Лекция N11

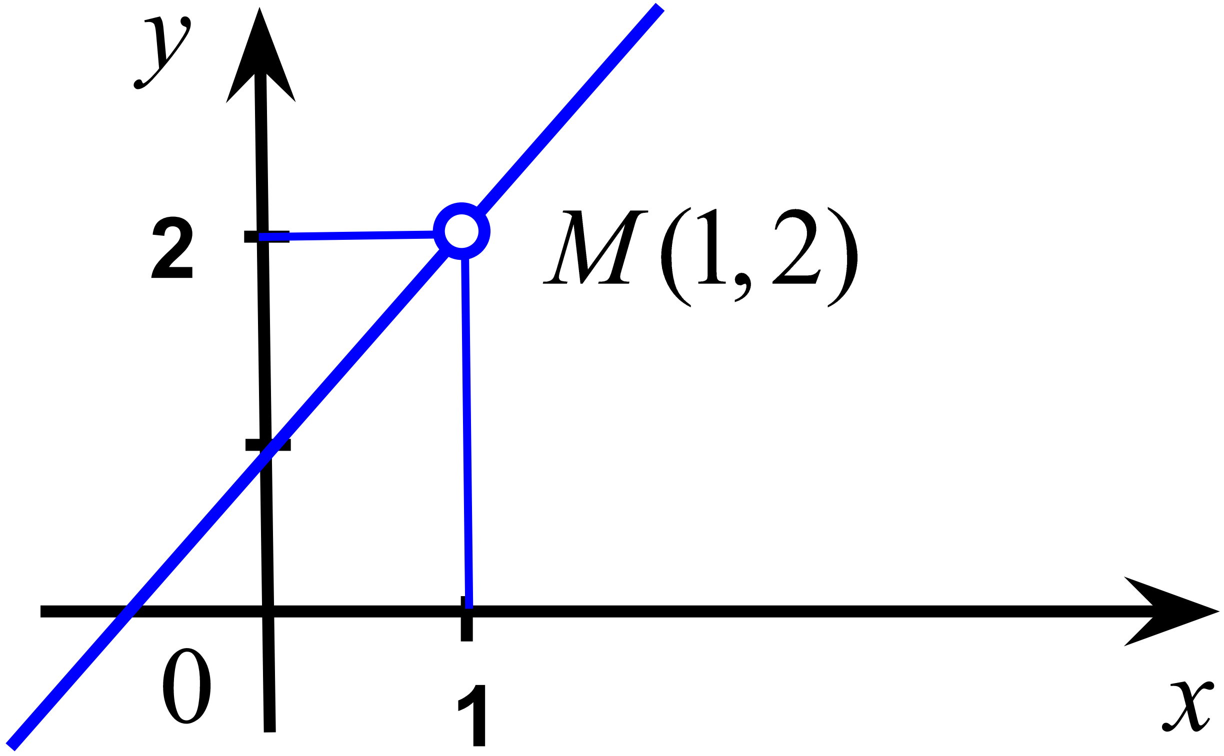
Лектор: доц. Лаптева Надежда Александровна

Тема: Функция. Предел функции в точке. Односторонние пределы. Пределы на бесконечности. Непрерывность функции. Точки разрыва функции и их классификация.

1. Предел в точке.

Рассмотрим пример.
Построить график функции

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \begin{cases} x + 1, & x \neq 1, \\ \text{не сущ.}, & x = 1. \end{cases}$$



Формула теряет смысл при $x_0 = 1.$

В этом случае пишут:

$$y(x) \to 2 \quad \text{при} \quad x \to 1.$$

По-другому:

$$\lim_{x \to 1} y(x) = 2.$$

Способы вычисления предела

1. Предел дроби при $x \to \infty$:
деление на старшую степень.

<u>Пример.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x^2}{2+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}-2}{\underset{\to 0}{\frac{2}{x^2}}+1}=-2.$$

2. Разложение на множители, когда

$x \not\to \infty$

Пример.

