Векторная алгебра

§1. Определители 2 и 3 порядка

Пусть даны 4 числа: $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$

(элементы определителя).

Определителем второго порядка называется число, равное $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Обозначение:

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Схема вычисления определителя второго порядка

$$\begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \boxtimes & \boxtimes \\ \boxtimes & \boxtimes \end{vmatrix}$$

(произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали).

Пример. Вычислить $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. $= 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

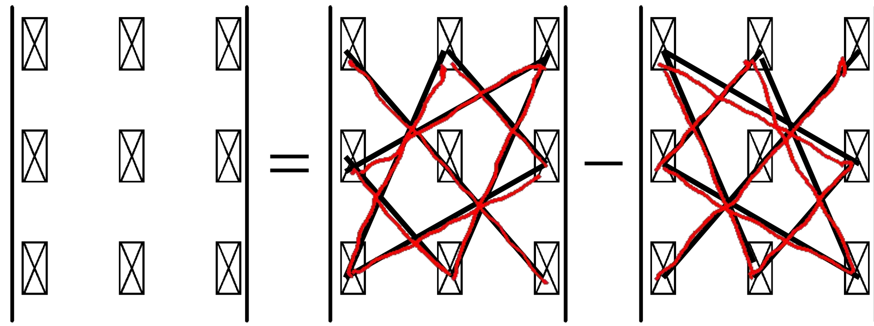
Определителем третьего порядка называется число, обозначаемое

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

и равное

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32}).$$

Схема вычисления определителя третьего порядка (правило треугольника)



Вычисление определителя третьего порядка методом разложения по первой строке:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить определитель двумя способами

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot(5\cdot 9 - 6\cdot 8) - 2(4\cdot 9 - 6\cdot 7) + 3(4\cdot 8 - 5\cdot 7) =$$

$$= \_\_ = 0$$

§2. Вектор. Линейные операции над векторами.

Вектор – множество направленных отрезков, имеющих общее направление и одинаковую длину.

Направленный отрезок – отрезок, у которого указаны начало и конец.

Обозначения: $\overline{a} = \overline{AB}$.

Длина вектора (модуль вектора) – длина соответствующего направленного отрезка, обозначают $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{a}\right|$.

Вектор, длина которого равна 0, называется **нулевым**, обозначают $\overline{o}$ (у такого вектора совпадают начальная и конечная точки).

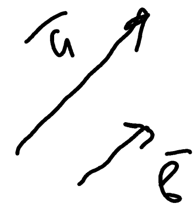
Вектор, длина которого равна 1, называется **единичным**, обозначают $\overline{e}$.

Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\overline{a}$, называется **ортом** вектора $\overline{a}$, обозначают

$$\overline{a}_0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}.$$

Вектор $\overline{BA}$ называется **противоположным** вектору $\overline{AB}$:

$$\overline{BA} = -\overline{AB}.$$



λ

$\bar{b} = 2\bar{a}$

$\bar{a} = 2\bar{b}$

Два вектора называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых, обозначают $\bar{a} \parallel \bar{b}$.

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $\bar{b} = \lambda\,\bar{a}$, причем при $\lambda > 0$ $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ (векторы сонаправлены), при $\lambda < 0$ $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ (векторы противоположно направлены).

