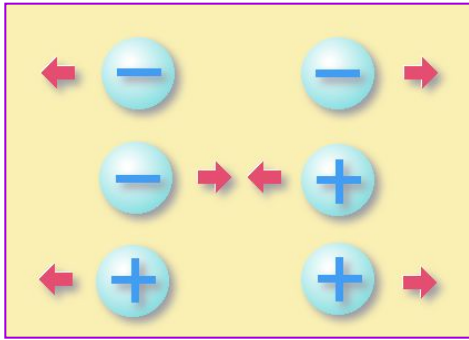


Лекция 1а.

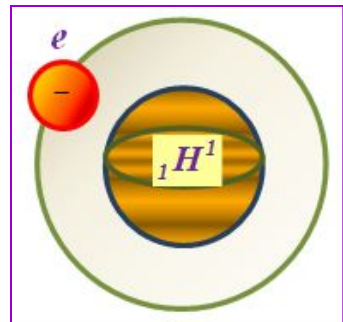
Электростатическое поле

1. Электрический заряд. Свойства электрического заряда. Закон сохранения электрического заряда. Закон Кулона.
2. Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Силовые линии. Принцип суперпозиции электрических полей.
3. Поток вектора напряженности электрического поля. Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме в интегральной форме.
4. Работа по перемещению заряда в электрическом поле. Разность потенциалов. Потенциал электрического поля. Принцип суперпозиции для электростатических потенциалов. Эквипотенциальные поверхности.
5. Связь между напряженностью и потенциалом электрического поля.

1. Элементарный заряд. Закон сохранения заряда



- **Под зарядами** понимают **физическое свойство** элементарной заряженной частицы оказывать силовое воздействие на другую заряженную частицу.
- Несмотря на огромное разнообразие веществ в природе существуют только **два типа электрических зарядов**:
 - **положительные**, которые возникают, например, на стекле при трении его кожей, и
 - **отрицательные** - на эбоните, потертом о мех.
- **Одноименные заряда отталкиваются, разноименные** - притягиваются.
- **Электрический заряд дискретен**, т.е. заряд любого тела составляет целое кратное от элементарного электрического заряда: $q = ne$, где n - положительное целое, e - **модуль** заряда электрона ($e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).



- **Электрон** - носитель элементарного **отрицательного** заряда.
- **Протон** - ядро атома водорода - носитель элементарного **положительного** заряда, в состав атома водорода входит один электрон и один протон.
- **Атом водорода**, как и атомы всех других веществ **электрически нейтрален**, т.е. суммарный положительный заряд атома равен по модулю суммарному отрицательному заряду $Z_p = Z_e$.

Существуют **элементарные частицы** - **кварки**, их заряды - дробные от заряда электрона, **но кварки не появляются в свободном состоянии**.

$$\left(\pm \frac{1}{3}e, \pm \frac{2}{3}e \right)$$

Электрический заряд является релятивистски **инвариантным**: его величина не зависит от системы отсчета, а значит, не зависит от того, движется он или покоится.

Электризация тел. Закон сохранения электрического заряда

- Все тела в природе **способны электризоваться**, т.е. приобрести (отдавать) электрический заряд.
- **Электризация тел** может осуществляться различными способами:
 - соприкосновением (трением),
 - электростатической индукцией при помещении тела во внешнем электрическое поле и др.
- Всякий процесс электризации сводится **к разделению зарядов**, при котором на одном из тел (или частей тела) появляется **избыток положительных** зарядов, а на другом (или другой части тела) - избыток **отрицательных** зарядов.
- **Общее количество зарядов обоих знаков**, содержащихся в телах **не изменяется**, заряды **только перераспределяются** между телами.
- **Электрически замкнутая система** - система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами.
- **Закон сохранения электрического заряда** - алгебраическая сумма электрических зарядов **любой замкнутой системы** остается неизменной, какие бы процессы не происходили бы внутри этой системы:

$$\sum_{i=1}^N q_i = \text{const} \iff q_1 + q_2 + \dots + q_N = q'_1 + q'_2 + \dots + q'_N = \text{const}$$

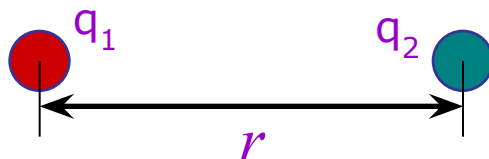
Вывод: в замкнутой системе тел **не могут наблюдаться** процессы рождения или исчезновения зарядов **только** одного знака.

