Арифметические основы ЭВМ

Основные вопросы

- *Системы счисления. Позиционные и непозиционные системы счисления.*
- *Алгоритмы перевода чисел из одной системы счисления в другую.*
- *Двоичная система счисления. Двоичная арифметика.*

Цифра. Число. Что это?

Цифра – специальные графические знаки, используемые для представления и записи чисел.

0, 1, 2, …   I, V, X, L, …

Число - основное понятие математики

123, 45678, 1010011, CXL

Что такое система счисления?

Система счисления **– это совокупность правил для обозначения и наименования чисел.**

Системы счисления

Позиционные

десятичная
двоичная
восьмеричная
шестнадцатеричная
и т.д.

Непозиционные

Единичная
Римская
Древнеегипетская
алфавитные

НЕПОЗИЦИОННЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

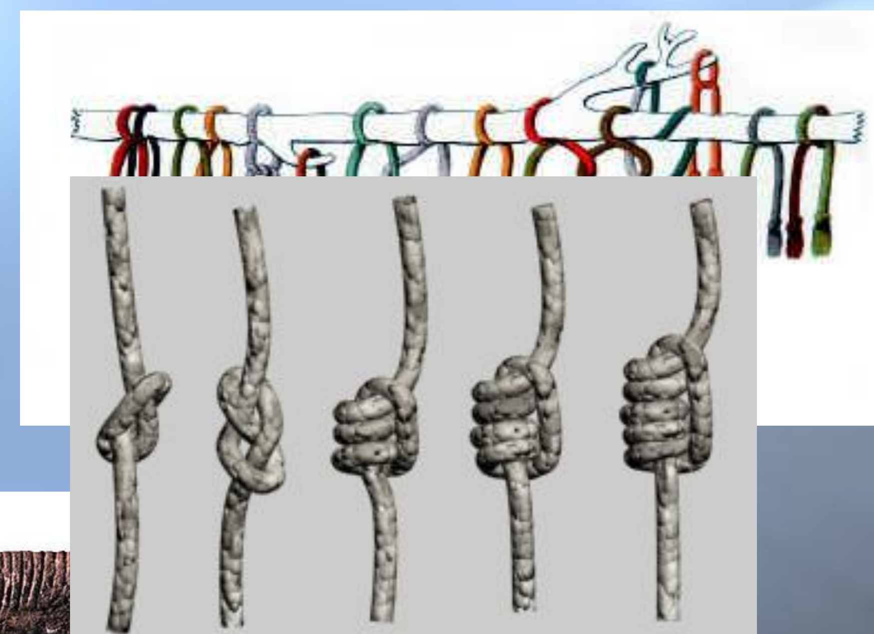
-*это система счисления, в которой значение символа не зависит от его*

Непозиционные системы

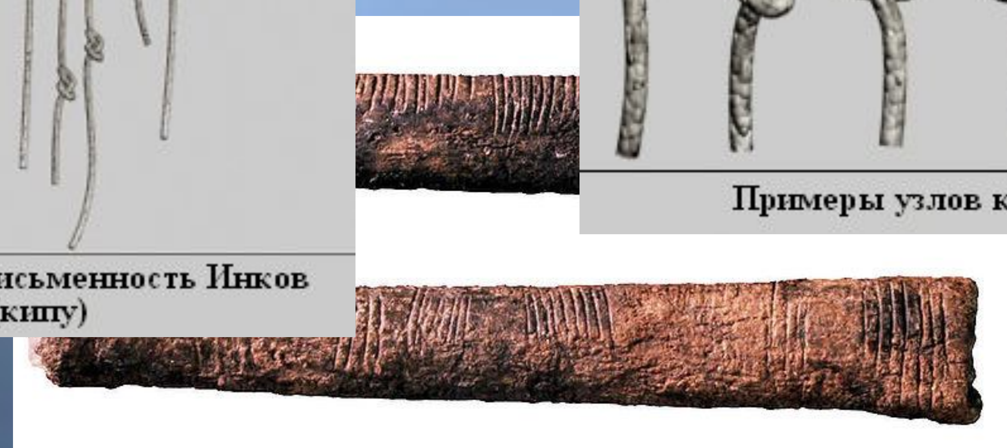
Алфавит системы содержит неограниченное количество символов.