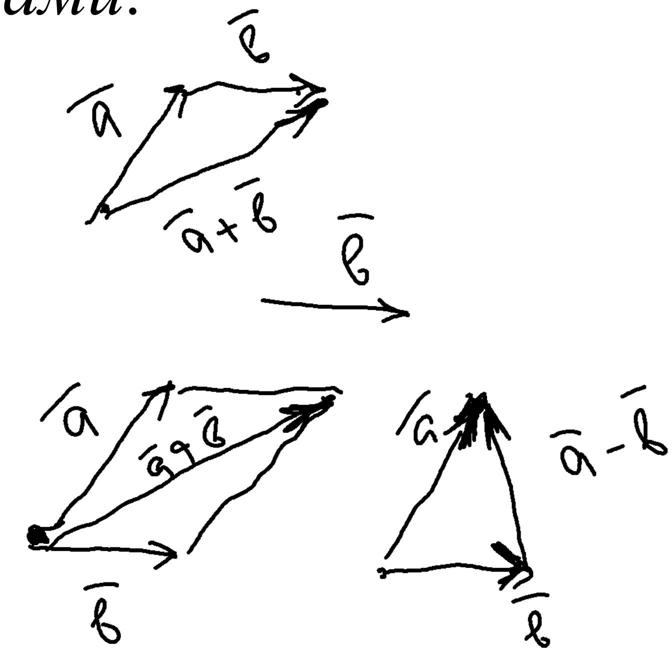
Два вектора **равны**, если они сонаправлены и имеют одинаковую длину: $\overline{a}=\overline{b} \Leftrightarrow \overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b},\ |\overline{a}|=|\overline{b}|.$

Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или параллельных плоскостях.

Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два вектора коллинеарны, то такие векторы будут компланарны.

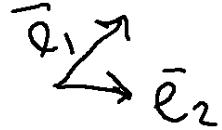
Линейные операции над векторами:

- сложение векторов;
- вычитание векторов;
- умножение вектора на число.



§3. Базис. Координаты вектора в базисе

Базис на плоскости – это упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}\right)$.

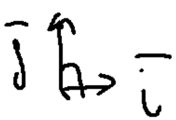


Если векторы ортогональны (перпендикулярны), то базис называется *ортогональным*.

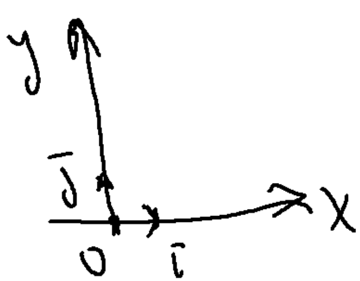
Если длины векторов равны единице, то базис называется *нормированным*.

Ортонормированный базис на плоскости обозначают

$\left(\overline{i}, \overline{j}\right)$.



$|\bar i| = |\bar j| = 1$



Пусть $\overline{a}$ - произвольный вектор на плоскости.

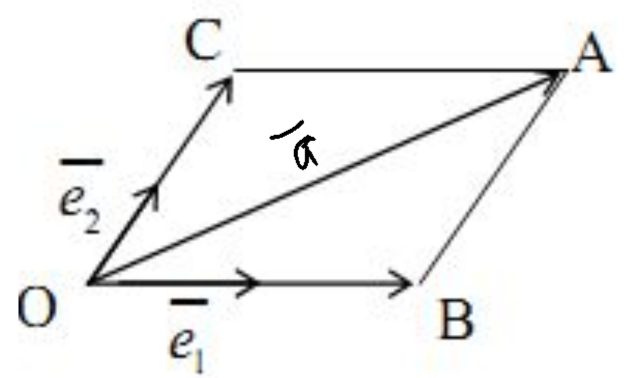
От произвольной точки O отложим векторы, равные

$\overline{e_1}, \overline{e_2}$ и $\overline{OA} = \overline{a}; \quad \overline{OB} \parallel \overline{e_1}; \quad \overline{OC} \parallel \overline{e_2}.$

Следовательно существуют числа a_1, a_2 :

$$\overline{OB} = a_1 \overline{e_1}, \overline{OC} = a_2 \overline{e_2}.$$

Тогда $\overline{a} = a_1 \overline{e_1} + a_2 \overline{e_2}.$



Говорят, что вектор $\overline{a}$ разложен по базису $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}\right).$

Коэффициенты разложения a_1, a_2 называют *координатами вектора* $\overline{a}$ в базисе $\left(\overline{e_1}, \overline{e_2}\right).$