- Перенос электрического заряда в веществе называется **пропусканием электрического тока**.
- По способности пропускать электрический ток все вещества делятся на проводники, полупроводники и диэлектрики.
- **Единица измерения электрического заряда** - **Кулон** - электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока **1 ампер** за время **1 с**.

Закон Кулона

Точечным зарядом называют заряженное тело, размерами которого в условиях данной задачи **можно пренебречь**.

Два точечных электрических заряда q_1 и q_2 действуют друг на друга с силой, которая направлена вдоль прямой, соединяющей их, и равна:



$$F = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \Leftrightarrow F = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} \Leftrightarrow \vec{F} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^3} \vec{r}$$
 через вектор \vec{r}

Примеч:



Одноимённые заряды отталкиваются



Разноимённые заряды притягиваются

r – расстояние между зарядами q_1 и q_2

ϵ – диэлектрическая проницаемость среды (безразмерная величина, $\epsilon \geq 1$)

$$\epsilon = \frac{F_{\text{вакуум}}}{F_{\text{среды}}}$$

ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума:

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Фарад}}{\text{метр}} \Leftrightarrow k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$$

Вывод: любой электрический заряд q_a создает вокруг себя электрическое поле, которое с силой Кулона F_k действует на любой другой заряд, который как бы **пробует** поле, поэтому часто называется **пробным зарядом** q_n .

Следствие: закон Кулона справедлив также для заряженных тел **сферической формы**, заряды которых распределены **равномерно** по объему или по поверхности этих тел.

2. Понятие электрического поля

- *Поле* – это **особый вид материи**, существующий наряду с веществом, но **не воспринимаемый** непосредственно человеческими чувствами.
- С помощью соответствующей аппаратуры наличие поля легко определяется.
- *Поля бывают*: 1) электрические, 2) магнитные и 3) гравитационные.

Электрический заряд q_a всегда создает вокруг себя электрическое поле.

- **Электрическое поле** – это поле, создаваемое в пространстве вокруг себя электрически заряженным телом (зарядом).
- **Электростатическое поле** - электрическое поле, созданное **неподвижным** зарядом.
- Следует отметить, что **движущийся электрический заряд** создает вокруг себя не только **электрическое поле**, но и **магнитное поле**.
- Нас в этой лекции интересовать будет **электростатическое поле**.

Характеристики электрического поля

Электрическое поле имеет две характеристики:

- 1) **Напряжённость** \vec{E} - силовая характеристика
- 2) **Потенциал** φ - энергетическая характеристика

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1q_2}{r^3} \vec{r}$$

сила Кулона в векторном виде

Напряжённость электрического поля

Напряжённость электрического поля E – это **векторная** величина, численно равная отношению силы Кулона, с которой электрическое поле действует на **точечный положительный заряд**, помещённый в данную точку поля, к величине этого заряда $q_{пр}$:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1q_{пр}}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{пр}}$$

Формула для подсчёта E

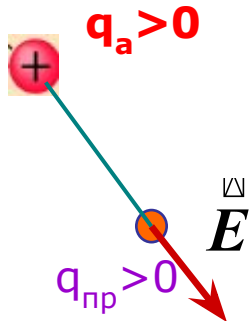
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q_1}{r^2}$$

$$E = \frac{k}{\epsilon} \frac{q_1}{r^2}$$

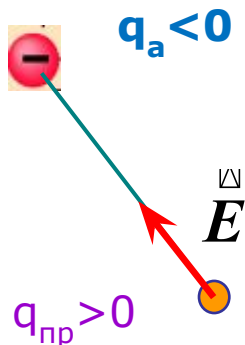
Напряжённость электрического поля, созданного зарядом q_1 в векторном виде

Вывод из формул: направление напряжённости E совпадает с направлением кулоновской силы F (точнее, вектора r)

Напряжённость E в СИ измеряется в **Вольтах на метр (В/м)**, причём **1 В/м = 1 Н/Кл**.