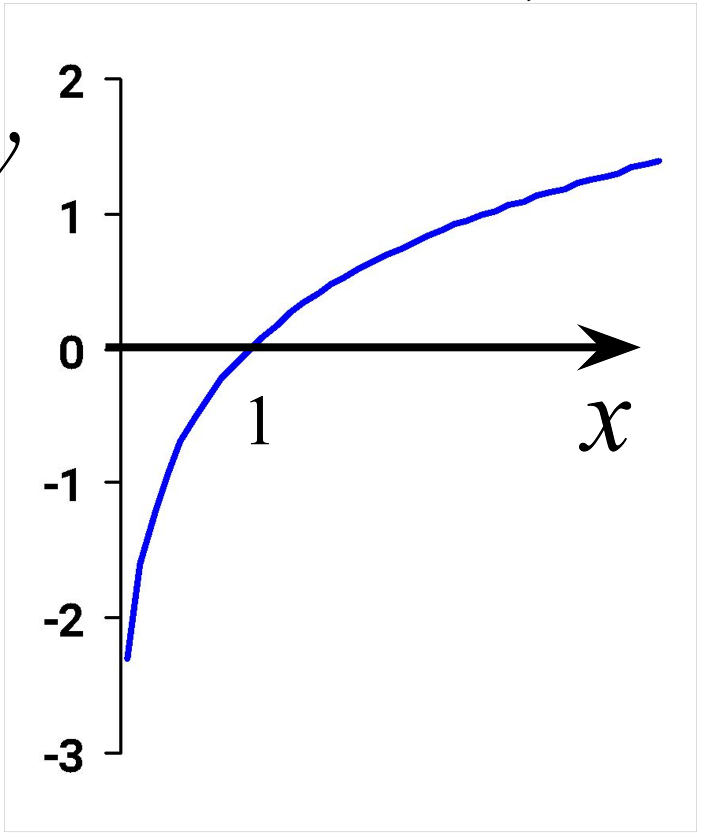
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

Односторонние пределы

Во многих случаях функция определена только с одной стороны от x_0. Тогда предел называют пределом слева, или пределом справа.

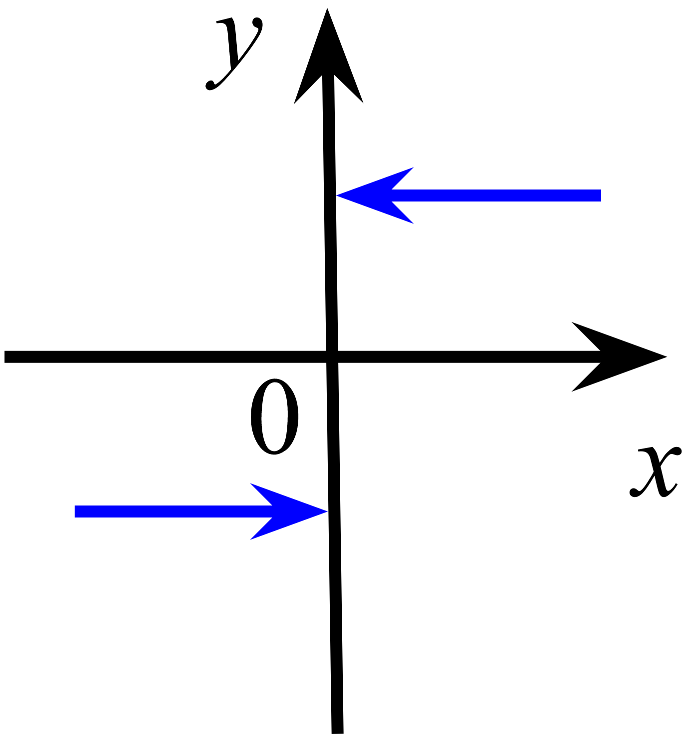
<u>Пример 1.</u>

$$\lim_{x\to 0+} \ln x = -\infty.$$



Пример 2.

$$y(x) = \operatorname{sign} x = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$



$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sign} x = 1$$

$$\lim_{x \to 0-} \operatorname{sign} x = -1$$

Опр. Функция $y = y(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} y(x) = y(x_0).$$

Все элементарные функции непрерывны на своей области определения.