Единичная ("палочная", "унарная") **система счисления**

Узелковая письменность Инков (кипу)

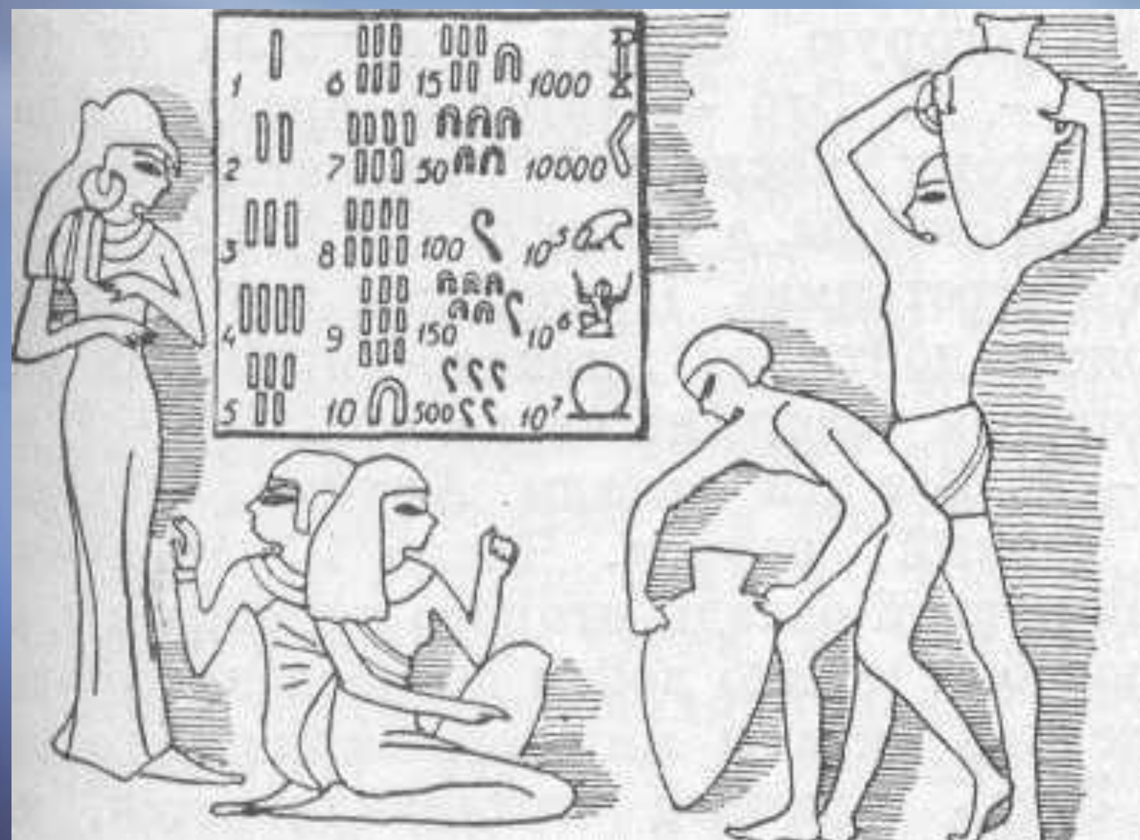


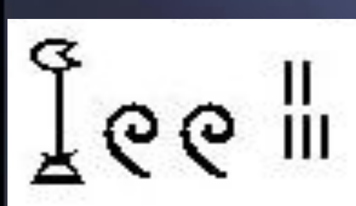
Примеры узлов кипу



Непозиционные системы

Древнеегипетская система счисления



 = 1205

 = 23029

Непозиционные системы

Древнегреческие системы счисления

Древнегреческая аттическая пятеричная

1	2	3	4.	5	6	7	8	9
I	II	III	IIII	Γ	ΓI	ΓII	ΓIII	ΓIIII
10	100	1000	10000	50	500	5000		
Δ	H	X	M	𐅄	𐅅	𐅆		

ΗΗ𐅄ΓΙ = 256

ΧΧ𐅄Ι = 2051

ΗΗΗ𐅄VVVΙΙ = 382

Древнегреческая ионийская десятеричная алфавитная

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	ϑ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ

$\overline{\sigma\xi\varepsilon}$ = 265

$\overline{\varphi\gamma}$ = 503

$\overline{\psi\lambda\alpha}$ = 731

Непозиционные системы

Римская система счисления – для записи чисел используются буквы латинского алфавита

Римские цифры			
1	I	100	C
5	V	500	D
10	X	1000	M
50	L	2000	Z

Для записи чисел используются два правила:

1- каждый меньший знак, поставленный слева от большего, вычитается из него;

2- каждый меньший знак, поставленный справа от большего, прибавляется к нему.

