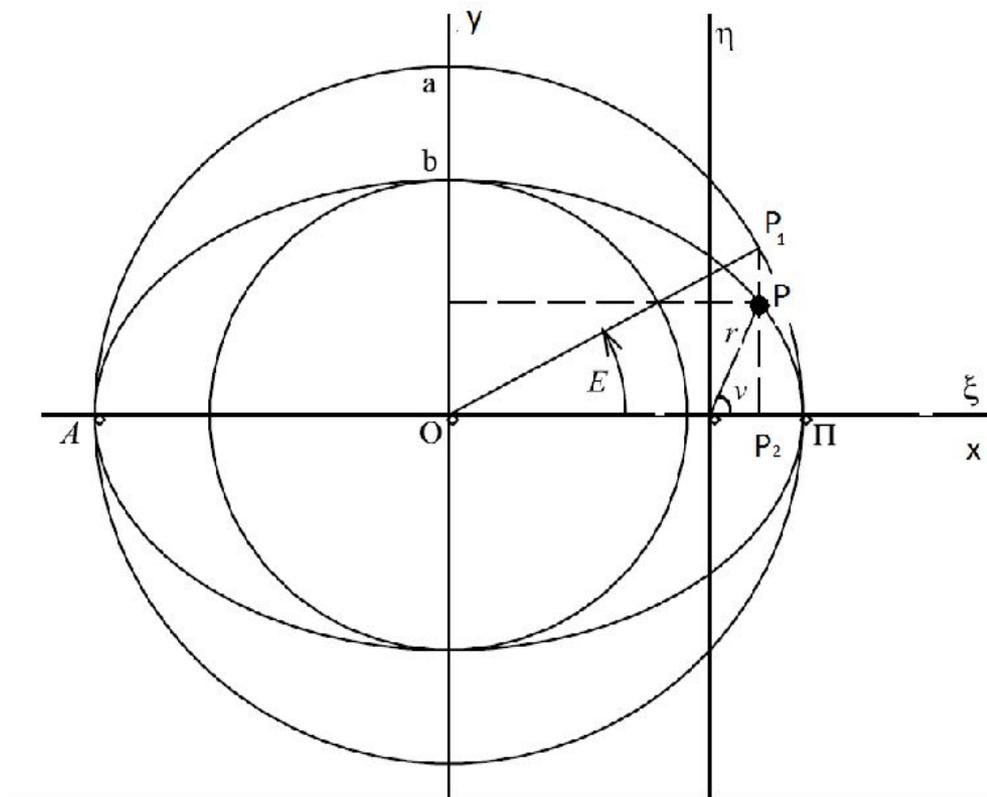
основные – эллиптическое и гиперболическое,
 предельные – круговое и параболическое,
 вырожденное – прямолинейное.

Эллиптическое движение.

$$c \neq 0, 0 < \lambda < \mu, h < 0, p \neq 0, 0 < e < 1$$

$$\int_0^v r^2 dv = c(t - \tau). \quad (2.39)$$

E- эксцентрическая аномалия



$$a \cos E = ae + r \cos v, \quad (2.40)$$

$$\frac{y_c}{y_e} = \frac{a}{b}$$

$$r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin E$$

$$\xi = r \cos v = a(\cos E - e), \quad (2.41)$$

$$\eta = r \sin v = a\sqrt{1-e^2} \sin E,$$

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (2.42)$$

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin v = \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{1 - e \cos E}, \quad (2.43)$$

$$\operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad (2.44)$$

$$dv = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos E} dE. \quad (2.45)$$

$$\int_0^{\pi} (1 - e \cos E) dE = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - \tau) \quad (2.46)$$

