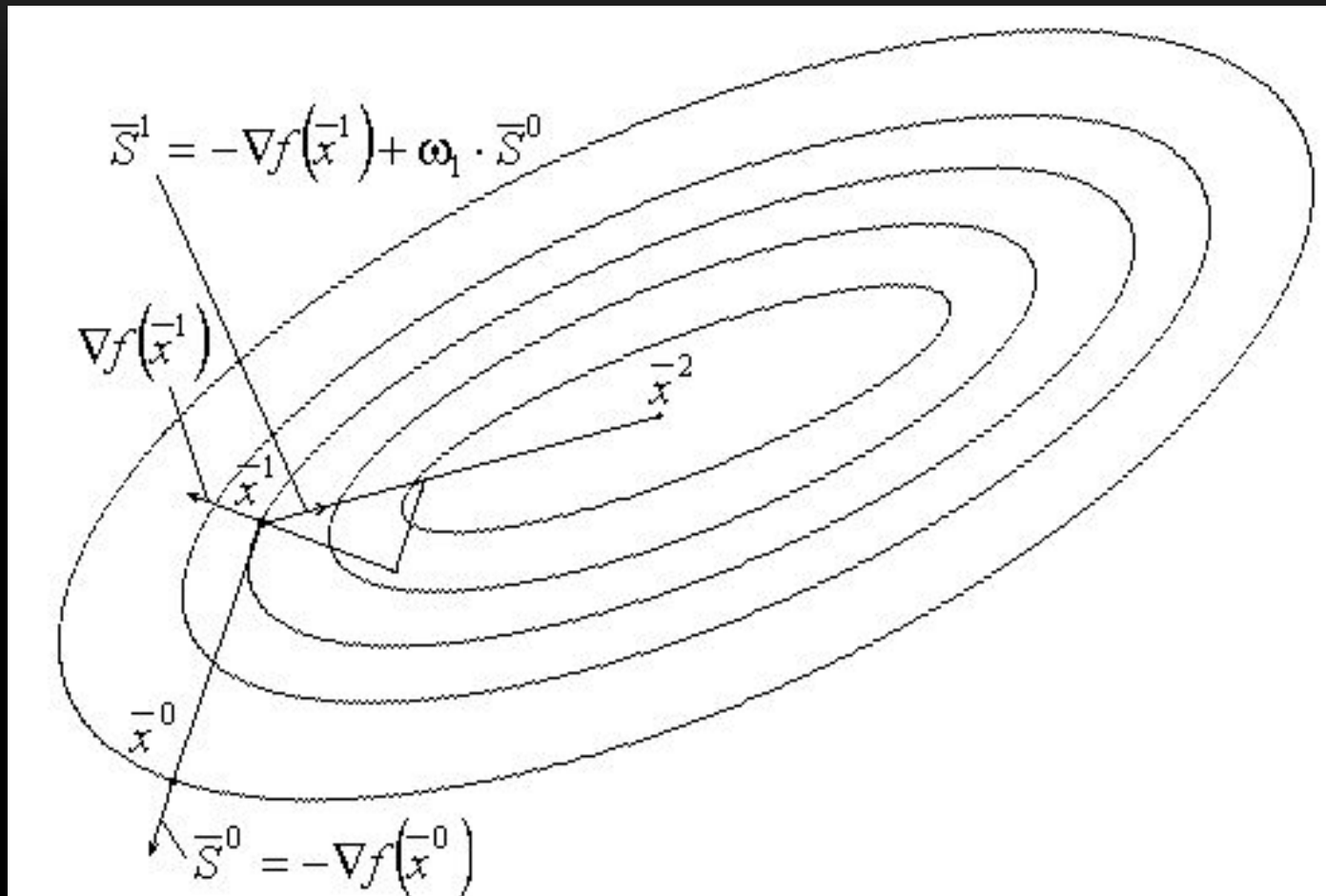


МЕТОДЫ ФЛЕТЧЕРА-РИВСА, ДЭВИДОНА-
ФЛЕТЧЕРА-ПАУЭЛЛА, КУБИЧЕСКОЙ
ИНТЕРПОЛЯЦИИ

СОДЕРЖАНИЕ

- Метод Флетчера-Ривза
 - Алгоритм Дэвидона - Флетчера - Пауэлла
 - Метод кубической интерполяции
-

МЕТОД ФЛЕТЧЕРА-РИВЗА



МЕТОД СОПРЯЖЕННЫХ ГРАДИЕНТОВ

Формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции.