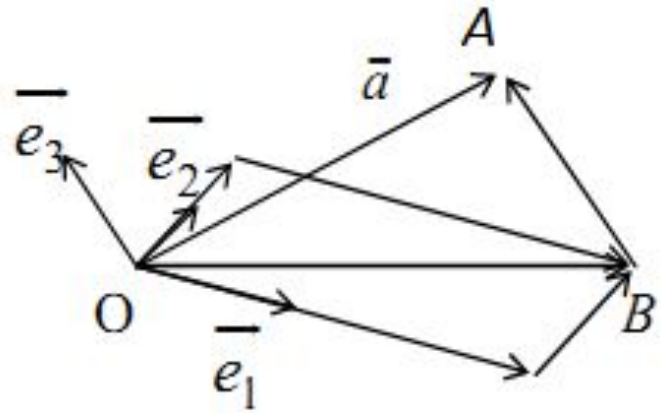
$\overline{a} = (a_1, a_2)$

Разложение вектора по базису в пространстве

Базис в пространстве – это три некомпланарных вектора $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3,$ взятых в определенном порядке.

Тогда произвольный вектор

$$\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3.$$



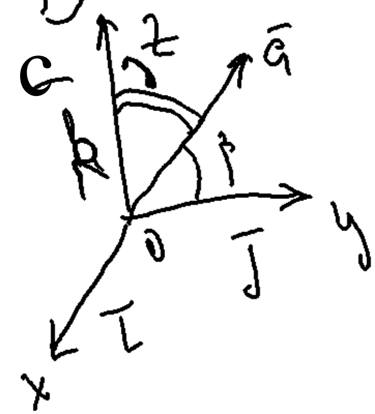
Длина вектора

$$|\overline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Значения $\cos\alpha = a_1/|\bar{a}|;\ \cos\beta = a_2/|\bar{a}|;\ \cos\gamma = a_3/|\bar{a}|$ называются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$, причем $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

$\bar{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

Направляющие косинусы совпадают с координатами орта $\bar{a}_0 = \bar{a}/|\bar{a}|.$



Свойства координат вектора:

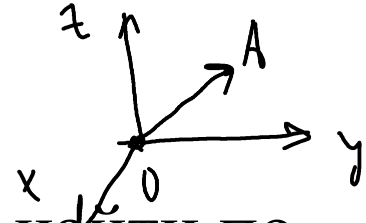
1) при умножении вектора на число его координаты умножаются на это же число;
2) при сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются);
3) Два вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

$\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ $\qquad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{b}$

$\bar{b} = (b_1, b_2, b_3$

Координаты точки.
Их связь с координатами вектора

Рассмотрим точку *A*. Вектор $\overline{OA}$ называют радиус-вектором $\overline{r}_A$ точки *A*, а его координаты – координатами точки *A* в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ или в системе координат *Oxyz*, принято обозначение:



$$\overline{OA} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad A(a_1, a_2, a_3).$$

Координаты вектора $\overline{AB}$ через можно найти по координатам его начальной точки $A(a_1, a_2, a_3)$ и конечной точки $B(b_1, b_2, b_3)$:

$$\overline{AB} = \{b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3\}.$$

§4. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=(\overline{a},\overline{b})=|\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{b}\,|\cos\left(\widehat{\overline{a},\overline{b}}\right).$$

Если $\overline{a}=\overline{b}$, то $\overline{a}\cdot\overline{a}=|\,\overline{a}\,|\cdot|\,\overline{a}\,|\cos(0)=|\,\overline{a}\,|^2$.

Произведение $\overline{a}\cdot\overline{a}$ называют скалярным квадратом вектора и обозначают $\overline{a}^2$: $\overline{a}^2=|\,\overline{a}\,|^2$.