уравнение Кеплера

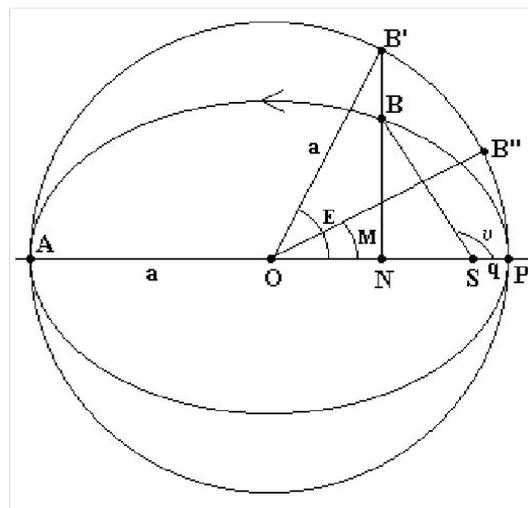
$$E - e \sin E = n(t - \tau). \quad (2.47)$$

$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}$ - средняя угловая скорость движения по эллиптической орбите или среднее движение

$$M = n(t - \tau), \quad (3.48)$$

M – средняя аномалия.

Если представить себе точку, движущуюся равномерно по окружности радиуса a и проходящую через точки перигея и апогея одновременно с материальной точкой m , то ее положение и будет определяться углом M , который отсчитывается от направления на перигей и имеет вершину в центре эллипса.



$$K = e \kappa \Lambda, K = \Lambda f. \quad (2.49)$$

$$h = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{c^2} = \mu \frac{e^2 - 1}{p} = -\frac{\mu}{a}, \quad p = \frac{c^2}{\mu}, \quad e = \frac{\lambda}{\mu}. \quad (2.50)$$

$$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0 + m)}}. \quad (2.51)$$

третий закон Кеплера

$$\frac{T^2}{a^3} (m_0 + m) = \frac{4\pi^2}{G} = const. \quad (2.52)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (\cos E - e) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin E \right] \quad (2.53)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = \frac{na^2}{r} \left[-\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot \sin E + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E \right]. \quad (2.54)$$

Модуль скорости в эллиптическом движении определяется из закона сохранения энергии с учетом того, что постоянная $h = -\mu/a$,

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (2.55)$$

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E}. \quad (2.56)$$

Для эллиптического движения прежде всего целесообразно заменить параметр орбиты большой полуосью, но полезными оказываются еще некоторые такие замены. Перигентное расстояние заменяется на *долготу перигента*

$$\pi = \varOmega + \omega, \quad (2.57)$$

момент прохождения через перигент τ – на значение средней аномалии M_0 в момент времени t_0 (*средняя аномалия в начальную эпоху*), а сама величина M_0 , в свою очередь, заменяется на *среднюю долготу в начальную эпоху*

$$\varpi = \pi + M_0 = \varOmega + \omega + M_0. \quad (2.58)$$

$\Omega, \pi, i, e, a, \varepsilon$ - эллиптические кеплеровские элементы

Элементы орбит больших планет

Планета	a	T	S	n	i	e	Ω	π	M_0
Меркурий	0.387	0.240	116	4.09°	7.00°	0.206	48°	77°	252°
Венера	0.723	0.615	584	1.60	3.40	0.007	77	131	182
Земля	1.000	1.000		0.99	0.00	0.017		103	100
Марс	1.524	1.881	780	0.524	1.85	0.093	49	336	335
Юпитер	5.203	11.86	399	0.083	1.30	0.048	100	14	32
Сатурн	9.555	29.54	378	0.034	2.48	0.056	113	93	50
Уран	19.218	84.25	370	0.012	0.76	0.047	74	173	314
Нептун	30.110	165.2	368	0.006	1.77	0.009	132	48	304
Плутон	39.53	250.1	367	0.004	17.50	0.250	110	223	130

a – большая полуось, а. е.; T – сидерический период, годы; S – синодический период, сутки; n – среднее движение, за сутки в градусах; e – эксцентриситет; i – наклонение к эклиптике; Ω – долгота узла; π – долгота перигелия; M_0 – средняя аномалия в эпоху 2000 январь 1.5