IX

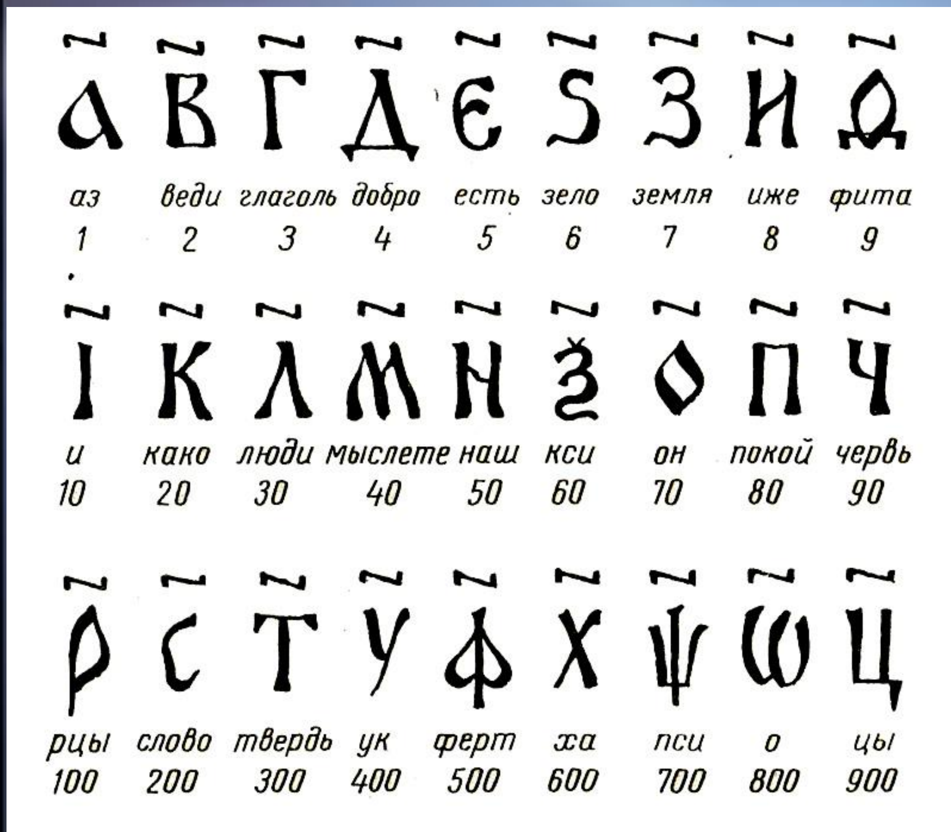
9 = 10 -1

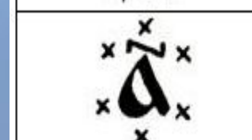
XII

12 = 10 + 1 + 1

Непозиционные системы

Славянская система счисления



	Тысяча	1000
	Тьма	10 000
	Легион	100 000
	Леодр	1 000 000
	Ворон	10 000 000
	Колода	100 000 000