Определение.

Два n -мерных вектора x и y называют сопряженными по отношению к матрице H (или H -сопряженными), если скалярное произведение $(x, Hy) = 0$. Здесь H - симметрическая положительно определенная матрица размером $n \times n$.

СТРАТЕГИЯ МЕТОДА ФЛЕТЧЕРА-РИВСА

Состоит в построении последовательности точек $\{x^k\}$, $k=0, 1, 2, \dots$ таких, что

$$f(x^{k+1}) < f(x^k), \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Точки последовательности $\{x^k\}$ вычисляются по правилу:

$$x_{k+1} = x_k - t_k d_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$d_k = \nabla f(x_k) + b_{k-1} \nabla f(x_{k-1})$$

$$b_{k-1} = \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2}$$

СХОДИМОСТЬ МЕТОДА

Теорема 1. Если квадратичная функция $f(x) = (x, Hx) + (b, x) + a$ с неотрицательно определенной матрицей H достигает своего минимального значения на R^n , то метод Флетчера-Ривса обеспечивает отыскание точки минимума не более чем за n шагов.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и ограничена снизу на R^m , а ее градиент удовлетворяет условию

Липшица

Тогда при $\|\nabla f(X) - \nabla f(Y)\| \leq L \|X - Y\|, \forall X, Y \in R^m, L > 0$. Полака-Рибьера имеем

$$X^0 \in R^m$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x^k)\| = 0$$

Теорема 2 гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к стационарной точке x^* , где $\nabla f(x^*)=0$. Поэтому найденная точка x^* нуждается в дополнительном исследовании для ее классификации. Метод Полака-Рибьера гарантирует сходимость последовательности $\{x^k\}$ к точке минимума только для сильно выпуклых функций.

Оценка скорости сходимости получена только для *сильно* выпуклых функций, в этом случае последовательность $\{x^k\}$ сходится к точке минимума функции $f(x)$ со скоростью: $|x^{k+n} - x^*| \leq C|x^k - x^*|$, $k = \{0, n, 2, \dots\}$

АЛГОРИТМ ДЭВИДОНА - ФЛЕТЧЕРА - ПАУЭЛЛА

Рассмотрим алгоритм Дэвидона - Флетчера - Пауэлла минимизации дифференцируемой функции нескольких переменных. В частности, если функция квадратичная, то, как будет показано позднее, метод вырабатывает сопряженные направления и останавливается после выполнения одной итерации, т.е. после поиска вдоль каждого из сопряженных направлений.