Элементы орбит некоторых малых планет

Планета	a	T	S	N	I	e	Ω	π	M_0
1 Церера	2.78	4.60	467	0.214	10.6°	0.077	81°	152°	8°
2 Паллада	2.77	4.61	467	0.214	34.8	0.235	173	123	355
3 Юнопа	2.67	4.36	474	0.226	13.0	0.257	171	57	243
4 Веста	2.36	3.63	504	0.272	7.1	0.090	104	254	341
5 Астрея	2.57	4.13	482	0.239	5.4	0.192	142	137	43
6 Геба	2.42	3.78	497	0.261	14.8	0.202	139	17	50
153 Гильда	3.98	7.95	419	0.124	7.8	0.143	229	271	14
433 Эрос	1.46	1.76	846	0.560	10.8	0.223	304	22	57
944	5.84	14.08	393	0.070	42.5	0.658	22	79	223
Гидальго	1.08	1.12	3409	0.881	22.9	0.827	88	119	105
1566 Икар	43.19	283.82	366	0.003	17.2	0.051	273	10	87
20000 Варуна	39.43	247.61	367	0.004	19.8	0.241	71	11	262
28978 Иксион	33.52	194.03	367	0.005	13.8	0.382	132	55	48
1998 BU									

a – большая полуось, а. е.; T – сидерический период, годы; S – синодический период, сутки; n – среднее движение, за сутки в градусах; e – эксцентриситет; i – наклонение к эклиптике; Ω – долгота узла; π – долгота перигелия; M_0 – средняя аномалия в эпоху 2000 январь 1.5

Гиперболическое движение.

$$c \neq 0, \lambda > \mu, h > 0, p \neq 0, e > 1$$

$$\sin E \rightarrow shH, \cos E \rightarrow chH, \operatorname{tg} E \rightarrow thH.$$

Связь между истинной аномалией и переменными E и H :

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \qquad \operatorname{tg} \frac{v}{2} = th \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} th \frac{H}{2}. \quad (2.59)$$

Уравнение Кеплера и его гиперболический аналог:

$$E - e \sin E = n(t - \tau) \qquad e \cdot chH - H = n(t - \tau). \quad (2.60)$$

Орбитальные координаты:

$$\begin{aligned} \xi &= a(\cos E - e) & \xi &= a(e - chH) \\ \eta &= a\sqrt{1-e^2} \sin E & \eta &= a\sqrt{e^2-1} shH \\ r &= a(1 - e \cos E) & r &= a(echH - 1). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Скорость движения:

$$V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{1 + e \cos E}{1 - e \cos E} \qquad V^2 = \mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu}{a} \cdot \frac{e \cdot chH + 1}{e \cdot chH - 1}. \quad (2.62)$$

когда точка, двигаясь по гиперболе, удаляется на бесконечность, ее скорость стремится к отличной от 0 величине:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{a}} \quad (2.63)$$

– это так называемый *гиперболический избыток скорости*.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (e - chH) + \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sqrt{e^2 - 1} \cdot shH \right]. \quad (2.64)$$

Гиперболическое движение имеет место тогда, когда метеорное тело входит в сферу действия Земли или другой планеты с некоторой относительной скоростью; при полете космического аппарата к другой планете на припланетных участках его траектории; при более или менее тесном сближении звезд.

Круговое движение.

$$c \neq 0, \lambda = 0, h < 0, p \neq 0, e = 0$$

движение задается четырьмя элементами орбиты, в качестве которых можно взять радиус орбиты r , долготу узла Ω , наклонение орбиты i и момент прохождения точки через восходящий узел τ (или среднюю аномалию M_0 в начальную эпоху t_0).

$$\begin{aligned}x &= a(\cos \Omega \cos M - \sin \Omega \sin M \cos i), \\y &= a(\sin \Omega \cos M - \cos \Omega \sin M \cos i), \\z &= a \sin M \sin i,\end{aligned}\tag{2.65}$$

$$\begin{aligned}\xi &= a \cos M, & \zeta &= -an \sin M, \\ \eta &= a \sin M, & \varpi &= an \cos M,\end{aligned}\tag{2.66}$$