Пример. $y = x^2, \quad y = e^x, \quad y = \sin x$

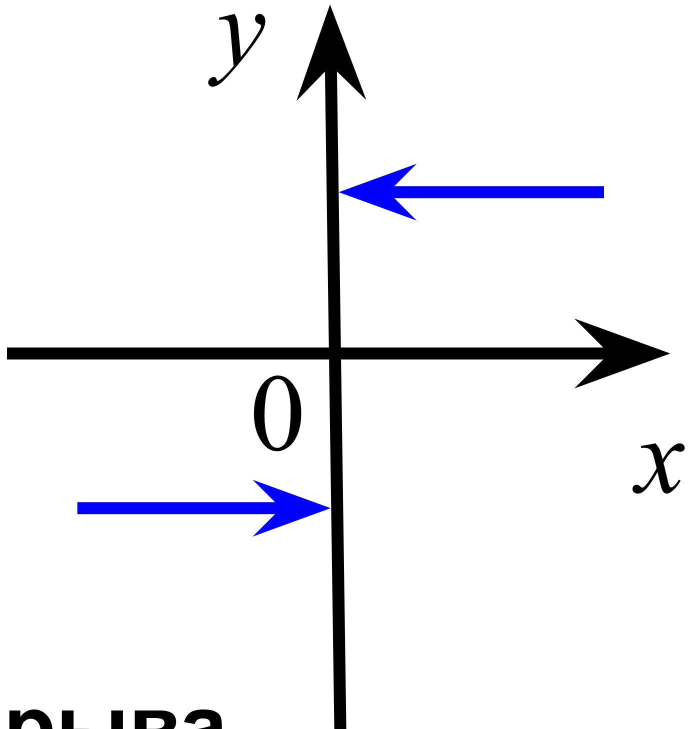
- непрерывные функции.

<u>Опр.</u> Если в точке x_0 функция не является непрерывной, то x_0 - точка разрыва.

Рассматриваются точки разрыва 1-го и 2-ого рода.

Пример.

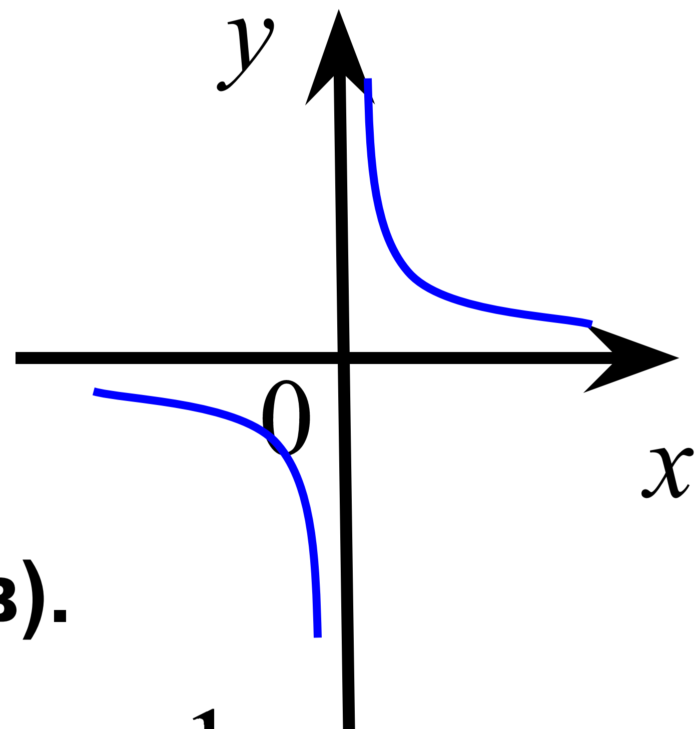
$$y(x) = \operatorname{sign} x.$$



$x_0 = 0$ - точка разрыва 1-го рода (конечный разрыв).

Пример.

$$y(x) = \frac{1}{x}.$$



$x_0 = 0$ **- точка разрыва 2-ого рода (бесконечный разрыв).**

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty; \qquad \lim_{x \to 0-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Тема: Производная функции, правила вычисления. Производная сложной функции. Производные высших порядков. Дифференциал функции.

