ТЕМА ЛЕКЦИИ:

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА.

1. Определитель матрицы, его свойства, методы нахождения определителя

- Рассмотрим квадратную матрицу второго порядка. *Определителем* этой матрицы называют ***число***, обозначаемое *det A,* Δ или |*A*|, полученное из элементов матрицы по следующему правилу:
- $det\ A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- Рассмотрим матрицу третьего порядка.

Определитель матрицы, его свойства, методы нахождения определителя

Определителем матрицы третьего порядка называют число, которое находят с помощью формулы:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{31}\cdot a_{12}\cdot a_{23} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}$$

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 3 + (-1)\cdot 3\cdot 4 + 1\cdot 0\cdot 2 - (-1)\cdot 1\cdot 1 - 0\cdot 3\cdot 3 - 2\cdot 4\cdot 2 = 6 + 0 - 12 + 1 - 0 - 16 = -21$$

Метод Саррюса:

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Со знаком плюс

Со знаком минус

Вычисление определителя

Пример:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{matrix}$$

$$= 2\cdot 1\cdot 3 + 3\cdot 4\cdot(-1) + 1\cdot 0\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot(-1) - 2\cdot 4\cdot 2 - 3\cdot 0\cdot 3 = -21$$

Разложение определителя по элементам строки (столбца)

- Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения.

Разложение определителя по элементам строки (столбца)

- *Минором* M_{ij} элемента a_{ij} определителя называется определитель, получаемый из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- *Алгебраическим дополнением* A_{ij} элемента a_{ij} определителя называется его минор взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Разложение определителя по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = 2 \quad M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 \qquad A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \cdot (-5) = -5$$

$$a_{12} = 3 \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 - 4 \cdot (-1) = 4 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -4$$

$$a_{13} = 1 \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 1 \cdot (-1) = 1 \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 1$$

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-4) + 1 \cdot (1) = -10 - 12 + 1 = -21$$

Аналогичным образом определитель третьего порядка может быть разложен по элементам второй и третьей строк, а также по элементам первого, второго или третьего столбца.

Разложение определителя по элементам строки (столбца)

- Определитель выгоднее раскрывать по ТОЙ строке (столбцу), где:

  1) нулей побольше;
  2) числа поменьше.

- Особый случай, когда определитель имеет *ступенчатый* (*треугольный) вид:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

Разложим его по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1 \cdot (-3) - 0 \cdot 3) = 2 \cdot (3 - 0) = 6$$

Свойства определителей

- 1. При транспонировании матрицы величина её определителя не меняется
- 2. Если две строки (или два столбца) определителя поменять местами, то определитель сменит знак
- 3.Из строки (столбца) определителя можно вынести общий множитель
- 4. Если две строки (столбца) определителя пропорциональны (как частный случай – одинаковы), то данный определитель равен нулю
- 5. Определитель с нулевой строкой (столбцом) равен нулю
- 6. К строке определителя можно прибавить другую строку, умноженную на ненулевое число. При этом величина определителя не изменится (К столбцу определителя можно прибавить другой столбец, умноженный на ненулевое число. При этом величина определителя не изменится)

Обратная матрица. Ранг матрицы

- Матрицей, *обратной к матрице А*, называется квадратная матрица A^{-1}, такая что $A^{-1}A=E$
- Если А невырожденная (det A≠0), то A^{-1} находится по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\tilde{A}^{t}=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix}$$

Где – A_{ij} алгебраическое дополнение соответствующего элемента, $\tilde{A}^{t}$ - транспонированная матрица алгебраических дополнений

- *Рангом матрицы А* размерности $m\times n$ называется наибольший из порядков миноров, отличных от 0.
- Ранг матрицы обозначают *r(A)*.

Пример

- Найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Вычислим определитель:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

- Находим A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

- Проверка:

$$A^{-1}A = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -5 \\ -3 & 4 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E$$

Ранг матрицы не изменяется от элементарных преобразований.

- Под элементарными преобразованиями понимается:
- замена строк столбцами, а столбцов - соответствующими строками;
- перестановка строк (столбцов) матрицы;
- вычеркивание ряда (строки или столбца), все элементы которого равны нулю;
- умножение какого-либо ряда (строки или столбца) на число, отличное от нуля;
- прибавление к элементам одного ряда соответствующих элементов другого параллельного ряда.

Вычисление ранга матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & 9 & -4 & -7 \\ 3 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$

Вычтем из 2-ой строки 1-ую строку, к 3-ей прибавляем 1-ую строку, умноженную на 3, а из 4-ой – вычитаем 1-ую строку, умноженную на 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 15 & 5 & -10 \\ 0 & -6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Делим элементы 3-ей и 4-ой строк на их общие множители

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Домашнее задание

- Вычислите ранг матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

- Найдите сумму матриц A и B, определитель и обратную матрицу полученной матрицы.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$