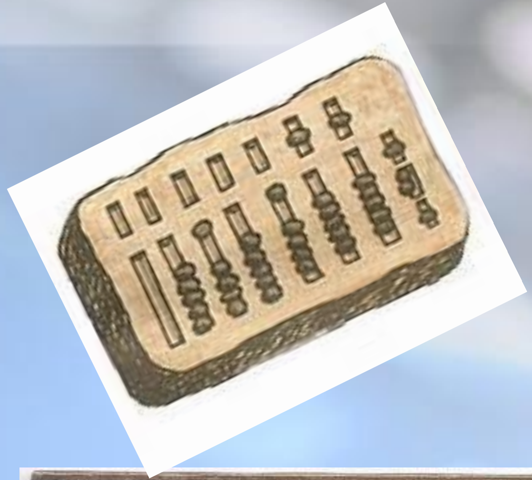
ДІ = 14

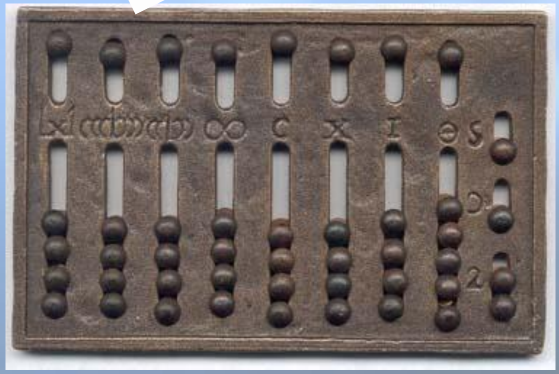
ѡѯг = 863

Недостатки непозиционных системы счисления

1. Существует постоянная потребность введения новых знаков для записи больших чисел.
2. Невозможно представлять дробные и отрицательные числа.
3. Сложно выполнять арифметические операции, так как не существует алгоритмов их выполнения.

Но мы до сих пор пользуемся элементами непозиционной системы счисления в обыденной речи, в частности, мы говорим сто, а не десять десятков, тысяча, миллион, миллиард, триллион.





ПОЗИЦИОННАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

- это система счисления, в которой значение символа зависит от его места (позиции) в ряду цифр, изображающих число.

Позиция цифры называется *разрядом*.

Разряд числа возрастает справа налево.

Основанием позиционной системы называется возводимое в степень целое число, которое равно количеству цифр, используемых для изображения в данной системе счисления.

Троичная 0, 1, 2

Пятеричная 0, 1, 2, 3, 4

Двенадцатеричная
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B

Позиция цифры в числе называется разрядом.

Десятичная система счисления

Основание: q = 10.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Развернутая форма записи числа:

$$A_{10} = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot 10^{-m}$$

Коэффициенты a_i - цифры десятичного числа.

Например, число $123{,}45_{10}$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$123{,}45_{10} = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

ДВОИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: q = 2.

Алфавит: 0, 1.

Развернутая форма записи числа:

$$A_2 = a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + a_{n-2} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_0 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1} + \ldots + a_{-m} \cdot 2^{-m}$$

Коэффициенты a_i - цифры двоичного числа (0 или 1).

Например, число $101{,}01_2$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$101{,}01_2 = 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2}$$

ВОСЬМЕРИЧНАЯ СИСТЕМА СЧИСЛЕНИЯ

Основание: $q = 8$.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Развернутая форма записи числа:

$$A_8 = a_{n-1}\cdot 8^{n-1} + a_{n-2}\cdot 8^{n-2} + \ldots + a_0\cdot 8^0 + a_{-1}\cdot 8^{-1} + \ldots + a_{-m}\cdot 8^{-m}$$

Коэффициенты a_i - цифры восьмеричного числа.

Например, число $123{,}67_8$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$123{,}67_8 = 1\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 3\cdot 8^0 + 6\cdot 8^{-1} + 7\cdot 8^{-2}$$

ШЕСТНАДЦАТЕРИЧНАЯ СИСТЕМА

Основание: q = 16.

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

Развернутая форма записи числа:

$$A_{16} = a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + a_{n-2} \cdot 16^{n-2} + \dots + a_0 \cdot 16^0 + a_{-1} \cdot 16^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot 16^{-m}$$

Коэффициенты a_i - цифры шестнадцатеричного числа.

Например, число $2BC,DE_{16}$ в развернутой форме будет записываться следующим образом:

$$2BC,DE_{16} = 2 \cdot 16^2 + B \cdot 16^1 + C \cdot 16^0 + D \cdot 16^{-1} + E \cdot 16^{-2}$$

Алгоритмы перевода чисел из одной системы счисления в другую.