Одноимённые заряды отталкиваются

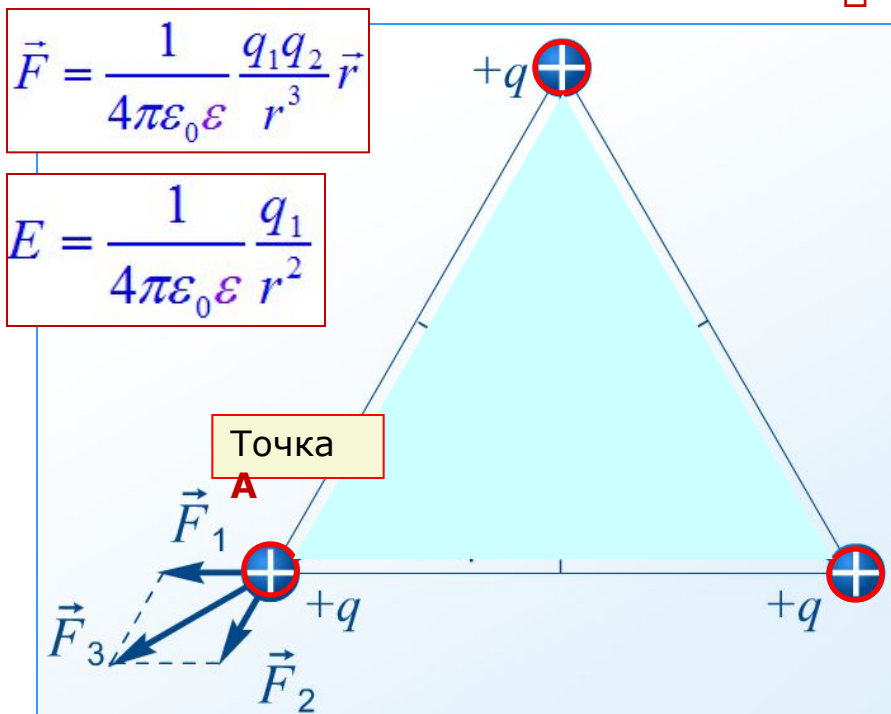


Разноимённые заряды притягиваются

Принцип суперпозиции для сил и напряженностей электрического поля

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{np}}$$

Силы кулоновского взаимодействия F_i и **напряженности** электрических полей $E_i = F_i / q_{np}$ подчиняются **принципу суперпозиции**.



□ **Для кулоновских сил:** Если заряженное тело взаимодействует **одновременно** с несколькими заряженными телами, то **резльтирующая сила** F , действующая на данное тело, равна **векторной сумме сил** F_i , действующих на это тело со стороны всех других заряженных тел:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$$

Пример: на заряд в точке **A** действуют кулоновские силы F_1 и F_2 со стороны положительных зарядов q_1 и q_2 . Равнодействующая сила – F_3 .

Поместим в центр треугольника отрицательный заряд Q : на заряд в точке **A** кроме равнодействующей силы F_3 со стороны отрицательного заряда начнет действовать сила. Тогда векторная сумма:

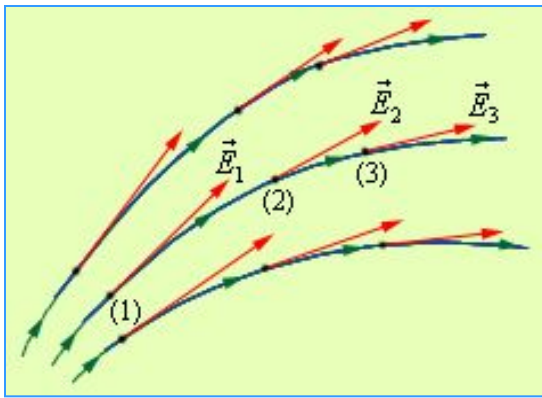
$$F_{\text{равнодеств}} = F_3 + F_4$$

□ **Для напряженностей электрических полей:** напряженность электрического поля E , создаваемого системой зарядов в данной точке пространства, равна векторной сумме напряженностей электрических полей, создаваемых в той же точке зарядами в отдельности:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$$

Так как $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_{np}}$, то на рисунке в точке будет находиться **пробный заряд** q_{np} - единичный (**1 кулон**) и положительный. Тогда векторы – **напряженности полей** остальных зарядов.

Силовые линии

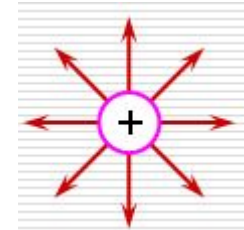


- **Силовые линии** – линии, касательные к которым в каждой точке поля параллельны направлению напряженности в этой точке. Аналогичны линиям тока в гидродинамике.
- **Силовые линии всегда** начинаются на положительном заряде, оканчиваются на отрицательном заряде.

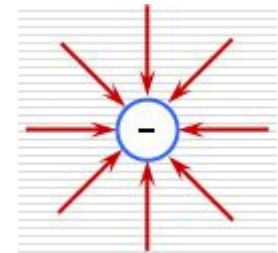
Принципы построения силовых линий

1. Силовые линии вектора E всегда начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных (т.е. направлены от "+" к "-").
2. Силовые линии вектора E подходят к поверхности зарядов **под прямым углом**.
3. **Для количественного описания** вектора E силовые линии проводят **с определенной густотой**.