Приращение аргумента и приращение функции

Пусть дана функция $y = f(x)$. Рассмотрим два значения её аргумента: исходное x_0 и новое x. Разность $x - x_0$ называется приращением аргумента x в точке x_0 и обозначается символом Δx.

$y - y_0 = f(x) - f(x_0)$ **называется** **приращением функции** **и обозначается** Δy.

<u>Опр.</u> Производной функции в точке x_0 **называется**

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y = x^2$.

Найдем Δy:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Таким образом $(x^2)' = 2x.$

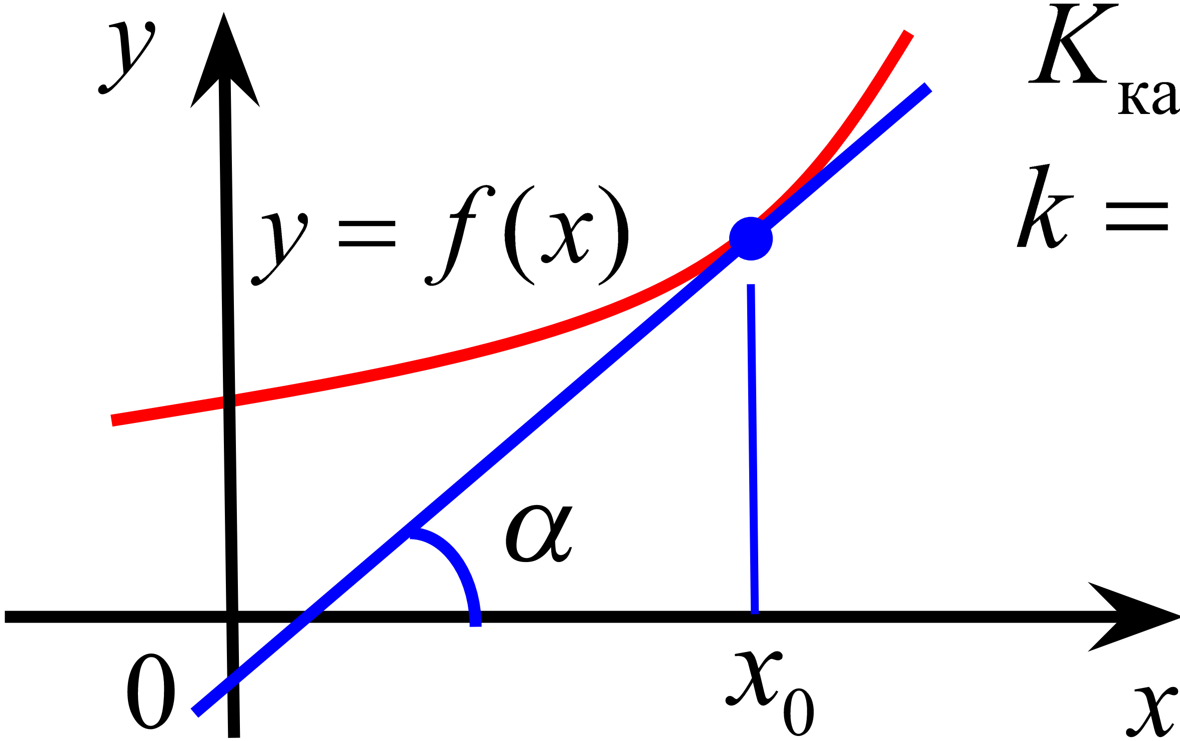
Эта производная определена на всей числовой оси, так как при её нахождении значение x было выбрано произвольно.

<u>Опр.</u> Функция $y = f(x)$, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке.

Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в интервале (a,b), если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

Геометрический смысл производной

Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 равен значению производной этой функции в точке x_0.



$$K_{\text{кас}} = f'(x_0).$$

$$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0).$$

Функция $y = |x|$ **не имеет производной в точке** $x = 0$, **т.к. график функции** $y = |x|$ **в точке** $O(0,0)$ **не имеет касательной.**

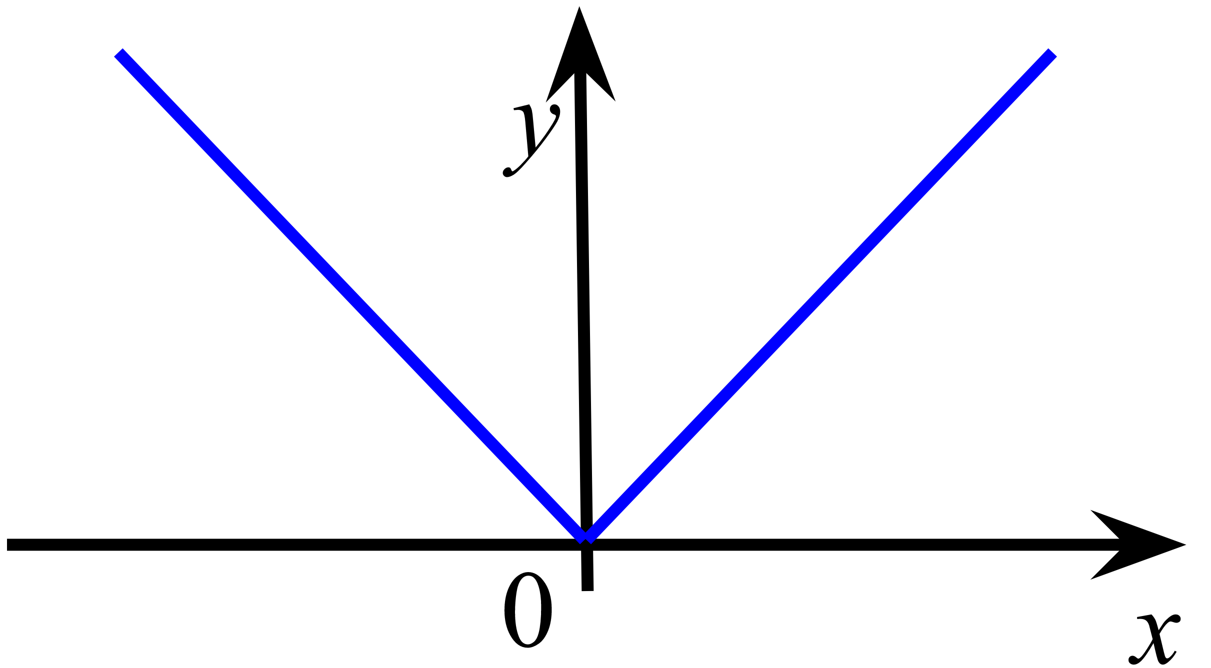


Таблица производных (степени)

1. $\left(\text{const}\right)' = 0.$

2. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}.$

3. $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a;\quad \left(e^{x}\right)' = e^{x}.$

4. $\left(\log_{a} x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a};\quad \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}.$

Таблица производных (тригонометрия)

5. $\left(\sin x\right)' = \cos x.$

6. $\left(\cos x\right)' = -\sin x.$

7. $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

8. $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Таблица производных (arc-тригонометрия)

9. $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

10. $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

11. $$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

12. $$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Основные правила дифференцирования

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке x, то в этой точке дифференцируемы и их сумма и произведение, причем

$$(u+v)' = u' + v',$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u.$$

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы в данной точке x и $v(x) \neq 0,$ то в той же точке дифференцируемо и их частное, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}.$$

<u>Примеры.</u>

1) $y = x^2 \cdot \sin x.$ **Найти** y'.

$$y' = \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' =$$

$$= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x,$$

2) $$y = \frac{e^x}{x}.$$ **Найти** $y'(1).$

$$y' = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2};$$

$$y'(1) = \frac{e \cdot (1-1)}{1} = 0, \qquad y'(1) = 0.$$

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ **и** $u = \varphi(x)$.
Тогда y **есть сложная функция** x:

$$y = f\left(\varphi(x)\right).$$

Теорема

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Примеры

1) $y = \sin 2x.$

$$y' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x.$$

2) $y = \cos^2 x.$

Запишем $y = \left(\cos x\right)^2 :$

$$y' = 2\cos x \cdot \left(\cos x\right)' =$$

$$= -2\cos x \cdot \sin x = -\sin 2x.$$

Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором интервале.