Свойства скалярного произведения:

1) скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы ортогональны;

2) скалярное произведение векторов коммутативно

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}.$$

3) свойство линейности:

$$\left(l\overline{a} + m\overline{b}\right) \cdot \overline{c} = l\left(\overline{a} \cdot \overline{c}\right) + m\left(\overline{b} \cdot \overline{c}\right).$$

Пример. Вычислить $(\bar{a}-3\bar{b})\cdot(2\bar{a}+\bar{b})$, если

$|\bar{a}|=\sqrt{2},\ |\bar{b}|=3,\ (\widehat{\bar{a},\bar{b}})=3\pi/4.$

$$(\bar{a}-3\bar{b})(2\bar{a}+\bar{b})=\bar{a}\cdot(2\bar{a})+\bar{a}\cdot\bar{b}+(-3\bar{b})\cdot(2\bar{a})+(-3\bar{b})\cdot\bar{b}=$$

$$=2\bar{a}\cdot\bar{a}+\bar{a}\cdot\bar{b}-6\underbrace{\bar{b}\cdot\bar{a}}_{\bar{a}\cdot\bar{b}}-3\bar{b}\cdot\bar{b}=2\bar{a}^2-5\bar{a}\cdot\bar{b}-3\bar{b}^2=$$

$$=2(\sqrt{2})^2-5\cdot\sqrt{2}\cdot3\cdot\cos\frac{3\pi}{4}-3\cdot3^2=4-15\cdot\cancel{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}}\right)-27=$$

$$=4+15-27=19-27=-8$$

Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе

Рассмотрим ортонормированный базис $(\overline{i}, \overline{j}, \overline{k})$.

Пусть $\overline{a} = a_1\overline{i} + a_2\overline{j} + a_3\overline{k}$, $\overline{b} = b_1\overline{i} + b_2\overline{j} + b_3\overline{k}$.

Тогда

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Приложения скалярного произведения

1. Признак ортогональности двух ненулевых векторов:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0.$$

2. Вычисление длины вектора:

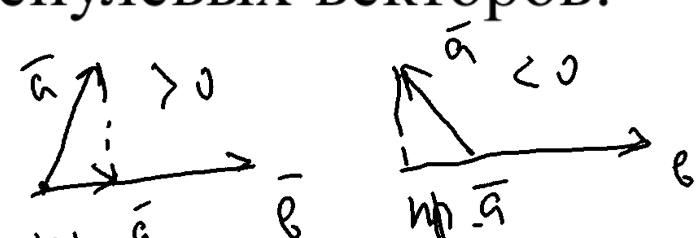
$$|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{\bar{a}^2}. \Leftarrow \quad \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$$

3. Отыскание угла φ между ненулевыми векторами

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}.$$

4. Вычисление проекции для ненулевых векторов:

$$np_{\bar{b}}\bar{a} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}.$$



$np_{\bar{b}}\bar{a}$ – число

Пример 1. Найти длину вектора $\overline{c} = 3\overline{a} - 4\overline{b}$, если

$$|\overline{a}| = 2, \quad |\overline{b}| = 3, (\hat{a,b}) = \pi/3.$$

$$|\overline{c}| = \sqrt{\overline{c}^2} = \sqrt{(3\overline{a}-4\overline{b})^2} = \sqrt{9\overline{a}^2 - 24\overline{a}\overline{b} + 16\overline{b}^2} =$$

$$= \sqrt{9\cdot 2^2 - 24\cdot 2\cdot 3\underbrace{\cos\frac{\pi}{3}}_{1/2} + 16\cdot 3^2} =$$

$$= \sqrt{36 - 72 + 144} = \sqrt{72+36} = \sqrt{108} = \sqrt{4\cdot 27} =$$

$$= 6\sqrt{3}$$

Пример 2. Найти вектор $\overline{c}$, коллинеарный вектору $\overline{a} = \{1,3,2\}$, если его проекция на вектор $\overline{b} = \{2,1,0\}$ равна $-2\sqrt{5}$.