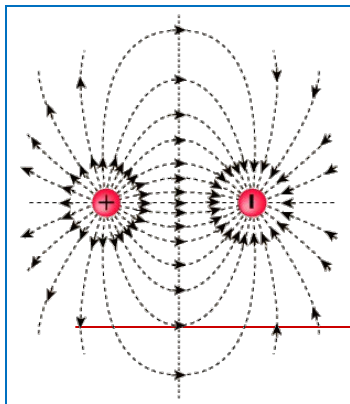
Число линий напряженности, пронизывающих **единицу** площади поверхности, перпендикулярную линиям напряженности, должно быть **равно (пропорционально) модулю вектора E** .



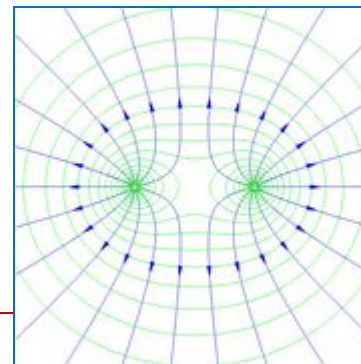
Одинокий положительный заряд



Одинокий отрицательный заряд

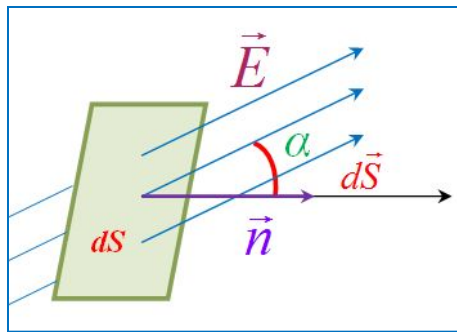
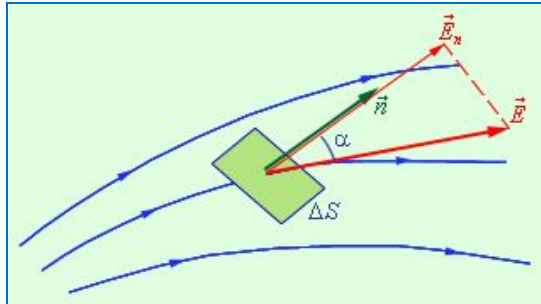


Взаимодействие двух разноимённых зарядов (диполь)



Взаимодействие двух одноимённых зарядов

3. Поток вектора напряженности Φ_E



- Определим **поток** вектора E через произвольную поверхность dS .
- Можно ввести вектор площади: $d\vec{S} = dS \cdot \vec{n}$
 - n - нормаль к поверхности, α - угол между нормалью и силовой линией вектора напряженности E .
- **Поток вектора напряженности Φ_E** («фи большое») - скалярная величина, равная скалярному произведению вектора напряженности на вектор площади S .

Для **однородного** поля:

$$\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{S} = E \cdot S \cdot \cos \alpha$$

Для **неоднородного** поля:

$$d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot dS \vec{n} = E \cdot dS \cdot \cos \alpha = E_n dS$$

где E_n - проекция вектора E на направление n .

- В единицах СИ **поток вектора напряженности Φ_E** измеряется в **Вольт-метрах**:

$$\Phi_E = \left[\frac{B}{M} \cdot M^2 = B \cdot M \right]$$

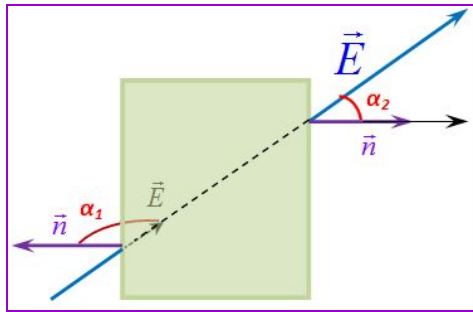
- В случае **криволинейной** поверхности S ее нужно разбить на элементарные поверхности dS , рассчитать поток $d\Phi_E$ через элементарную поверхность, а **общий поток** будет равен сумме или (в пределе) интегралу от элементарных потоков:

интеграл по замкнутой поверхности S
(например, по сфере, цилиндру, кубу и т.д.)