Тогда её производная $f'(x)$ является функцией от x. Пусть эта функция также имеет производную. Эта производная называется второй производной и обозначается

$$y'' = \left(f'(x)\right)'.$$

Аналогично, $y''' = \left(y''\right)'$ **и т.д.:**

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)'.$$

Производные порядка выше первого называются производными высшего порядка.

Примеры.

1) Найти производную третьего порядка от функции $y = e^{2x}$.

$$y = e^{2x};\ y' = 2e^{2x}; y'' = 4e^{2x};\ y''' = 8e^{2x}.$$

2) $y = \ln x$. **Найти** $y^{(3)}$.

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1};\quad y'' = -x^{-2};\quad y''' = 2x^{-3}.$$

Дифференциал функции

Рассмотрим функцию $y = x^3.$

Найдем $\Delta y.$

$$\Delta y = \left(x + \Delta x\right)^3 - x^3 =$$

$$= \cancel{x^3} + 3x^2 \cdot \Delta x + 3\left(\Delta x\right)^2 \cdot x + \left(\Delta x\right)^3 - \cancel{x^3} =$$

$$= 3x^2 \cdot \Delta x + \left(3x + \Delta x\right) \cdot \left(\Delta x\right)^2.$$

Приращение функции можно рассматривать как сумму двух слагаемых:

$3x^2\Delta x$ **- линейное относительно** Δx;

$\left(3x+\Delta x\right)\cdot\left(\Delta x\right)^2$ **- нелинейное относительно** Δx.

При $\Delta x \to 0$ оба слагаемых стремятся к нулю, но второе слагаемое быстрее стремится к нулю. Поэтому при малых Δx считают, что $\Delta y \approx 3x^2 \Delta x$ (т.е. считают, что Δy приближенно равно линейной части). Эту часть называют главной частью приращения функции или дифференциалом.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначают dy.

Теорема. **Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x дифференциал, то она имеет в этой точке производную и наоборот, если функция $y = f(x)$ имеет в точке x производную, то она имеет в этой точке дифференциал.**

Выражение для дифференциала записывается в форме

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Примеры.

Найти дифференциалы функций

1) $y = \sin x. \quad dy = \cos x\, dx.$

2) $y = e^{3x}.$

$$dy = \left(e^{3x}\right)' dx \quad \Rightarrow dy = 3e^{3x}\, dx.$$

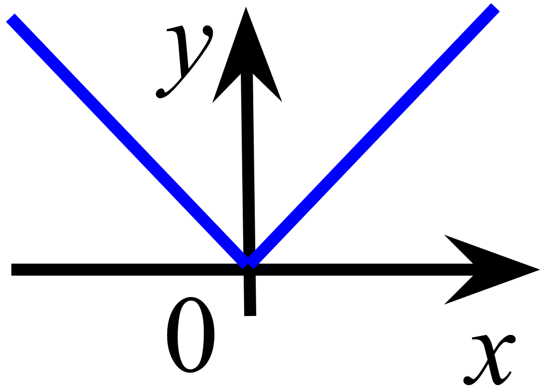
Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.

Обратная теорема неверна: существуют непрерывные функции, которые в некоторых точках не являются дифференцируемыми.

Пример.

$$y = |x|.$$



В точке $x = 0$ **функция** $f(x) = |x|$ **непрерывна, так как**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x|.$$

Справа от нуля $|x| = x,$ **поэтому**

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1.$$

Слева от нуля $|x| = -x,$ **поэтому**

$$\lim_{x\to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1.$$

Таким образом, отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ **при** $\Delta x \to 0$ **справа и слева имеет различные пределы, а это значит, что при** $\Delta x \to 0$ **это отношение предела не имеет, т.е. производная** $f'(x)$ **в точке** $x = 0$ **не существует.**