1. Алгоритм перевода целого числа из десятичной системы счисления в любую другую систему:

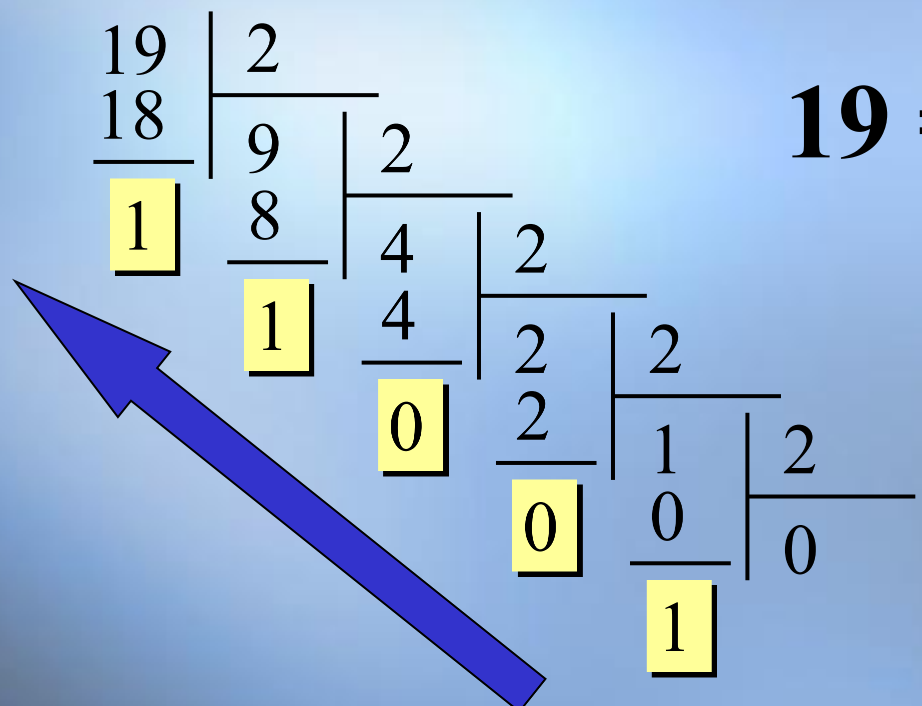
1. *Десятичное число **последовательно делится на основание другой системы** до тех пор, пока **частное не окажется меньше основания**.*

2. *Запись получившегося числа осуществляется **справа на лево**.*

3. *Цифрами числа будут являться **остатки от деления**, начиная с последнего частного.*

Перевод целых чисел

10 → 2

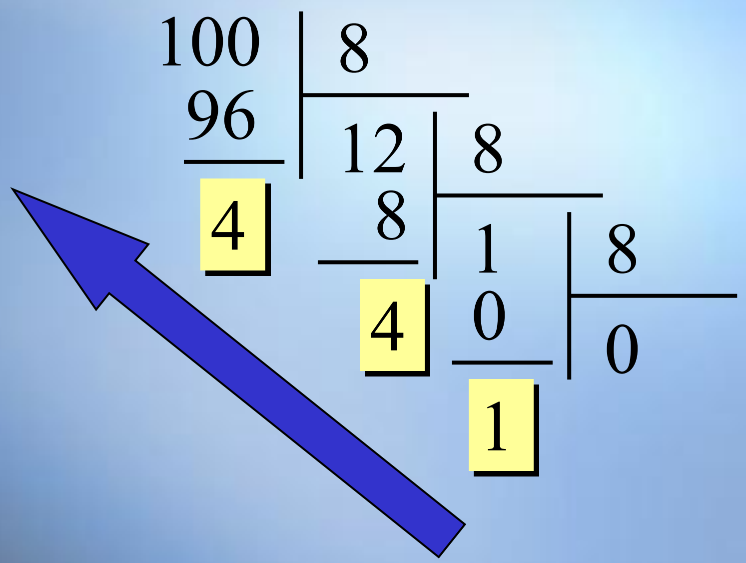


$$19 = 10011_2$$

система счисления

Перевод целых чисел

10 → 8



$$\mathbf{100 = 144_8}$$

система
счисления

Перевод целых чисел

10 → 16

107 | 16
96 | 6 | 16
11 (B) | 0 | 0
6

107 = 6B$_{16}$

система счисления

2. Алгоритм перевода дробных чисел из десятичной системы счисления в другую

1. Последовательно выполнять умножение исходного числа и получаемых дробные части на q до (основание новой системы счисления) тех пор, пока дробная часть не станет равна нулю или не достигнем требуемую точность.
2. Полученные при таком умножении целые части - числа в системе счисления q – записать в прямом порядке (сверху вниз).