$5 = \sqrt{5}\cdot\sqrt{5}$

$\overline{c} \parallel \overline{a} \Rightarrow \overline{c} = \lambda\overline{a} = \{\lambda, 3\lambda, 2\lambda\}$

$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{c} = \dfrac{\overline{c}\cdot\overline{b}}{|\overline{b}|} = \dfrac{\lambda\cdot 2 + 3\lambda\cdot 1 + 2\lambda\cdot 0}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}} = \dfrac{5\lambda}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}\lambda$

$\text{пр}_{\overline{b}}\overline{c} = -2\sqrt{5}$

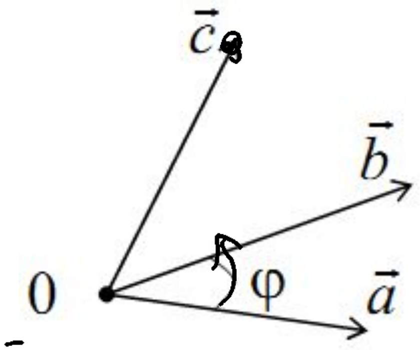
$\sqrt{5}\lambda = -2\sqrt{5} \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow \overline{c} = \{-2, -6, -4\}$

§5. Векторное произведение векторов

Понятие правой и левой тройки векторов

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если с конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден против часовой стрелки.

В противном случае тройка векторов называется левой.

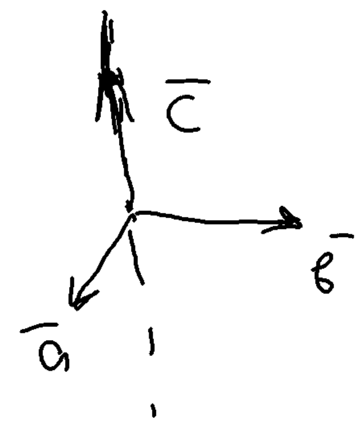


На рис. тройка векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ - правая,

$\overline{b}, \overline{a}, \overline{c}$ - левая тройка.

Векторным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{a} \times \bar{b}$, длина и направление которого определяются следующими условиями:

1. $\bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b}$;
2. $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a} \hat{,} \bar{b})$; S
3. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ - правая тройка (если $\bar{c} \neq \bar{0}$).



Свойства векторного произведения:

1. $\overline{a}\times\overline{b} = -(\overline{b}\times\overline{a})$ (антикоммутативность);

2. $(\lambda\overline{a} + \mu\overline{b})\times\overline{c} = \lambda(\overline{a}\times\overline{c}) + \mu(\overline{b}\times\overline{c})$;

   $\overline{a}\times(\lambda\overline{b} + \mu\overline{c}) = \lambda(\overline{a}\times\overline{b}) + \mu(\overline{a}\times\overline{c})$;

3. $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}\,||\,\vec{b}$

(условие коллинеарности двух векторов).

Вычисление векторного произведения в ортонормированном базисе

Пусть $\overline{a} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}; \ \overline{b} = b_x\overline{i} + b_y\overline{j} + b_z\overline{k}.$

Тогда

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \overline{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \overline{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \overline{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}$$

Пример. Вычислить $\bar a \times \bar b$, если $\bar a = 2\bar i - \bar j + \bar k$, $\bar b = \bar i + 2\bar k$

$$\bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \bar i \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - \bar j \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \bar k \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

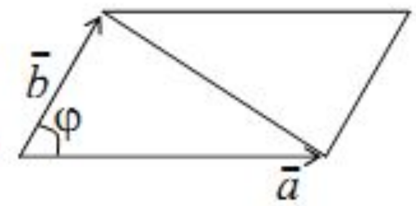
$$= \bar i(-2-0) - \bar j(4-1) + \bar k(0-(-1)) =$$

$$= -2\bar i - 3\bar j + \bar k = \{-2; -3; 1\}$$

Применения векторного произведения

1) Вычисление площади $S_{\square}$ параллелограмма и площади S_{Δ} треугольника, построенных на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$

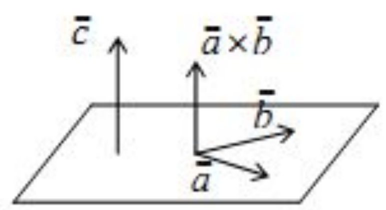
$$\boxed{S_{\square} = \left|\bar{a}\times\bar{b}\right|, \quad S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|}.$$