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Теорема Гаусса

Вектор E насквозь пронзает замкнутую поверхность □



Поток вектора напряженности Φ_E является алгебраической (аддитивной) величиной:

- зависит не только от конфигурации поля E , но и от выбора направления n .
- Для замкнутых поверхностей **за положительное направление** нормали принимается **внешняя нормаль**, т.е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью.

Найдем сумму Φ_{2E} и Φ_{1E} :

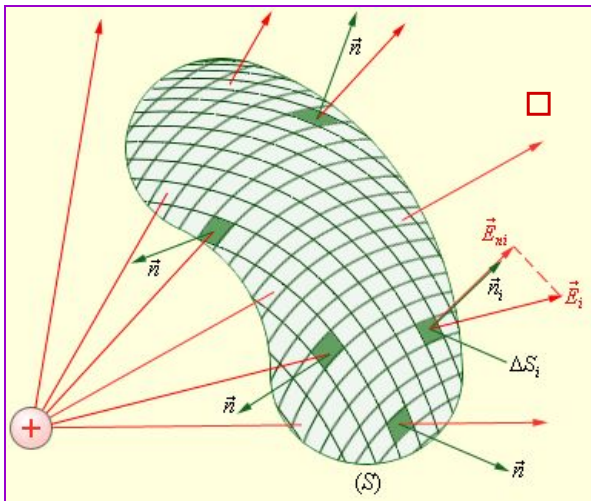
$$\Phi_{2E} = E S \cos \alpha_2$$

$$\Phi_{1E} = E S \cos \alpha_1 = E S \cos(180^\circ - \alpha_2) = -E S \cos \alpha_2$$

$$\Phi_{1E} + \Phi_{2E} = 0$$

Вывод: для однородного поля поток Φ_E **сквозь замкнутую** поверхность **равен нулю**.

□ В случае **неоднородного поля** поток Φ_E через замкнутую поверхность **не равен нулю**.



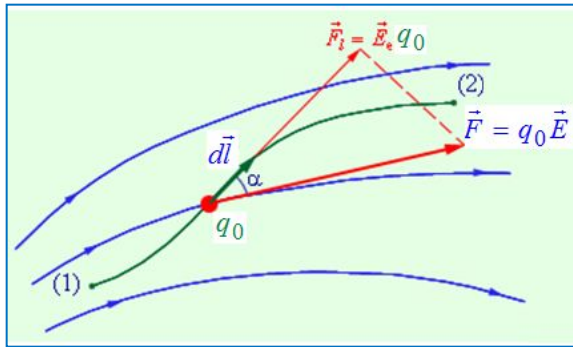
Теперь можно сформулировать **теорему Гаусса** :

Теорема Гаусса: поток вектора напряженности Φ_E через **произвольную замкнутую поверхность** равен алгебраической сумме зарядов, заключенных **внутри этой поверхности**, деленной на ϵ_0 (ϵ_0 - электрическая постоянная):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\Phi}{M}$

4. Работа в электрическом поле

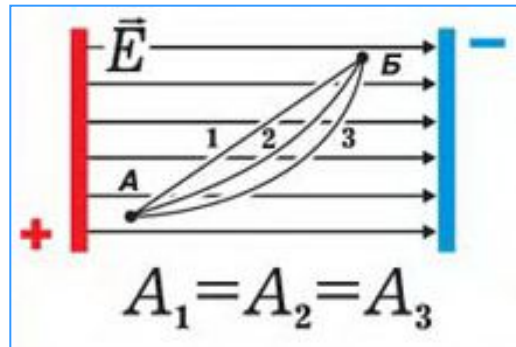


- При перемещении пробного заряда q_0 в **электростатическом** электрическом поле ($E=const$) электрические силы совершают работу, которая при малом перемещении равна:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{l} = q_0 \vec{E} d\vec{l}$$

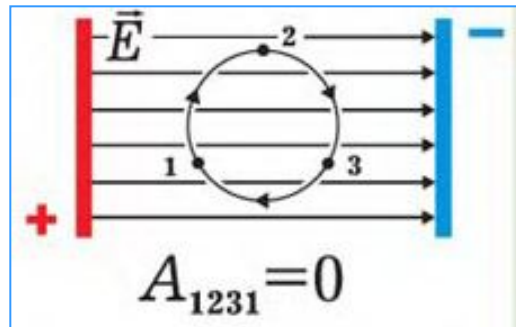
- Электростатическое поле обладает **важным свойством**:
 - работа сил электростатического поля при перемещении заряда из одной точки поля в другую **не зависит от формы траектории**, а **определяется только положением начальной и конечной точек и величиной заряда**.

