Семинар 8. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производная функции, заданной неявно

Производная сложной функции

<u>Теорема</u>

Если $y = f(z), z = \varphi(x)$ дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ существует и равна производной данной функции y по промежуточному аргументу z, умноженной на производную самого промежуточного аргумента z по независимой переменной x. $y'_x = y'_z \cdot z'_x$

Производная обратной функции

Пусть *y=f(x)* - дифференцируемая функция от аргумента x в некотором интервале *(a,b)*. Рассмотрим $x = \varphi(y)$ где $f[\varphi(y)] \equiv y$ -обратная функция .

<u>Задача</u> Зная производную $y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ функции *y=f(x)* найти производную $x'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$ обратной функции $x = \varphi(y)$ предполагая, что обратная функция существует и непрерывна в соответствующем интервале.

<u>Теорема</u>

Для дифференцируемой функции с производной не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, то есть

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

Производная функции заданной неявно

Рассмотрим способы нахождения производных функций заданных неявно.

Пример. Найти производную функции *y(y>0),* определенную уравнением (уравнение эллипса) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Разрешая это уравнение относительно y и, выбирая знак плюс в силу начального условия получаем функцию в явном виде

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Однако в некоторых случаях уравнение элементарными средствами нельзя разрешить относительно y и приходится рассматривать y как неявную функцию от x.

Существует другой способ нахождения производной.

Предполагая, что в уравнение подставлено вместо y явное выражение получим тождество: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ причем y функция от x. Очевидно, если две функции тождественно равны друг другу, то равны и их производные. Поэтому, взяв производные от левой и правой частей тождества и применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$

Примеры с решениями

1. Найти производные сложных функций

$1)\, y=(2x^3+5)^4$

Решение. Обозначим $2x^3+5=u \Rightarrow y=u^4$ По правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'=(u^4)'_u\cdot(2x^3+5)'_x=4u^3(6x^2)=24x^2(2x^3+5)^3$

$2)\, y=tg\ln x$

Решение $y'=(tg\ln x)'=\dfrac{1}{\cos^2\ln x}\cdot\dfrac{1}{x}$

$3)\, y=\ln tg\dfrac{x}{2}$

Решение $y'=(\ln tg\dfrac{x}{2})'=\dfrac{1}{tg(x/2)}(tg(x/2))'=\dfrac{1}{tg(x/2)\cos^2(x/2)}(x/2)'=\dfrac{1}{2\sin(x/2)\cos(x/2)}=\dfrac{1}{\sin x}$

$4)\, y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

Решение $y'=(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}})\quad \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$5)\, y=e^x arctgx-\ln\sqrt{1+e^{2x}}$

Решение

$$y'=(e^x arctgx-\ln\sqrt{1+e^{2x}})'=(e^x arctgx-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})'=e^x arctgx+e^x\frac{1}{1+x^2}-$$

$$\frac{1}{2}\frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}=e^x(arctgx+\frac{1}{1+x^2}+\frac{e^x}{1+e^{2x}})$$

$$6)\, y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}$$

Решение. Преобразуем функцию $y=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\frac{1+\sin x}{\cos x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln(1+\sin x)-\ln\cos x$

$$y'=\frac{\cos x\cos^2 x-\sin x\cdot 2\cos x(-\sin x)}{\cos^4 x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}-\frac{-\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x+2\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{\cos^2 x+\sin^2 x+\sin x}{\cos x(1+\sin x)}=$$

$$\frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}+\frac{1}{\cos x}=\frac{2}{\cos^3 x}$$

2. Для функции $y=x^2-5x+3$ **найти** x'_y

Решение $x'_y=\frac{1}{y'_x}\Rightarrow x'_y=\frac{1}{2x+5}$

3. Найти производные для функций заданных неявно

$$1)\, x^3+y^3-3xy=0$$

Решение

$$(x^3+y^3-3xy)'=0\ \Rightarrow 3x^2+3y^2y'-3y-3xy'=0\Rightarrow y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

$$2)\, e^x+e^y-2^{xy}-1=0$$

Решение

$$(e^x+e^y-2^{xy}-1)'=0\Rightarrow e^x+e^y y'-2^{xy}\ln 2(y+xy')=0\Rightarrow$$

$$(e^y-x\cdot 2^{xy}\ln 2)y'=y\cdot 2^{xy}\ln 2-e^x\Rightarrow y'=\frac{y\cdot 2^{xy}\ln 2-e^x}{e^y-x\cdot 2^{xy}\ln 2}$$

$$3)\, x^y-y^x=0$$

Решение

$$x^y - y^x = 0 \Rightarrow x^y = y^x \Leftrightarrow y\ln x = x\ln y \Rightarrow (y\ln x)' = (x\ln y)' \Rightarrow y'\ln x + y/x = \ln y + (xy')/y \Rightarrow$$

$$(\ln x - x/y)y' = \ln y - y/x \Rightarrow y' = \frac{\ln y - y/x}{\ln x - x/y}$$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Продифференцировать функции

1. $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$ 2. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1}{1+x^2}}$ 3. $y = \sqrt{1 + tg(x + \dfrac{1}{x})}$ 4. $y = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\arcsin\sqrt{x^2 + 2x}}$

5. $y = \ln arctg\sqrt{1+x^2}$ 6. $y = \sqrt[3]{\ln\sin\dfrac{x+3}{4}}$ 7. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$ 8. $y = \ln\sin\sqrt[3]{arctge^{3x}}$

9. $y = th(\ln x)$ 10. $y = arctg\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

2. Найти производную обратной функции

1. $y = \dfrac{1-x^4}{1+x^4}$ ...*Выразить*.. $\dfrac{dx}{dy}$ ..*через..x; через..y* **2.** $x = y^3 - 4y + 1$.*Найти*.. $\dfrac{dx}{dy}$

3. Найти производные от функций *y*, заданных неявно

1. $y = 1 + xe^y$ **2.** $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$ **3.** $tg\dfrac{y}{2} = \sqrt{\dfrac{1-k}{1+k}}tg\dfrac{x}{2}$ **4.** $y = x + arctgy$