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0, \quad n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{\frac{3}{2}}}\tag{2.67}$$

Из последнего равенства вытекает третий закон Кеплера для кругового движения и выражение для линейной скорости движения:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r^{\frac{3}{2}}, \quad V = \sqrt{\frac{\mu}{r}}\tag{2.68}$$

Параболическое движение.

$$c \neq 0, \lambda = \mu, h = 0, p \neq 0, e = 1$$

Закон движения

$$\int_0^v \frac{dv}{(1 + \cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.69)$$

Перейдем от $\cos v$ к $\operatorname{tg}(v/2)$ по известной формуле

$$\cos v = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}, \quad (2.70)$$

$$\int_0^v \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}\right) \sec^2 \frac{v}{2} dv = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}} (t - \tau). \quad (2.71)$$

Сделав замену $\sigma = \operatorname{tg}(v/2)$, а также заменив параметр орбиты p на $2q$, где q – расстояние от вершины параболы (перигентра орбиты) до ее фокуса, будем иметь после интегрирования:

$$\text{Уравнение Баркера} \quad \sigma^3 + 3\sigma - 3n(t - \tau) = 0, \quad (2.72)$$

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{2} q^{-3/2}}. \quad (2.73)$$

$$r = q(1 + \sigma^2),$$

$$\sin v = \frac{2tg \frac{v}{2}}{1 + tg^2 \frac{v}{2}},$$

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos v = q(1 - \sigma^2), \\ \eta &= r \sin v = 2q\sigma. \end{aligned} \tag{2.74}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \left[\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \cdot (1 - \sigma^2) + 2 \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{pmatrix} \cdot \sigma \right]. \tag{2.75}$$

$$V^2 = \frac{2\mu}{r}, \tag{2.76}$$

Параболическое движение отделяет эллиптическое движение от гиперболического и из-за наличия возмущений также в действительности не имеет места. Но оно используется при рассмотрении эллиптического и гиперболического движений при значениях эксцентриситета достаточно близких к 1, в частности, при изучении движения комет

Прямолинейное движение.

$$c = 0, \lambda = \mu, h \neq 0, p = 0, \varepsilon = 1$$

векторное уравнение траектории $\vec{r}_0 \times \vec{r} = 0$, а скалярные уравнения

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}. \quad (2.77)$$

Закон движения по этой траектории можно получить, проинтегрировав интеграл энергии, ибо в данном случае $V^2 = j^2$. Интегрирование упростится, если сделать такую замену переменных:

$$\sqrt{|h|} dt = \sqrt{\frac{\mu}{a}} dt = r d\eta, \quad (2.78)$$

$$a = \frac{\mu}{|h|},$$

$$\eta = \int \frac{dr}{\sqrt{2ar + \text{sign}(h) \cdot r^2}}. \quad (2.79)$$

$$a(1 - \cos \eta), \quad h < 0,$$

$$r = \frac{a}{2} \eta^2, \quad h = 0, \quad (2.80)$$

$$a(ch\eta - 1), \quad h > 0.$$

$$\eta - \sin \eta, \quad h < 0,$$

$$\frac{\eta^3}{6} = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} (t - t_0), \quad h = 0, \quad (2.81)$$

$$sh\eta - \eta \quad h > 0.$$

Видим, что переменная η является предельным значением эксцентрической аномалии E и ее гиперболического аналога H , если сделать предельный переход $e \rightarrow 1$ при постоянном значении величины a . При этом первое и третье соотношения в (2.81) – это предельные формы уравнения Кеплера и его гиперболического аналога. Постоянная a является предельным значением большой полуоси эллипса или вещественной полуоси гиперболы и при $h < 0$ равна максимально возможному значению r .

Решение может описывать не только движение одной материальной точки в ньютоновском поле тяготения, но и описывать эволюцию сферически-симметричного пылевого облака. Такую же