- Если в качестве пробного заряда q_0 , переносимого из точки **A** поля в точку **B**, взять **единичный положительный заряд**, то элементарная работа сил поля на перемещении dl равна $E dl$, а вся работа сил поля на пути от точки **A** до точки **B** определяется суммированием (интегралом) по элементарным перемещениям:



- **Следствием независимости работы от формы траектории** является **утверждение**: работа сил электростатического поля при перемещении заряда **по любой замкнутой траектории** равна **нулю**.

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$



$$A = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + \int_2^1 \vec{E} d\vec{l} = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

циркуляция вектора E по замкнутому пути L

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля.

Потенциальная энергия $W_{\text{пот}}$

$$A = \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$$

- Это равенство называется **теоремой о циркуляции вектора**.
- **Вывод:** из этой теоремы следует, что **силовые линии** электростатического поля **E не могут быть замкнутыми**.
- В самом деле, если это не так и какая-то силовая линия вектора E замкнута, то, взяв циркуляцию вектора вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с теоремой о циркуляции.
- Действительно, в электростатическом поле **замкнутых линий** вектора E **не существует**: линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или уходят в бесконечность).

Силовые поля, обладающие этим свойством, называют **потенциальными** или **консервативными**.

Работа кулоновских сил при перемещении заряда q зависит только от расстояний r_1 и r_2 :

$$A_{12} = \int_1^2 F dr = \int_1^2 \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} dr = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{q_0q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Вывод: **потенциальная энергия** определена **с точностью** до постоянной величины, зависящей от выбора опорной (нулевой) точки с $W_{\text{пот}} = 0$.

Физический смысл имеет не сама потенциальная энергия, а **разность** ее значений в двух точках пространства.

Поэтому **часто за нулевую точку** считают точку **в бесконечности** ($W_{\text{пот}}(r=\infty) = 0$).

$$W_{\text{пот}1} - W_{\text{пот}2} = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{q_0 \cdot q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}$$

Электрический потенциал ϕ

Электрический заряд q_a создает вокруг себя электрическое поле.

Энергетической характеристикой электрического поля является потенциал ϕ в данной точке поля.

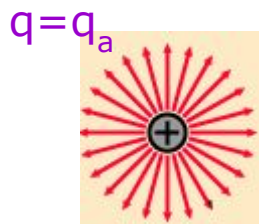
Потенциал ϕ (греческая буква «фи») – это физическая скалярная величина (т.е. число, в отличие от вектора), **равная отношению** потенциальной энергии $W_{\text{пот}}$ электрического заряда q_a , создающего поле в данной точке, к величине **пробного** заряда $q_{\text{п}}$:

$$\phi = \frac{W_{\text{пот}}}{q_{\text{п}}}$$

Другое определение:

Потенциал ϕ – это отношение работы $A_{1-\infty}$ сил поля по перемещению **пробного** электрического заряда $q_{\text{п}}$ из данной точки поля в точку, потенциал которой принимается равным нулю (в бесконечность), к величине этого заряда $q_{\text{п}}$:

$$\phi = \frac{A_{1-\infty}}{q_{\text{п}}}$$



$$\phi = \frac{W_{\text{пот}}}{q_0} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$$



$$A_{12} = -\Delta W_{\text{пот}} = q_0 (\phi_1 - \phi_2) = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$$

разность потенциалов

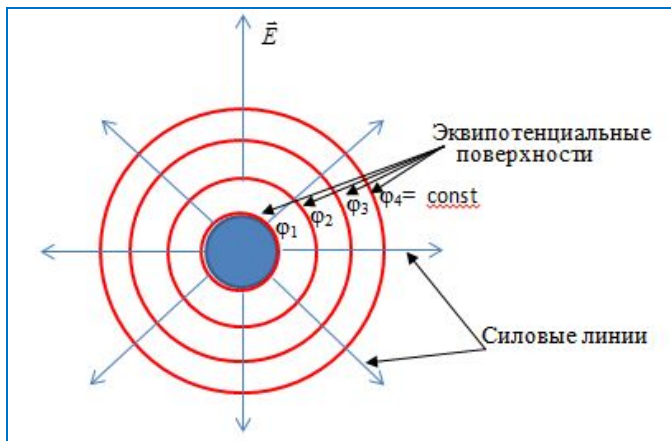
Электрическое поле **полностью описывается** векторной функцией $E(r)$. Зная ее, мы можем найти силу, действующую на заряд в любой точке поля, вычислить работу сил поля при каком угодно перемещении заряда и др.