Перевод дробных чисел

10 → 2

$$0{,}375 = 0{,}011_2$$

$$\begin{array}{r} 0{,}375 \\ \times\ 2 \\ \hline \boxed{0},750 \\ 0{,}75 \\ \times\ 2 \\ \hline \boxed{1},50 \\ 0{,}5 \\ \times\ 2 \\ \hline \boxed{1},0 \end{array}$$

$0{,}7 = ?$

$0{,}7 = 0{,}101100110\ldots$

$= 0{,}1(0110)_2$

Многие дробные числа нельзя представить в виде **конечных** двоичных дробей.

Для их точного хранения требуется **бесконечное** число разрядов.

Большинство дробных чисел хранится в памяти с ошибкой.

3. Перевод чисел из любой системы счисления в десятичную.

Для того чтобы число из любой системы счисления перевести в десятичную систему счисления, необходимо его представить в развернутом виде и произвести вычисления.

Перевод целых чисел

2 → 10

4 3 2 1 0 **разряды**

$$10011_2 = 1\cdot 2^4 + \cancel{0\cdot 2^3} + \cancel{0\cdot 2^2} + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

$$= 16 + 2 + 1 = 19$$

8 → 10

2 1 0 **разряд**
ы

$$144_8 = 1\cdot 8^2 + 4\cdot 8^1 + 4\cdot 8^0$$

$$= 64 + 32 + 4 = 100$$

Перевод целых чисел

16 → 10

2 1 0 **разряды** **C**

$$1C5_{16} = 1\cdot16^2 + 12\cdot16^1 + 5\cdot16^0$$

$$= 256 + 192 + 5 = 453$$

4. Перевод чисел из $2 \rightarrow 8$

1001011101111_2

Шаг 1. Разбить на триады, начиная *справа налево*:

001 001 011 101 111$_2$

Шаг 2. Каждую триаду записать одной восьмеричной цифрой:

001 001 011 101 111$_2$

1 1 3 5 7

Ответ: $1001011101111_2 = 11357_8$

5. Перевод чисел из $2 \to 16$

$$1001011101111_2$$

Шаг 1. Разбить на тетрады, начиная *справа налево*:

0001 0010 1110 1111$_2$

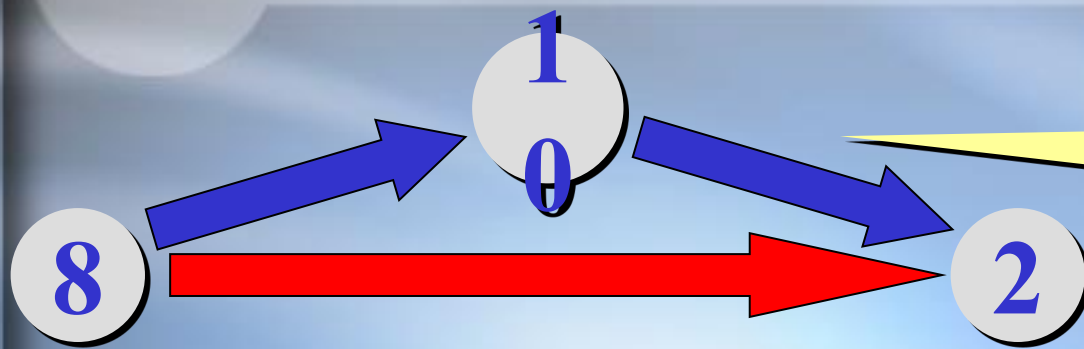
Шаг 2. Каждую тетраду записать одной шестнадцатеричной цифрой:

0001 0010 1110 1111$_2$

1 2 E F

Ответ: $1001011101111_2 = 12EF_{16}$

6. Перевод из $8 \to 2$



- трудоемко
- 2 действия

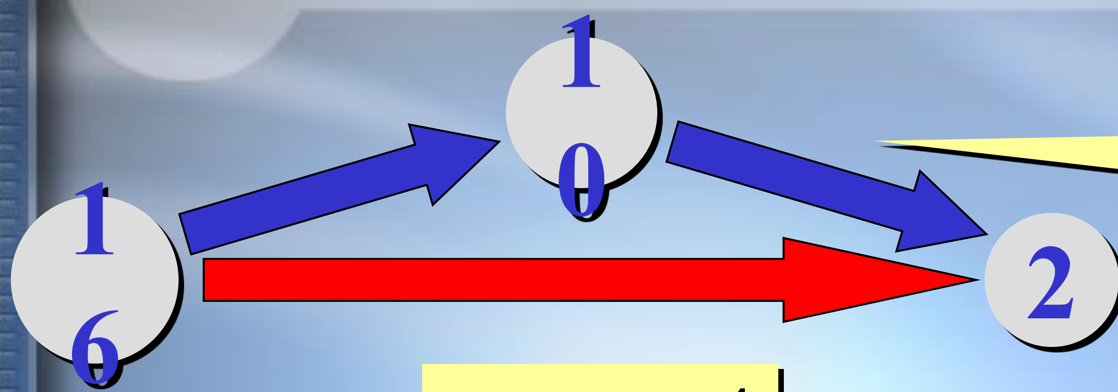
$2 \to 16$

$$8 = 2^3$$

! Каждая восьмеричная цифра может быть записана как три двоичных (*триада*)!

$$1725_8 = \underbrace{001}_{1}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{101}_{5}{}_2$$

7. Перевод из $16 \to 2$



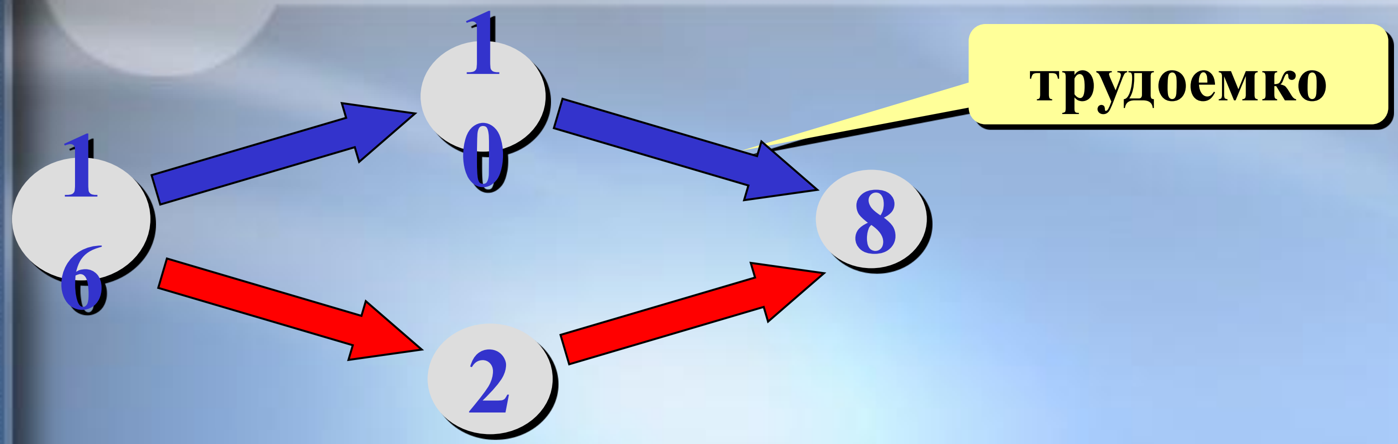
- трудоемко
- 2 действия

$$16 = 2^4$$

! **Каждая шестнадцатеричная цифра может быть записана как четыре двоичных (*тетрада*)!**

$$7F1A_{16} = \underbrace{0111}_{7}\;\underbrace{1111}_{F}\;\underbrace{0001}_{1}\;\underbrace{1010}_{A}{}_{2}$$

8. Перевод из 16 → 8



Шаг 1. Перевести в двоичную систему:

$$3DEA_{16} = 11\ 1101\ 1110\ 1010_2$$

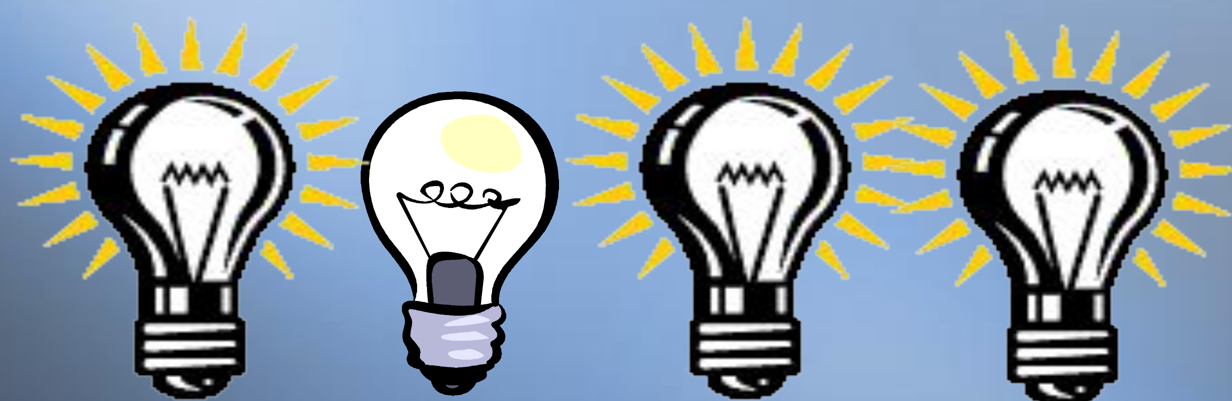
Шаг 2. Разбить на триады:

$$011\ 110\ 111\ 101\ 010_2$$

Шаг 3. Триада – одна восьмеричная цифра:

$$3DEA_{16} = 36752_8$$

Двоичная система счисления. Двоичная арифметика



1 0 1 1

Арифметические операции

сложение

$0+0=0 \quad 0+1=1$

$1+0=1 \quad 1+1=\mathbf{1}0_2$

$1+1+1=\mathbf{1}1_2$

перенос

$$
\begin{array}{r}
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \ \\
10110_2 \\
+\ 111011_2 \\
\hline
1010001_2
\end{array}
$$

вычитание

$0-0=0 \quad 1-1=0$

$1-0=1 \quad \mathbf{1}0_2-1=1$

заем

$$
\begin{array}{r}
\bullet\ \ \ \ \ \ \ \ \ \bullet\ \ \ \ \\
0\ \ 1\ \ 1\ \ 10_2\ \ 0\ \ 10_2\ \ \ \\
1000101_2 \\
-\ 11011_2 \\
\hline
0101010_2
\end{array}
$$

Арифметические операции

умножение

$$
\begin{array}{r}
10101_2 \\
\times \quad 101_2 \\
\hline
10101_2 \\
+\ 10101_2 \\
\hline
\boxed{1101001_2}
\end{array}
$$

деление

$$
\begin{array}{r|l}
10101_2 & 111_2 \\
\cline{2-2}
-\ 111_2 & \boxed{11_2} \\
\cline{1-1}
111_2 & \\
-\ 111_2 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

Плюсы и минусы двоичной системы

- *нужны технические устройства только с двумя устойчивыми состояниями (есть ток — нет тока, намагничен — не намагничен и т.п.);*
- *надежность и помехоустойчивость двоичных кодов;*
- *выполнение операций с двоичными числами для компьютера намного проще, чем с десятичными.*

- *простые десятичные числа записываются в виде бесконечных двоичных дробей;*
- *двоичные числа имеют много разрядов;*
- *запись числа в двоичной системе однородна, то есть содержит только нули и единицы; поэтому человеку сложно ее воспринимать.*

Связь систем счисления

10-ая	2-ая	8-ая	16-ая
0	0	0	0
1	1	1	1
2	0010	2	2
3	0011	3	3
4	0100	4	4
5	0101	5	5
6	0110	6	6
7	0111	7	7
8	1000		8
9	1001		9
10	1010		A
11	1011		B
12	1100		C
13	1101		D
14	1110		E
15	1111		F

Задания для домашней работы

1. Для каждого из чисел: 123_{10}, 456_{10} выполнить перевод: $10 \to 2$, $10 \to 8$, $10 \to 16$.
2. Для каждого из чисел: 100011_2, 101001011_2, 1110010001_2 выполнить перевод: $2 \to 10$, $2 \to 8$, $2 \to 16$.
3. Для чисел: 54321_8, 54525_8, 777_8, $1AB_{16}$, $A1B_{16}$, $E2E4_{16}$, $E7E5_{16}$ выполнить соответствующий перевод: $8 \to 2$, $16 \to 2$.


Лекция окончена!