2) Отыскание вектора $\bar{c}$, перпендикулярного заданным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

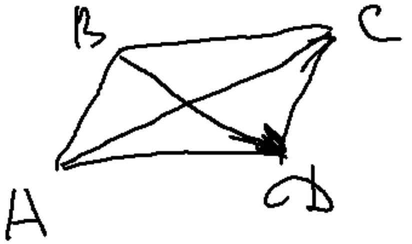
$$\boxed{\bar{c} = \lambda\cdot(\bar{a}\times\bar{b})}.$$

$$\bar{c} \neq \bar{a}\times\bar{b}$$



Пример 1. Вычислить площадь параллелограмма *ABCD*, если $\overline{AC} = 2\overline{e}_1 - \overline{e}_2,\ \overline{BD} = 4\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2;\ \overline{e}_1, \overline{e}_2$ - единичные векторы и

$$\left(\overline{e}_1 \hat{,} \overline{e}_2\right) = \pi/4.$$



$$S = \underbrace{\frac{1}{2}|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|\sin\left(\overline{AC}\hat{,}\overline{BD}\right)} = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\times\overline{BD}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|(2\overline{e}_1 - \overline{e}_2)\times(4\overline{e}_1 - 5\overline{e}_2)\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|8\underbrace{\overline{e}_1\times\overline{e}_1}_{=0} - 10\,\overline{e}_1\times\overline{e}_2 - 4\,\overline{e}_2\times\overline{e}_1 + 5\underbrace{\overline{e}_2\times\overline{e}_2}_{=0}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|-10\,\overline{e}_1\times\overline{e}_2 + 4\,\overline{e}_1\times\overline{e}_2\right| = \frac{1}{2}\left|-6\,\overline{e}_1\times\overline{e}_2\right| = 3\left|\overline{e}_1\times\overline{e}_2\right| =$$

$$= 3\underbrace{|\overline{e}_1|}_{=1}\cdot\underbrace{|\overline{e}_2|}_{=1}\sin\left(\overline{e}_1\hat{,}\overline{e}_2\right) = 3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Пример 2. Найти вектор $\bar{c}$, ортогональный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$, $\bar{b} = 3\bar{i} + \bar{k}$, $|\bar{c}| = 3\sqrt{41}$ и вектор $\bar{c}$ образует тупой угол с осью Oz. $\Rightarrow$ 3-я коорд. "−"

$\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b} \Rightarrow \bar{c} = \lambda\, \bar{a} \times \bar{b}$

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \{-1; -2; 3\}$$

$\bar{c} = \{-\lambda; -2\lambda; 3\lambda\}$

$|\bar{c}| = \sqrt{\lambda^2 + 4\lambda^2 + 9\lambda^2} = \sqrt{14}\,|\lambda|$

$|\bar{c}| = 3\sqrt{41}$

$\sqrt{14}\,|\lambda| = 3\sqrt{41} \Rightarrow |\lambda| = \dfrac{3\sqrt{41}}{\sqrt{14}}$

$\bar{c} = \pm\dfrac{3\sqrt{41}}{\sqrt{14}}\{-1, -2, 3\}$

$(\widehat{\bar{c}, Oz})$ - тупой $\Rightarrow \lambda < 0$

$\bar{c} = \dfrac{3\sqrt{41}}{\sqrt{14}}\{1, 2, -3\}$

§6. Смешанное произведение векторов

Пусть вектор $\bar{a}$ ***векторно*** умножается на вектор $\bar{b}$, затем получившийся вектор ***скалярно*** умножается на вектор $\bar{c}$. В результате получается ***число***, которое называется векторно-скалярным или ***смешанным произведением*** векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ и обозначается $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Таким образом,

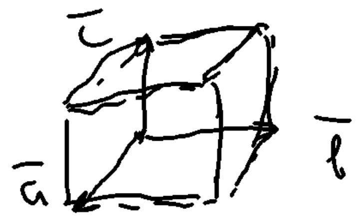
$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \underbrace{(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}}_{\text{число}} = \bar{a}(\bar{b}\times\bar{c})$$

Свойства смешанного произведения

1) Смешанное произведение трех ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы компланарны.

2) Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – некомпланарны и V – объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу , то

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{cases}+V, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ - правая тройка,}\\ -V, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ - левая тройка.}\end{cases}$$



3) Смешанное произведение не меняется при круговой перестановке множителей и меняет знак при перестановке соседних множителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

4). Смешанное произведение не меняется при перестановке местами знаков векторного и скалярного умножения: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

5). Свойство линейности:

$$(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b})\vec{c}\,\vec{d} = \lambda(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}) + \mu\,(\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{d}),$$

$$\vec{a}(\lambda \vec{b} + \mu \vec{c})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}) + \mu\,(\vec{a}\,\vec{c}\,\vec{d}),$$

$$\vec{a}\,\vec{b}(\lambda \vec{c} + \mu \vec{d}) = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}) + \mu\,(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}).$$

Вычисление смешанного произведения в ортонормированном базисе

Пусть в ортонормированном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ заданы векторы

$$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}, \quad \vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}.$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов, воспользовавшись формулой : $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Тогда смешанное произведение векторов $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, заданных в ортонормированном базисе, вычисляется по формуле:

$$\boxed{\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.}$$

Пример. Вычислить смешанное произведение векторов $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$; $\bar{b} = 3\bar{i} - \bar{j}$; $\bar{c} = \bar{i} + 4\bar{k}$.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-4-0) - (12-0) - 3(0+1) =$$

$$= -8 - 12 - 3 = -23 < 0$$

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – левая тройка

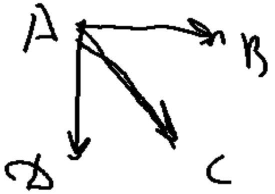
$\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{b} = 23 > 0$ – прав. тройка

Применения смешанного произведения

1. Проверка компланарности трех векторов:

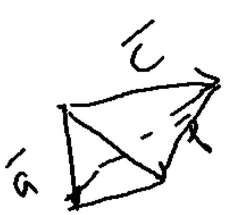
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0.$

2. Проверка принадлежности четырех точек A, B, C, D одной плоскости α:



$$(A, B, C, D) \in \alpha \quad \Leftrightarrow \quad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0.$$

3. Вычисление объемов пирамиды и параллелепипеда, построенных на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, и их высоты h_c, опущенной из конца вектора $\vec{c}$:



$$V_{парал-да} = \left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right|, \quad V_{пир-ды} = \frac{1}{6} \left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right|, \qquad h_c = \frac{\left| \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \right|}{\left| \vec{a} \times \vec{b} \right|}.$$

Пример. Проверить, что векторы

$$\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}, \quad \vec{b} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{c} = 2\vec{i} + \vec{k}$$

некомпланарны. Найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, приведенных к общему началу, и высоту h_a, опущенную из конца вектора $\bar{a}$.

$$\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c = \begin{vmatrix}1&-2&0\\3&-5&4\\2&0&1\end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix}-5&4\\0&1\end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix}3&4\\2&1\end{vmatrix} + 0 =$$

$$= -5 + 2(3-8) = -15 \neq 0 \Rightarrow$$

$\bar a, \bar b, \bar c$ - некомпл.

$$V_{паралл.да} = |\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c| = 15$$

$$\bar b\times\bar c = \begin{vmatrix}\bar i&\bar j&\bar k\\3&-5&4\\2&0&1\end{vmatrix} = \{-5;-5;10\} = 5\{-1;-1;2\}$$

$$h_a = \frac{|\bar a\cdot\bar b\cdot\bar c|}{|\bar b\times\bar c|} = \frac{15}{5\sqrt{1+1+4}} = \frac{15}{5\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$