Но, **зная потенциал $\phi(r)$** данного электрического поля, можно достаточно **просто восстановить** и само поле.

В СИ **единицей измерения** потенциала ϕ и **разности потенциалов $\phi_1 - \phi_2$** является Вольт (В), причём: $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}$

Свойства потенциала электростатического поля

1. Это скалярная величина.
2. Потенциал величина **непрерывная**, он не изменяется на границе раздела двух заряженных сред.
3. **На бесконечности** потенциал системы неподвижных стационарных зарядов полагается равным **нулю**.
4. Для потенциала электростатического поля **справедлив принцип суперпозиции**.



- Введем понятие **эквипотенциальной поверхности** – поверхности, во всех точках которой потенциал ϕ имеет одно и то же значение.
- Вектор напряженности \vec{E} направлен в каждой точке **по нормали** к эквипотенциальной поверхности в сторону **уменьшения** потенциала ϕ .
- Вектор \vec{E} направлен в сторону **уменьшения** ϕ , или в сторону, **противоположную** вектору $\text{grad } \phi$.

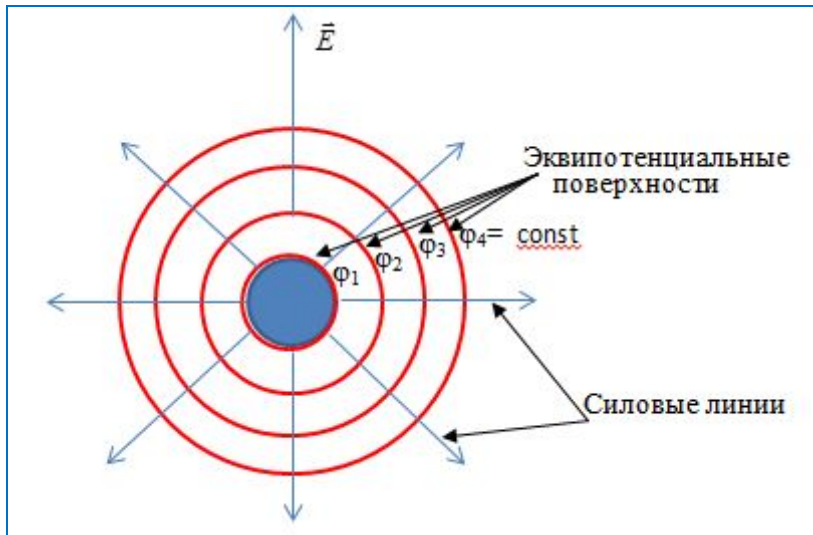
Эквипотенциальные поверхности **наиболее целесообразно** проводить так, чтобы **разность потенциалов** для двух соседних поверхностей **была бы одинаковой**.

Тогда **по густоте эквипотенциальных поверхностей** можно наглядно судить о **значении напряженности поля \vec{E}** в разных точках.

Там, где эти поверхности расположены **гуще** («**круче потенциальный рельеф**»), там **напряженность поля больше**.

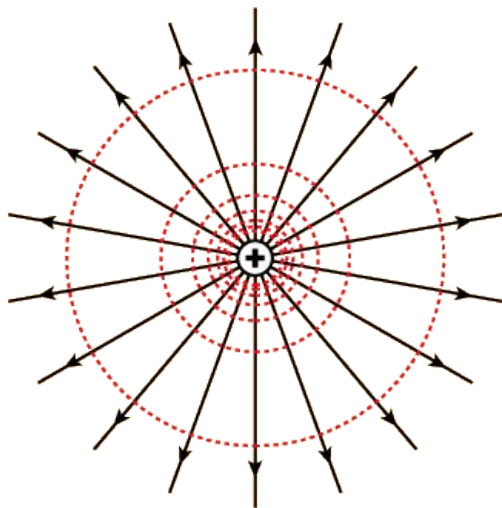
Так как вектор **всюду нормален** к эквипотенциальной поверхности, линии вектора \vec{E} **перпендикулярны** к этим поверхностям.