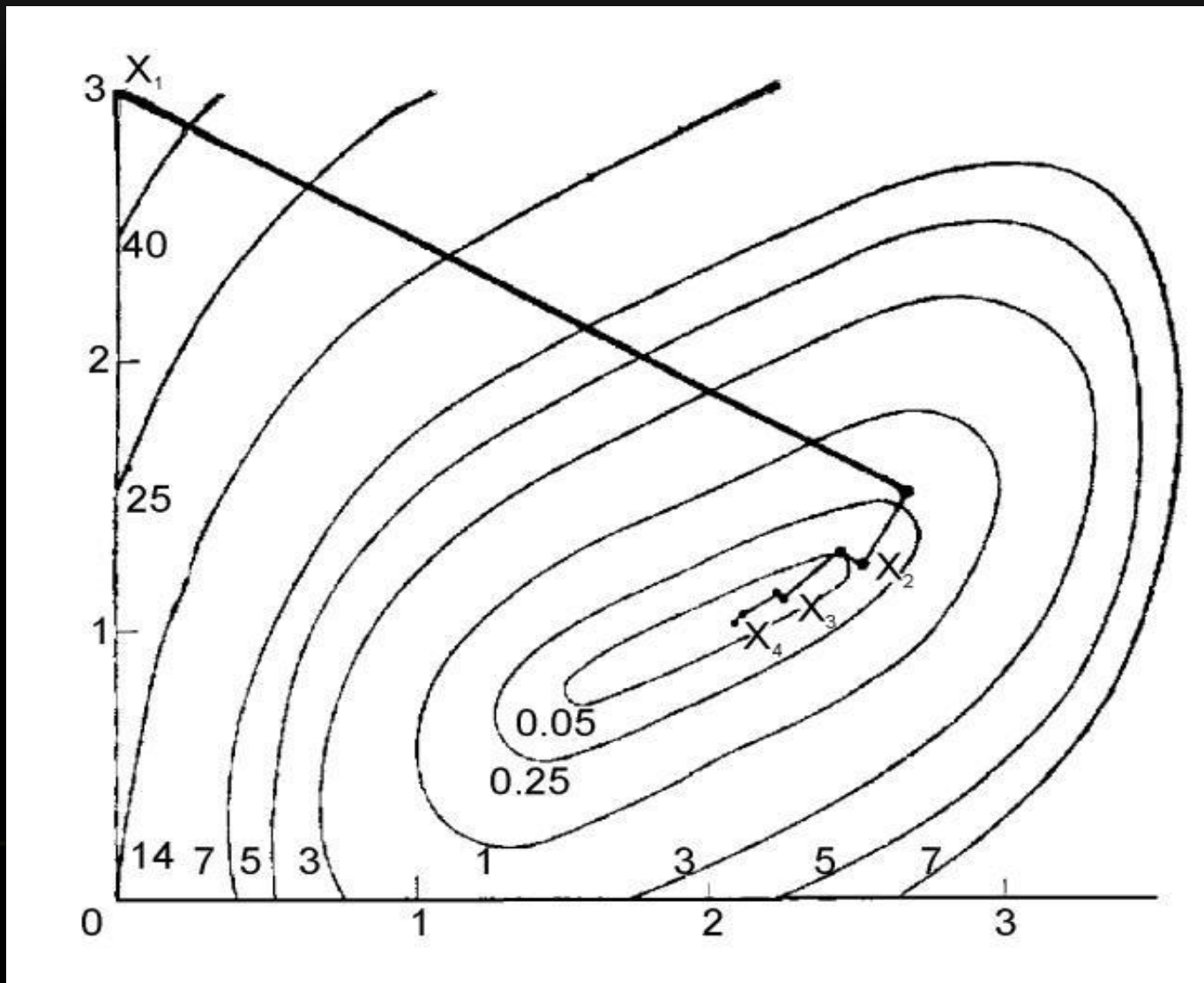
РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПО МЕТОДУ ДЭВИДОНА - ФЛЕТЧЕРА – ПАУЭЛЛА

Рассмотрим следующую задачу :

минимизировать $(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$.

k	x_k	y_k	$f(y_k)$	Δ_k	α_k	y_{k+1}
0	(0, 0)	(0, 0)	16	0.09	0.0005	(0.005, 0.005)
1	(0.005, 0.005)	(0.005, -0.08)	0.09	0.006	0.004	(-0.005, 0.005)
2	(-0.005, 0.005)	(0.004, 0.004)	0.006	0.004	0.004	(0.004, 0.004)