Эквипотенциальные поверхности

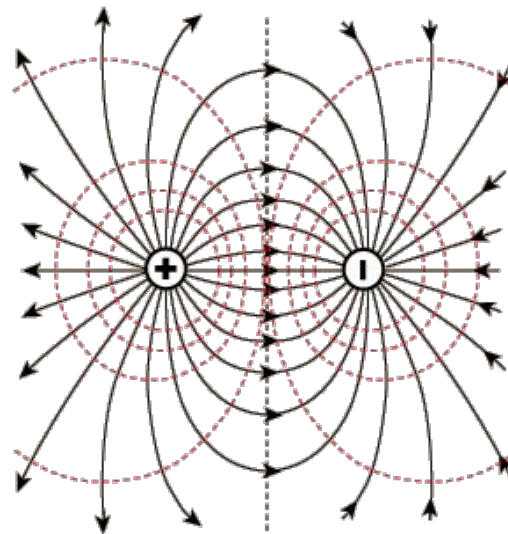


- Эквипотенциальные поверхности – это поверхности равного потенциала ($\varphi = \text{const}$).
- Значит, **разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$** на них **равна нулю**.
- Работа **A** по перемещению заряда **вдоль эквипотенциальной поверхности** равна **нулю**.

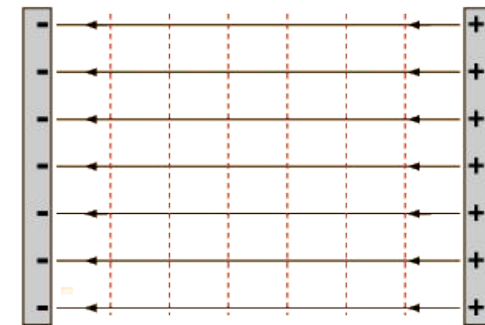
Силовые линии (чёрные сплошные линии) в каждой точке **перпендикулярны** эквипотенциальным поверхностям (красные пунктирные линии).



Одинокий положительный заряд



Взаимодействие двух разноимённых зарядов (диполь)



Однородное электрическое поле 15

5. Взаимосвязь между напряженностью и потенциалом

Вспомним:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{l} = q_0 \vec{E} d\vec{l}$$

Но:

$$\delta A = -q_0 d\varphi$$

$$d\varphi = -\vec{E} d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{l}} = -\frac{d\varphi}{dr} = -\text{grad}_r \varphi$$

$$\text{grad}_r \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}$$

градиент потенциала

где l или r - направление или вектор направления

Приращение $d\varphi$ является **полным дифференциалом** от координат (x, y, z) :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

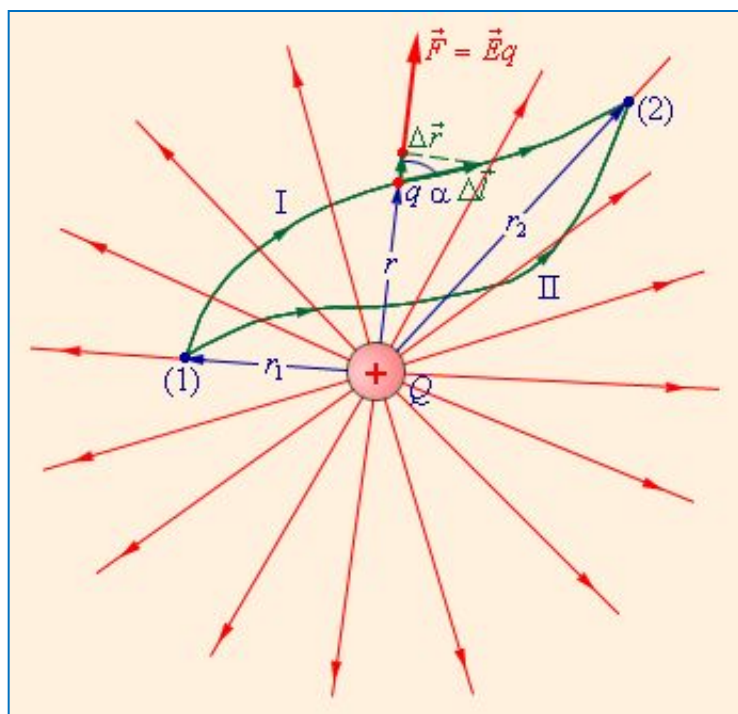
По принципу суперпозиции для напряженности поля \vec{E} :

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i = \sum_i \text{grad} \varphi_i = \text{grad} \sum_i \varphi_i = \text{grad} \varphi$$

- **Вывод:** принцип суперпозиции работает и для потенциала электрического поля.
- Таким образом, **потенциал системы** неподвижных точечных зарядов **равен алгебраической сумме потенциалов**, создаваемых отдельными зарядами:

$$\varphi = \sum_i \varphi_i = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$$

Спасибо за внимание!



На рисунке изображены силовые линии кулоновского поля точечного заряда Q и **две различные траектории** перемещения пробного заряда $q=q_0$ из начальной точки (1) в конечную точку (2).