МЕТОД ДЭВИДОНА - ФЛЕТЧЕРА – ПАУЭЛЛА

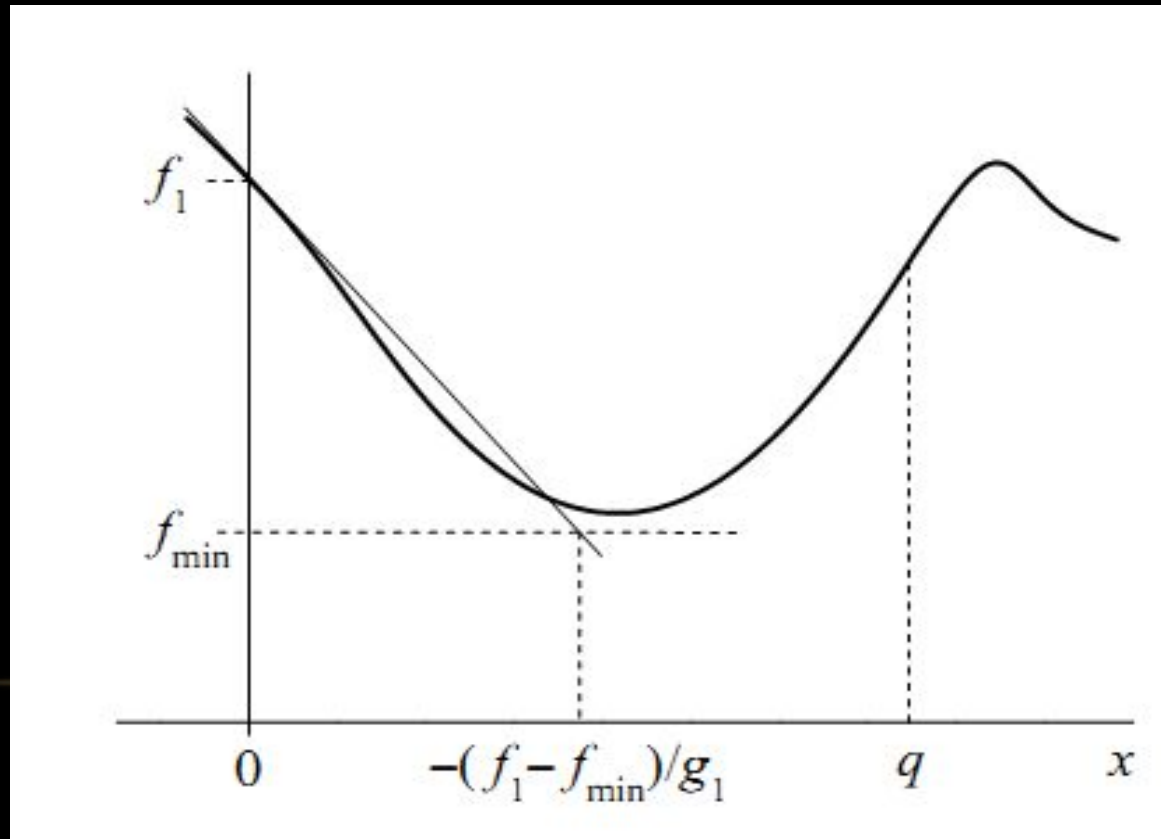


МЕТОД КУБИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

При решении реальных задач редко приходится иметь дело с функциями одной переменной. Однако методы одномерной оптимизации важны при многомерной оптимизации, которая выполняется в основном по следующему правилу: зафиксировать некоторую точку, выбрать подходящее направление, выполнить одномерную оптимизацию из выбранной точки в выбранном направлении. Поэтому методы интерполяции полезны для выполнения линейного поиска при оптимизации функций многих переменных.

КУБИЧЕСКАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ (МЕТОД ДЭВИДОНА)

ЛОКАЛЬНАЯ ЗАМЕНА МИНИМИЗИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ МНОГОЧЛЕНОМ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ (ТРИ ЧЛЕНА В РАЗЛОЖЕНИИ ТЕЙЛОРА) ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЙ МНОГОЧЛЕН СТРОИТСЯ ПО ЗНАЧЕНИЯМ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНОЙ В ДВУХ ТОЧКАХ + ТРЕБУЕТСЯ ЗАДАНИЕ ПРИБЛИЗИТЕЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ F_{\min}



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Метод сопряженных градиентов формирует направления поиска, в большей мере соответствующие геометрии минимизируемой функции.

Первоначально метод был предложен Дэвидоном и затем развит Флетчером и Пауэллом. Метод Дэвидона-Флетчера-Пауэлла называют также и методом переменной метрики. Он попадает в общий класс квазиньютоновских процедур, в которых направления поиска задаются в виде $-D_j * \text{grad}(f(y))$. Направление градиента является, таким образом, отклоненным в результате умножения на $-D_j$, где D_j - положительно определенная симметрическая матрица порядка $n \times n$, аппроксимирующая обратную матрицу Гессе. На следующем шаге матрица D_{j+1} представляется в виде суммы D_j и двух симметрических матриц ранга один каждая. В связи с этим схема иногда называется схемой коррекции ранга два.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!
